

CONSTRUCCION DE NUMEROS NO CONVENCIONALES
A PARTIR DE LOS RACIONALES

por

Yu Takeuchi

1. Construcción de los números no-convencionales
a partir de $\mathbb{Q}$.

Sea $\mathcal{F}^*$ un filtro maximal en $\mathbb{N}$.

Consideremos el conjunto $\mathcal{G}$ de todas las sucesiones de números racionales. Dadas $(a_n), (b_n) \in \mathcal{G}$, si existe una sucesión $(c_n) \rightarrow 0$ tal que

$$\{n: a_n \leq b_n + c_n\} \in \mathcal{F}^*$$

decimos que

$$(a_n) \leq (b_n) .$$

[1] Si $(a_n) \leq (b_n)$ y $(b_n) \leq (d_n)$ entonces $(a_n) \leq (d_n)$.

Demostración. Existen $(c_n) \rightarrow 0$, $(c'_n) \rightarrow 0$ tales que

$$\{n: a_n \leq b_n + c_n\} , \{n: b_n \leq d_n + c'_n\} \in \mathcal{F}^*$$

luego:

$$\{n: a_n \leq d_n + (c_n + c'_n)\} \in \mathcal{F}^*$$

puesto que

$$\{n: a_n \leq d_n + (c_n + c'_n)\} \supset \{n: a_n \leq b_n + c_n\} \cap \{n: b_n \leq d_n + c'_n\} .$$

[2] Si $(a_n) \leq (b_n)$ y $(a'_n) \leq (b'_n)$ entonces

$$(a_n + a'_n) \leq (b_n + b'_n) .$$

[3] Si $(a_n), (b_n) \in \mathcal{G}$ entonces

$$(a_n) \leq (b_n) \quad \text{ó} \quad (b_n) \leq (a_n) .$$

Demostración. Si $\{n: a_n \leq b_n + 0\} \in \mathcal{F}^*$ entonces
 $(a_n) \leq (b_n)$. Si $\{n: a_n \leq b_n + 0\} \notin \mathcal{F}^*$ entonces

$\{n: b_n < a_n\} \in \mathcal{F}^*$, luego

$$\{n: b_n \leq a_n + 0\} \in \mathcal{F}^*$$

esto es:

$$(b_n) \leq (a_n) . \blacksquare$$

Decimos que

$$(a_n) \sim (b_n)$$

si

$$(a_n) \leq (b_n) \quad \text{y} \quad (b_n) \leq (a_n) .$$

[4] $(a_n) \sim (b_n)$ si y sólo si existe una sucesión
 $(c_n) \rightarrow 0$ tal que

$$\{n: |a_n - b_n| \leq c_n\} \in \mathcal{F}^* . \quad (\text{¡Evidente!}) \blacksquare$$

[5] $(a_n) \sim (b_n)$ si y sólo si existe

$$\{t(j) : j \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}^* \quad \text{tal que}$$

$$|a_{t(j)} - b_{t(j)}| \rightarrow 0. \quad (\text{¡Evidente!}) \blacksquare$$

[6] $\sim$ es una relación de equivalencia. (¡Evidente!)

Decimos que

$$(a_n) < (b_n)$$

si

$$(a_n) \leq (b_n) \quad \text{y} \quad (a_n) \not\sim (b_n).$$

[7] Si $(a_n) \leq (b_n) \leq (d_n)$ y $(a_n) \sim (d_n)$

entonces

$(a_n) \sim (b_n)$, $(b_n) \sim (d_n)$. (¡Inmediato!). $\blacksquare$

[8] Si $(a_n) < (b_n)$ y $(b_n) \leq (d_n)$ entonces

$$(a_n) < (d_n). \quad (\text{¡Inmediato!}) \blacksquare$$

[9] Si $(a_n) < (b_n)$ y $(d_n) \leq (e_n)$ entonces

$$(a_n + d_n) < (b_n + e_n). \quad (\text{¡Inmediato!}) \blacksquare$$

[10] Si $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n) \sim (0)$ entonces
 $(a_n) \sim 0$ ó $(b_n) \sim 0$.

Demostración. Existe $S = \{n(j) : j \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}^*$
 tal que

$$a_{n(j)} \cdot b_{n(j)} \rightarrow 0.$$

Sean

$$\{k(j)\} = \{k(j) \in S / |a_{k(j)}| \leq |b_{k(j)}|\},$$

$$\{t(j)\} = \{t(j) \in S / |a_{t(j)}| > |b_{t(j)}|\},$$

entonces

$$|a_{k(j)}|^2 \leq |a_{k(j)} \cdot b_{k(j)}|, \quad |b_{t(j)}|^2 < |a_{t(j)} \cdot b_{t(j)}|.$$

Si $\{k(j)\}, \{t(j)\}$ son infinitos, como

$$\{k(j)\} \subset S \quad \text{y} \quad \{t(j)\} \subset S$$

se tiene que

$$a_{k(j)} \cdot b_{k(j)} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad a_{t(j)} \cdot b_{t(j)} \rightarrow 0,$$

luego:

$$a_{k(j)} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad b_{t(j)} \rightarrow 0.$$

Si $\{k(j)\} \in \mathcal{F}^*$ entonces se tiene que $(a_n) \sim (0)$.

Si $\{k(j)\} \notin \mathcal{F}^*$ entonces $S - \{k(j)\} = \{t(j)\} \in \mathcal{F}^*$
(puesto que $S \in \mathcal{F}^*$). Luego:

$$(b_n) \sim (0).$$

Nótese que si $\{k(j)\}$ es finito entonces

$\{k(j)\} \notin \mathcal{F}^*$, luego $\{t(j)\} \in \mathcal{F}^*$, así que

$$(b_n) \sim (0).$$

[11] Si $(a_n) > (0)$ y $(b_n) > (0)$ entonces

$$(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n) > (0).$$

Demostración. Como $(a_n) \geq (0)$, $(b_n) \geq (0)$,
existen $(c_n) \rightarrow 0$ y $(c'_n) \rightarrow 0$ tales que

$$\{n: 0 \leq a_n + c_n\} \in \mathcal{F}^* \quad \text{y} \quad \{n: 0 \leq b_n + c'_n\} \in \mathcal{F}^*.$$

Primero demostramos que el conjunto

$$A = \{n: a_n \leq 0\} \subset \mathbb{N} \quad \text{no está en } \mathcal{F}^*$$

Supongamos que $A \in \mathcal{F}^*$ entonces

$$\{t(j): j \in \mathbb{N}\} = \{n: a_n \leq 0\} \cap \{n: 0 \leq a_n + |c_n|\} \in \mathcal{F}^*$$

luego:

$$0 \leq -a_{t(j)} \leq |c_{t(j)}| \rightarrow 0,$$

o sea que

$$|a_{t(j)}| \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \{t(j) : j \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}^*,$$

esto es:

$$(a_n) \sim (0) \quad (\text{¡absurdo!}).$$

Por lo tanto se debe tener que:

$$\mathbb{N} - A = \{n: a_n > 0\} \in \mathcal{F}^*. \quad (1)$$

De la misma manera:

$$\{n: b_n > 0\} \in \mathcal{F}^* \quad (2)$$

De (1) y (2):

$$\{n: a_n > 0\} \cap \{n: b_n > 0\} \in \mathcal{F}^*$$

luego:

$$\{n: a_n \cdot b_n \geq 0\} \in \mathcal{F}^*,$$

esto es:

$$(a_n \cdot b_n) \geq (0).$$

De [10] se tiene que $(a_n \cdot b_n) \not\sim (0)$, entonces:

$$(a_n \cdot b_n) > (0). \quad \blacksquare$$

[12] Si $(a_n) > (0)$ entonces $\{n: a_n > 0\} \in \mathcal{F}^*$
(Ver (1) de la propiedad anterior).

Nota. $\{n: a_n > 0\} \in \mathcal{F}^*$ no implica que $(a_n) > (0)$.
Por ejemplo, $(\frac{1}{n}) \sim (0)$ y $\frac{1}{n} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

[13] Si $(a_n) > (0)$ existe $(b_n) \sim (a_n)$ tal que

$$b_n > 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Tenemos que $\{n: a_n > 0\} \in \mathcal{F}^*$.

Sea

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{si } a_n > 0 \\ \frac{1}{n} & \text{si } a_n \leq 0. \end{cases}$$

Entonces $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, además:

$$|b_n - a_n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

luego

$$(a_n) \sim (b_n). \blacksquare$$

[14] Sea (c) una sucesión constante con $c > 0$.

Si $(0) < (a_n) < (c)$ entonces existe $(b_n) \sim (a_n)$ tal que

$$0 < b_n < c \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Como $(c - a_n) > (0)$, se tiene que:

$$\{n: c - a_n > 0\} \cap \{n: a_n > 0\} \in \mathcal{F}^*.$$

Sea

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{si } c > a_n > 0 \\ \frac{c}{n} & \text{en otros casos,} \end{cases}$$

entonces $c > b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y

$$|a_n - b_n| \rightarrow 0 \quad (\text{cuando } n \rightarrow \infty),$$

o sea:

$$(a_n) \sim (b_n). \blacksquare$$

[15] Sean (a_n) , (b_n) tales que $(a_n - b_n)$ converga a un límite positivo, entonces $(a_n) > (b_n)$.

Demostración. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = c$, sea $b_n - a_n + c = c_n$, entonces $c_n \rightarrow 0$ y $a_n + c_n = b_n + c \geq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego:

$$\{n: b_n \leq a_n + c_n\} = \mathbb{N} \in \mathcal{F}^*,$$

esto es,

$$(b_n) \leq (a_n).$$

Evidentemente no existe una subsucesión de $(a_n - b_n)$ que tiende a cero, luego:

$$(a_n) \not\sim (b_n),$$

y así

$$(a_n) > (b_n). \blacksquare$$

[16] Si $(a_n) \sim (b_n)$ y $(d_n) \sim (f_n)$ entonces:

(¡Evidente!). ■

$(a_n) \sim (0)$, $(\frac{1}{b}) \not\sim (0)$, entonces

$$(a_n \cdot b_n) \sim (0).$$

Demostración. Sea $A = \{n: \sqrt{|a_n|} \cdot |b_n| > 1\}$.

Supongamos que $A \in \mathcal{F}^*$, entonces

$$A = \{n : \frac{1}{|b_n|} < \sqrt{|a_n|}\}$$

Como $(a_n) \sim (0)$, existe $B = \{s(j) : j \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}^*$

tal que $|a_s(j)| \rightarrow 0$, luego:

$$\sqrt{|a_{s(j)}|} \rightarrow 0.$$

Como $B \cap A \in \mathcal{F}^*$ entonces $\left(\frac{1}{|b_n|}\right) \sim (0)$, o sea:

$$\left(\frac{1}{b_n}\right) \sim (0) \quad (\text{! absurdo!})$$

Por lo tanto se tiene que:

$$A \in \mathbb{R}^n$$

luego:

$$\mathbb{N} - A = \{n: \sqrt{|a_n|} \cdot |b_n| \leq 1\} =$$

$$= \{n: |a_n \cdot b_n| \leq \sqrt{|a_n|}\} \in \mathcal{F}^*.$$

Como $(\mathbb{N} - A) \cap B \in \mathcal{F}^*$, se tiene que $(|a_n \cdot b_n|) \sim (0)$ o sea que:

$$(a_n \cdot b_n) \sim (0).$$

[18] Sean $(a_n) \sim (b_n)$, $(d_n) \sim (f_n)$ tales que

$$\left(\frac{1}{a_n}\right) \not\sim (0), \quad \left(\frac{1}{f_n}\right) \not\sim (0),$$

entonces

$$(a_n \cdot d_n) \sim (b_n \cdot f_n). \quad (*)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} (a_n d_n) - (b_n f_n) &= (a_n d_n) - (a_n f_n) + (a_n f_n) - (b_n f_n) \\ &= (a_n \cdot (d_n - f_n)) + ((a_n - b_n) \cdot f_n) \sim (0) + (0) \sim (0) \end{aligned}$$

(*) Supóngase que $a_n \neq 0$, $f_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta no es una restricción esencial ya que dada (a_n) existe $(a'_n) \sim (a_n)$ con $a'_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considérese: $\frac{a'_n}{a_n} = a_n$ si $a_n \neq 0$, $\frac{1}{n}$ si $a_n = 0$. ■

puesto que

$$\left(\frac{1}{a_n}\right) \sim (0), (d_n - f_n) \sim (0), \left(\frac{1}{f_n}\right) \sim (0), (a_n - b_n) \sim (0).$$

Sea $\mathcal{G}_1$ la familia de todas las sucesiones,
 $(a_n) \in \mathcal{G}$, tales que

$$\left(\frac{1}{a_n}\right) \sim (0) \quad ((*) \text{ Nota anterior}).$$

Sea $\hat{\mathbb{R}}^* = \mathcal{G}_1 / \sim$ entonces $\hat{\mathbb{R}}^*$ es un cuerpo.

Si $\alpha \in \hat{\mathbb{R}}^*$ es la clase (en $\hat{\mathbb{R}}^*$) que contiene la sucesión que tiende a un número real α entonces la identificamos con el número real:

$$\alpha = \text{la clase } [(a_n)] \quad \text{con} \quad (a_n) \rightarrow \alpha.$$

Así se tiene que:

$$\mathbb{R} \subset \hat{\mathbb{R}}^* .$$

En el próximo parágrafo se muestra que $\mathbb{R} \neq \hat{\mathbb{R}}^*$.

Observación. Para construir al cuerpo $\hat{\mathbb{R}}^*$ hemos utilizado la familia $\mathcal{G}$ de las sucesiones racionales. Comenzando con las sucesiones de números reales podemos llegar al mismo cuerpo $\hat{\mathbb{R}}^*$, ya que dada una sucesión de números reales (x_n) existen dos sucesiones de números racionales (a_n) y (a'_n) tales que

$$a_n \leq x_n \leq a'_n, \quad a'_n - a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

esto es:

$$(a_n) \sim (a'_n) \sim (x_n). \blacksquare$$

2. Existencia de un infinitesimal en $\hat{\mathbb{R}}^*$.

Decimos que $\epsilon \in \hat{\mathbb{R}}^*$ es un infinitesimal si

$$-c < \epsilon < c \quad (\text{ó } |\epsilon| < c)$$

para todo c real positivo.

Proposición. Existe en $\hat{\mathbb{R}}^*$, por lo menos, un infinitesimal.

Demostración. Sea $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto de números racionales denso en $[0,1]$ (*).

Sea $\mathcal{F}$ la familia de todos los conjuntos, S , tales que

(*) Basta considerar una sucesión (a_n) tal que los límites de subsucesiones convergentes forman una sucesión que tiende a cero, por ejemplo:

$$(1, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5},$$

$$1, \frac{1}{2}, \dots)$$

$$S = \{n: a_n < c\} - \{t(j)\} \quad \text{con } c > 0 \text{ real,}$$

donde el conjunto $\{t(j)\} \subset \mathbb{N}$ es finito, infinito ó vacío tal que $\{a_{t(j)}\}$ tiene a lo más un número finito de puntos límites. Se puede comprobar inmediatamente que $\mathcal{F}$ es un filtro en $\mathbb{N}$. Sea $\mathcal{F}^*$ un filtro maximal más fino que $\mathcal{F}$ (*). Si ε es la clase en $\mathbb{R}^*$ representada por la sucesión (a_n) :

$$\varepsilon = [(a_n)] ,$$

entonces ε es un infinitesimal positivo (de acuerdo con el filtro $\mathcal{F}^*$). En realidad, dado $c > 0$ real, tenemos que:

$$\{n: a_n < c\} \in \mathcal{F}^* , \quad \{n: 0 < a_n\} = \mathbb{N} \in \mathcal{F}^*$$

luego:

$$(0) \leq (a_n) \leq (c).$$

Ahora, supongamos que

$$(a_n) \sim (0),$$

(*) En realidad, $\mathcal{F}^*$ es un ultrafiltro de Fréchet.

entonces existe $\{s(j)\} \in \mathcal{F}^*$ tal que

$$a_{s(j)} \rightarrow 0$$

Pero:

$$\mathbb{N} - \{s(j)\} \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}^*$$

esto es,

$$\{s(j)\} \notin \mathcal{F}^* \quad (\text{¡absurdo!})$$

Por lo tanto se tiene que:

$$(a_n) \neq (0),$$

así que:

$$0 < \varepsilon \leq c \quad (\text{para cualquier } c \text{ real}),$$

esto es, ε es un infinitesimal.

3. Algunas propiedades de los infinitesimales.

Sea E el conjunto de todos los infinitesimales y el cero en $\hat{\mathbb{R}}^*$.

[1] El conjunto E es equipotente a $\mathbb{R}$.

Demostración. Si $\varepsilon \in E$ entonces $x \in E \subset E$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Si $x \neq y$, $x, y \in \mathbb{R}$ entonces

$$x \varepsilon \neq y \varepsilon ,$$

luego E contiene un subconjunto equipotente a $\mathbb{R}$. Como el conjunto de todas las sucesiones de números racionales es equipotente a $\mathbb{R}$, se tiene que E es equipotente a $\mathbb{R}$. ■

[2] Sea ε un infinitesimal positivo, entonces $\varepsilon \cdot \mathbb{R}$ es un subconjunto propio de E .

Demostración. Evidentemente $\varepsilon \cdot \mathbb{R} \subset E$.

Supongamos que $E = \varepsilon \mathbb{R}$; entonces existiría un $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$\varepsilon^2 = \varepsilon x$$

puesto que $\varepsilon^2 \in E$, $\varepsilon^2 \neq 0$, luego:

$$\varepsilon = x \in \mathbb{R} \quad (\text{¡absurdo!}) \quad \blacksquare$$

[3] Sea ε un infinitesimal positivo, entonces

$$\varepsilon > \varepsilon^2 > \varepsilon^3 > \dots > \varepsilon^n > \dots > 0 \quad (1)$$

$$\varepsilon < \varepsilon^{1/2} < \varepsilon^{1/3} \dots < \varepsilon^{1/n} < \dots \quad (2)$$

Existe un infinitesimal positivo η tal que

$$0 < \eta < \epsilon^n \quad (\text{para todo } n \in \mathbb{N}).$$

Demostración. Las relaciones (1), (2) son evidentes.

Sea $\epsilon = [(a_k)]$ con $0 < a_k < \frac{1}{2}$ para todo k .

Consideremos:

$$\eta = [(b_k)] \quad \text{con} \quad b_k = (a_k)^{\frac{1}{a_k}}.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$\{k : a_k < \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}^*$$

puesto que (a_k) es un infinitesimal; luego:

$$\{k : (a_k)^{1/a_k} \leq (a_k)^n\} \in \mathcal{F}^*$$

esto es: $\eta \leq \epsilon^n$

Evidentemente: $0 < \eta$

Supongamos que

$$\eta = 0, \text{ o sea, } (b_k) \sim (0),$$

entonces existe $\{t(j)\} \in \mathcal{F}^*$ tal que

$$b_{t(j)} \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty),$$

o sea,

$$\log b_{t(j)} = \frac{r}{a_{t(j)}} \cdot \log a_{t(j)} \rightarrow -\infty,$$

6

$$\left(\frac{1}{a_{t(j)}} \right) \log \left(\frac{1}{a_{t(j)}} \right) \rightarrow \infty \quad (t(j) \rightarrow \infty),$$

esto es:

$$\frac{1}{a_{t(j)}} \rightarrow \infty, \quad \delta, \quad a_{t(j)} \rightarrow 0.$$

Por lo tanto se tiene que:

$$(a_k) \sim (0) \quad (\text{absurdo!})$$

[4] Sea ε un infinitesimal positivo, entonces ε^ε no es un infinitesimal.

Nota: Si $\varepsilon = [(a_n)]$ (con $a_n > 0$) se define que

$$\varepsilon^\varepsilon = [(a_n)^{a_n}].$$

Demostración. Sea $\varepsilon = [(a_n)]$ con $0 < a_n < 1$.

Sabemos que:

$$(a_n)^{a_n} \geq \left(\frac{1}{e}\right)^{1/e} > 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

Por lo tanto, ϵ^ϵ no es un infinitesimal. ■

Decimos que $a \in \hat{\mathbb{R}}^*$ es infinito si

$$|a| > x \quad \text{para todo } x \text{ real positivo.}$$

Si ϵ es un infinitesimal, entonces $\frac{1}{\epsilon}$ es infinito.

Sea $\mathbb{B} = \mathbb{R}^* - \{\text{infinito}\}$, entonces $\mathbb{B}$ es un anillo, y E es un ideal maximal de $\mathbb{B}$, se tiene:

$$\mathbb{B}/E = \mathbb{R}.$$

Tenemos:

$$E \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{B} \subset \hat{\mathbb{R}}^*$$

(infinitesimal) (reales) ($\neq$ infinito) (no-conven-
cional)

4. Relación entre $\mathbb{R}^*$ y $\hat{\mathbb{R}}^*$.

Sea $\mathcal{G}_0$ la familia de todas las sucesiones de números reales, entonces definimos $\leq$, $\sim$ como sigue:

$$(a_n) \leq (b_n) \quad \text{si} \quad \{n : a_n \leq b_n\} \in \mathcal{F}^*,$$

$$(a_n) \sim (b_n) \quad \text{si} \quad (a_n) \leq (b_n) \quad \text{y} \quad (b_n) \leq (a_n).$$

Sabemos que:

$$\mathcal{G}_0 / \sim = \mathbb{R}^*.$$

En $\mathbb{R}^*$, un número real x es la clase que contiene la sucesión constante (x) .

Nótese que la sucesión $(\frac{1}{n})$ representa un infinitesimal positivo en $\mathbb{R}^*$.

(Ojo! $(\frac{1}{n}) \equiv (0)$ en $\hat{\mathbb{R}}^*$), también lo es la sucesión (a_n) utilizada en 2, obsérvese que la clase (a_n) no contiene sucesión convergente a cero.

En $\mathbb{R}^*$, sea E_1 el conjunto de todos los infinitesimales y el cero. Sea E_0 el conjunto de todos los elementos de $\mathbb{R}^*$ representados por sucesiones convergentes a cero, entonces se tiene evidentemente que:

$$E_0 \subset E_1$$

La existencia de la clase en $\mathbb{R}^*$ que no contiene la sucesión convergente a cero nos indica inmediatamente que:

$$E_0 \neq E_1$$

[1] si $\eta_0 \in E_0$, $\eta \in E_1 - E_0$, $\eta_0 > 0$, $\eta > 0$

entonces

$$\eta_0 < \eta$$

Demostración. Sean $\eta_0 = [(a_n)]$ con $a_n \rightarrow 0$, $\eta = [(b_n)]$.

Supongamos que $n_0 > n$ entonces

$$\{n : b_n \leq a_n\} \in \mathcal{F}^*.$$

Considerar:

$$\tilde{b}_n = \begin{cases} b_n & \text{si } b_n \leq a_n \\ \frac{1}{n} & \text{si } b_n > a_n \end{cases},$$

entonces

$$(\tilde{b}_n) \sim (b_n) \quad \text{y} \quad \tilde{b}_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (\text{absurdo!}) \blacksquare$$

Sean

$$B_1 = \mathbb{R}^* - \{\text{infinito}\} = \{a \in \mathbb{R}^* : \frac{1}{a} \notin E_1\},$$

$$B_0 = \{a \in \mathbb{R}^* : \frac{1}{a} \notin E_0\}, \quad \text{entonces tenemos:}$$

$$B_1 \subset B_0, \quad B_1 \neq B_0.$$

$\mathbb{R}^* - B_0$ es el conjunto de todos los infinitos representados por sucesiones divergentes hacia $\pm \infty$. Tenemos:

$$E_0 \subset E_1 \subset \mathbb{R} \subset B_1 \subset B_0 \subset \mathbb{R}$$

(infinitesimales
sucesión $\rightarrow 0$) (infinitesimales
simales) (real) ($\neq \text{inf.}$) ($\neq \pm \infty$) (no-con-
vencionales)

Hay los siguientes isomorfismos:

$$B_0/E_0 \cong \hat{\mathbb{R}}^*, \quad B_1/E_0 \cong B$$

$$B_1/E_1 \cong \mathbb{R}, \quad E_1/E_0 \cong E \quad \blacksquare$$

Guillermo L. Serna M.
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá.

Resumen.

Bajo la hipótesis de que el desarrollo económico es un proceso de difusión, se desarrolla el formalismo de la capacidad de crecimiento del modelo. Para verificar la hipótesis de crecimiento, a través de la cual se elabora el sistema, empleando un modelo de crecimiento de la teoría del principio de máxima entropía. Primero, hemos supuesto que el vector velocidad de crecimiento de difusión está dentro del espacio. Luego, hacemos la hipótesis más realista de que el