Boletín de Matemáticas
Vol XII (1978), págs. 39 - 54

SOBRE LA TEORIA DE LA DIMENSION

por

David Mond

Dimensión es un concepto que todos tenemos y que podemos aplicar en la práctica cuando decimos por ejemplo, que tal objeto geométrico(una curva) es de dimensión uno, que tal otro (una superficie) es de dimensión dos, etc.. Podemos preguntarnos si en realidad estamos diciendo algo más que una curva es una curva o que una superficie es una superficie. La respuesta, me parece, es sí; y en esta charla quiero señalar algunas de las maneras como los matemáticos han podido precisar la noción intuitiva de dimensión. Naturalmente, para precisar la intuición, hay que seguirla (si no, corremos el riesgo de quedarnos con algo que no satisface nuestra inquietud original). Por eso, antes de dar definiciones buscaremos fuentes de definición. Me parece que hay dos de estas fuentes principalmente: la noción de longitud, área, volumen (o, en breve, de extensión), que se expresa cuando se dice que un objeto que tiene área pero no volumen es de dos dimensiones, o que algo sólido es de tres dimensiones; y la idea más netamente topológica (que incidentalmente se encuentra en los escritos de Euclides) de que una línea (o un objeto de dimensión uno) es algo que puede ser dividido por un punto, que una superficie es algo que puede ser dividido por una curva, y que un sólido es algo que solamente puede ser dividido por una superficie. En realidad, Euclides lo dijo al revés: para él, un punto era el borde de una línea, una línea el borde de una superficie y una superficie el borde de (lo que limita) un sólido. Seguramente para él los sólidos eran los objetos más reales, y había que partir de ellos.

Fué Poincaré quien dió respetabilidad matemática a esta segunda noción intuitiva, en sus Dernières Pensées, cerca del principio del siglo. El descubrimiento por Peano de una curva que cubría el cuadrado, y los trabajos de Cantor que hacían ver que no era posible distinguir, en términos de la potencia del conjunto subyacente, entre espacios topológicos de dimensiones intuitivamente distintos, habían hecho temer que la noción de homeomorfismo no fuera lo suficientemente fina para dar una buena clasificación de los espacios topológicos; en particular se pensó que pudieran resultar homeomorfos espacios R^h con valores distintos de n. En realidad hay demostraciones sui géneris, relativamente sencillas, de que esto no es el caso, por lo menos para bajos valores de n. Por ejemplo, $[0,1]$ no es homeomorfo a $[0,1]^2$ porque éste sigue siendo conexo después de quitarle cualquier punto, propiedad que lo distingue topológicamente de $[0,1]$. Hay ciertas figuras que se pueden construír en $[0,1]^3$ pero no en $[0,1]^2$ (esto es, que no tienen imágenes homeomorfas en $[0,1]^2$). Por ejemplo, los gráficos K_5 y $K_{3,3}$.

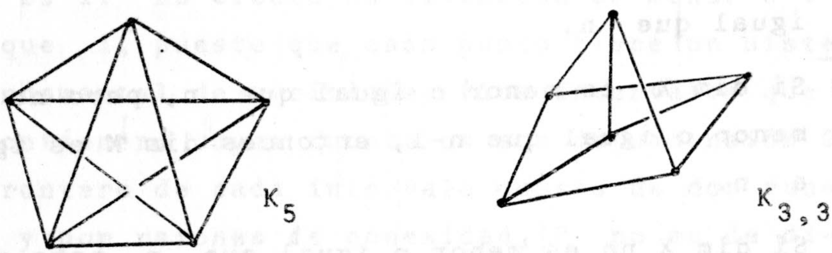


Fig. 1

(En efecto, estos son los gráficos más sencillos con esta propiedad; Kuratowski demostró que cualquier gráfico que no se puede construír en R^2 debe contener uno de estos dos). Más adelante daré una demostración de que $K_{3,3}$ no puede ser dibujado en el plano.

Siguiendo la iniciativa de Poincaré, fueron Brouwer, Menger y Urysohn, todos trabajando independientemente, quienes dieron la primera definición rigurosa y completamente extensiva (en el sentido de que cobija a todos los espacios topológicos) de dimensión topológica. Esta es:

1) Dim X (la dimensión del espacio X) es -1, si y sólo si X es vacío.

2) Si un punto p de X tiene un sistema fundamental de vecindades abiertas(o sea, vecindades abiertas arbitrariamente pequeñas) cuyas fronteras son de dimensión n-1, entonces la dimensión de X en p es menor o igual que n.

3) Si la dimensión de X es menor o igual que n en todos sus puntos, entonces dim X es menor o igual que n.

4) Si dim X es menor o igual que n, pero no es menor o igual que n-1, entonces dim X es igual a n.

5) Si dim X no es menor o igual que n para ningún n, entonces dim X es infinita.

Antes de ver algunos ejemplos, notemos que las condiciones anteriores definen una función que asigna a cada espacio topológico un número, el cual es evidentemente invariante bajo homeomorfismos, más aún, bajo homeomorfismos locales y que es monótona en el sentido de que $Y \subseteq X$ implica que Dim Y es menor o igual que dim X.

Como primer ejemplo, veamos que el conjunto de los números racionales, considerado como subespacio de la recta real, tiene dimensión igual a cero: en efecto cada punto tiene un sistema fundamental de vecindades cuyas fronteras, siendo vacías, son de dimensión -1... los intervalos abiertos con extremos irracionales que lo contienen; por lo tanto, su dimensión es menor o igual que 0; y puesto que no es vacío, su dimensión no es -1, así que debe ser 0.

Es sencillo ver que cualquier conjunto finito de puntos de la recta es de dimensión 0, ya que cada miembro es aislado. Por esto, la dimensión de la recta es 1. En efecto su dimensión es menor o igual que 1, puesto que cada punto tiene un sistema fundamental de vecindades (los intervalos que los contienen) cuyas fronteras son de dimensión 0 (la frontera de cada intervalo consta de dos puntos); y por razones de conexidad, R no es de dimensión menor o igual que 0.

Siguiendo, podemos ver que la dimensión de R^2 es menor o igual que 2, pues los discos abiertos con centro en un punto dado forman un sistema fundamental para ese punto, y las fronteras de esos discos, siendo localmente homeomorfos a R, son de dimensión 1. Inductivamente se puede establecer facilmente que la dimensión de R^n es menor o igual que n.

En general, es más difícil mostrar que la dimensión de un espacio es mayor o igual que n que mostrar que es menor o igual que n. La demostración de que la dimensión de R^n es en verdad n es mucho más difícil, y no lo intentaré aquí.

Quiero señalar, sin demostrarlas, algunas consecuencias más de la anterior definición de dimensión:

1) Si $X \subseteq R^n$, dim X es igual a n si, y sólo si X contiene algún abierto de R^n.

2) No es posible separar a R^n por medio de un subespacio de dimensión menor que $n-1$.

3) En general, si X y Y son dos espacios, dim $X \times Y \leqslant$ dim X + dim Y.

Es interesante notar que de (2) se deduce que cualquier gráfico puede construirse en R^3. La razón es la siguiente: un gráfico se define (y se construye) escogiendo algunos vértices y luego uniendo algunos por curvas, de manera sucesiva (y finita). Ahora, en cualquier momento de la construcción, el resultado es de dimensión 1, así que no puede separar a R^3; por lo tanto, no puede obstruír la construcción de nuevas curvas que unan otros vértices.

Si la definición de dimensión que se acaba de dar tiene su inspiración en la noción de separación, hay otra que viene de la otra fuente que mencioné: la idea de volumen. Decimos intuitivamente que un objeto geométrico tiene dimensión tres si tiene volumen ; puesto en términos más matemáticos, un espacio topológico sumergido en R^3 es de dimensión tres si su medida tri-dimensional de Lebesgue es mayor que 0 (la circularidad de esta frase es solamente aparente: la medida tri-dimensional de Lebesgue es simplemente la definida tomando al cubo de lado uno como unidad). Podemos extender esta idea: un espacio sumergido en R^n es de dimensión n, si su n-medida de Lebesgue es mayor que 0. Hay que señalar en este punto que la dimensión que estamos definiendo no tiene por qué coincidir con la definida anteriormente; y en efecto, hay casos muy sencillos en donde son distintas. Por ejemplo, los irracionales en R tienen la misma medida de Lebesgue que R mismo, pero su dimensión, según la primera definición que dimos, es 0. Esto último se puede ver, fácilmente, del mismo modo que mostramos que la dimensión de los racionales en R es 0. Sin embargo, existe una relación muy fuerte entre las dos cosas; por ejemplo, resulta que si un subespacio de R^n tiene su n-medida igual a 0, entonces su dimensión topológica (en el sentido de la primera definición) es menor que n.

Evidentemente la definición de dimensión por medio de la noción de medida, que hemos dado, es muy limitada; por ejemplo, no nos permite asignarle una dimensión a espacios más pequeños sumergidos en R^n, y no es aplicable a otros espacios. Por eso resulta mucho más fructífero considerar una variación de esta idea que emplea, no una medida, sino algo que es esencialmente una medida exterior: la llamada medida de Hausdorff. Esta se puede definir en cualquier espacio métrico. Su definición, algo complicada en apariencia, es la siguiente: se consideran, para determinar la dimensión del espacio X, todos los recubrimientos enumerables de X. Dado un recubrimiento, $\{A_n\}_n$, cada número $p > 0$ nos da un valor distinto de $\sum_n [\text{diam } A_n]^p$. Definimos

$$m_p^{\varepsilon}(X) = \inf.\{\sum_n [\text{diam } A_n]^p \mid \{A_n\}_n \text{ recubre } X, \text{ y}$$

$$\text{diam } A_n < \varepsilon \,\forall n\} \quad \text{y} \quad m_p(X) = \sup_{\varepsilon} m_p^{\varepsilon}(X).$$

Es evidente de la definición que el número $m_p(X)$ (la p-medida de Hausdorff de X) está relacionado con la p-medida de Lebesgue cuando p es un entero. (Recuérdese que el volumen de un p-cubo de lado r es r^p). En efecto, para $X \subseteq R^n$, $m_n(X) = 0$ sí, y sólo si la n-medida de Lebesgue de X es igual a 0.

Finalmente definimos:

$$H\text{-}\dim.(X) = \sup \{p \mid m_p(X) > 0\}.$$

Esta última definición tiene su justificación en el hecho de que si $m_p(X) > 0$ y $q < p$, entonces $m_q(X) = \infty$, y si $m_p(X) < \infty$ y $q > p$ entonces $m_q(X) = 0$. O sea, hay a lo más un valor de p para el cual $m_p(X)$ es mayor que 0 y menor que ∞. La dimensión H-dim(X) se denomina la dimensión de Hausdorff de X.

La relación entre la dimensión de Hausdorff de un espacio y su dimensión topológica (como la definimos antes) es estrecha pero no de identidad; entre otras cosas, la dimensión de Hausdorff no siempre es un entero. Pero se puede mostrar que $H\text{-}dim(X) > dim(X)$ y, de hecho $dim(X)$ es el ínfimum de los valores de la dimensión de Hausdorff de todas las imágenes homeomorfas de X.

Una de las cosas verdaderamente interesantes de la teoría de la dimensión es el alto grado de coincidencia que se da entre los resultados obtenidos por las distintas maneras de definir la dimensión, como la que acabamos de observar. A riesgos de prolijidad en la exposición, voy a mencionar brevemente dos maneras más de definir la dimensión, las cuales, para una clase muy grande de espacios*, dan resultados que coinciden con los de las que ya hemos discutido. Por conveniencia en la exposición, llamaré ind (por pequeña dimensión inductiva) a la primera dimensión que definí.

El primero de estos dos métodos se debe originalmente a Lebesgue, quien observó que el cuadrado $[0,1]^2$ puede ser recubierto por conjuntos cerrados arbitrariamente pequeños, de tal manera que

* espacios métricos separables.

ningún punto se encuentra en más de tres, pero que al parecer este número no se podía reducir; y que para el cubo $[0,1]^3$, el número correspondiente era cuatro. (Ver Fig. 2 (a)). Como el número para el intervalo $[0,1]$ es evidentemente dos, Lebesgue conjeturó que este número (del que vamos a dar una definición precisa en un momento) siempre era una unidad mayor que la dimensión (vectorial) de los espacios Euclideanos que él estaba considerando. Esto resultó ser cierto (otra vez fué Brouwer quien convirtió la sospecha en certeza). La idea de Lebesgue puede generalizarse a cualquier espacio topológico, y podemos dar la siguiente definición de dimensión, que sí lleva el nombre de dim:

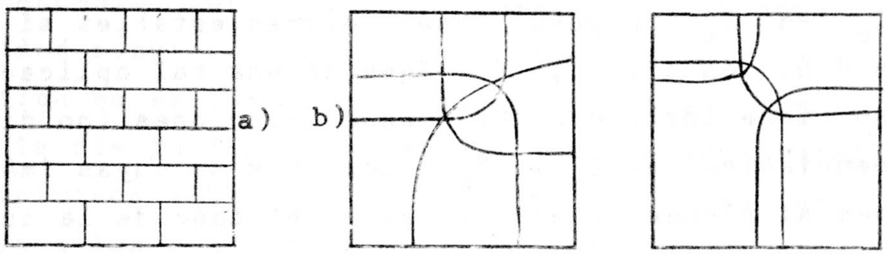
1) dim X = -1 si, y sólo si X es vacío.

2) dim X $\leqslant$ n, si cada recubrimiento (finito) abierto tiene un refinamiento de orden menor o igual que n.

3) dim X es igual a n, si es menor o igual que n pero no es menor o igual que n-1.

4) Dim X es infinito, si no es menor o igual que n para ningún n.

Aquí hay dos términos que debemos definir: un recubrimiento $\{U_\alpha\}$ es un refinamiento del recubrimiento $\{V_\beta\}$, si para cada U_α existe algún V_β tal que $U_\alpha \subseteq V_\beta$; y el orden de un recubrimiento es una unidad menor que el mayor número de sus miembros que tienen intersección (conjunta) no vacía. La referencia a los refinamientos en la segunda parte de la definición es para exigir que los recubrimientos de orden n se puedan hacer arbitrariamente pequeños.



Un recubrimiento de orden tres, con un refinamiento de orden dos.

Fig. 2

El siguiente método de definir la dimensión toma como modelo para espacios de dimensión n el n-cubo $[0,1]^n$, y compara los demás espacios con éste mediante un estudio de sus espacios de funciones contínuas con codominio $[0,1]^n$: $C(X,I_n)$. (Aquí I_n es $[0,1]^n$) Supondremos que $C(X, I_n)$ esta dotado de la métrica definida por

$$d(f,g) = \sup \{|f(x)-g(x)| \mid x\in X \}.$$

Se dice que un punto p de I_n es un valor estable de una función contínua $f:X \to I_n$, si $p\in f(X)$, y si además existe $\varepsilon > 0$ tal que si $d(f,g) < \varepsilon$ entonces $p\in g(X)$, o sea, si p pertenece a la imágen de f, y además a la imágen de cualquier otra función contínua g lo suficientemente cercana a f. De lo contrario, p se llama un valor inestable de f.

En total, p es un valor inestable de f, si mediante perturbaciones arbitrariamente pequeñas p puede ser excluído del recorrido de f. Es un hecho muy conocido que una aplicación diferenciable de I_m en I_n no puede tener valores estables si $m < n$; en efecto, la imágen de una tal aplicación no tiene interior. Existen aplicaciones (no diferenciables) de I_m en I_n, con $m < n$, cuyas imágenes si tienen interior; tal es el caso de la curva de Peano. Pero todas esas aplicaciones se distinguen por no tener valores estables. En el caso de la curva de Peano, este hecho se puede asemejar a la situación de una maraña de hilo que, aplastada, cubre una área. El área cubierta tiene interior, pero una perturbación arbitrariamente pequeña del hilo puede descubrir cualquier punto.

Estas consideraciones justifican intuitivamente la siguiente definición:

1) La dimensión de X es -1 si, y sólo si X es vacío.

2) La dimensión de X es menor o igual que n si ninguna aplicación contínua de X en I tiene valores estables.

3) La dimensión de X es n si es menor o igual que n pero no es menor o igual que n-1.

4) La dimensión de X es infinito si no es menor o igual que n para ningún n.

La coincidencia, para los espacios métricos separables, de los valores de ind., dim, H-dim, y de esta última dimensión, es un hecho verdaderamente sorprendente, que sugiere la presencia de alguna realidad subyacente que la explique. Pero la matemática no es como las ciencias naturales, donde cabe la distinción entre hechos que son genuinamente empíricos y hechos que se deben en última instancia a las convenciones y al diseño de los experimentos; en la matemática todo es de fabricación humana, y por lo tanto, toda coincidencia es lógicamente necesaria: el resultado de las convenciones (las definiciones) que hayamos elegido. Por eso, si tratamos de buscar las raíces de la coincidencia de la que hablamos, es probable que no las vayamos a encontrar dentro de la matemática, sino en nuestras percepciones del mundo, las mismas que nos han guiado en la escogencia de nuestras definiciones.

Para terminar esta charla, quiero mencionar brevemente uno de los teoremas más importantes de la teoría de la dimensión: el teorema de inmersión, que dice que cada espacio métrico separable de dimensión n es homeomorfo a algún subespacio de $[0,1]^{2n+1}$. El resultado es muy parecido al teorema de Whitney para variedades diferenciables, y se demuestra de un modo semejante, aplicando el teorema de Baire en $C(X,I_{2n+1})$. Sin embargo Whitney pudo mejorar su resultado para variedades, logrando reemplazar la cifra de 2n+1 por 2n , pero en este caso hay ejemplos que muestran que 2n+1 no se puede mejorar. En efecto, los dos gráficos de la fig. 1 son espacios de dimensión 1 que no tienen imagen homeomorfa en $[0,1]^2$. Es interesante observar, sin embargo, que ambos son gráficos bastante especiales. Como se ve en la fig. 3, $K_{3,3}$ es una cuadriculación de la cinta de Mobius, y K_5 resulta ser una triangulación del plano proyectivo real de dimensión dos, lo que se puede comprobar con los dibujos del plano proyectivo en el libro **Geometría e imaginación** de Hilbert y Cohn-Vossen. O sea, ambos son gráficos, en cierto sentido, no-orientables.

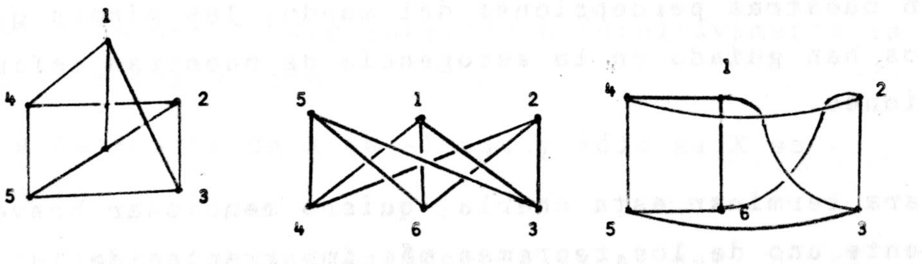


Fig. 3

El que $K_{3,3}$ no se puede dibujar en el plano se puede mostrar más o menos facilmente intentando una construcción y aplicando el teorema de Jordan para demostrar la imposibilidad de terminarla, pe ro aquí voy a esbozar otra demostración: primero, contando los circuitos en $K_{3,3}$, se ve que hay 15. En un gráfico plano conexo, se cumple la siguiente ley (fórmula de Euler):

$$\# \text{ de caras (excluyendo la no acotada)} =$$
$$= \# \text{ de aristas} = 1 - \# \text{ de vértices.}$$

Cuántos circuitos hay en un gráfico plano ? Cada circuito encierra algunas caras, y, de hecho, si dos curvas encierran las mismas caras, son iguales. Por lo tanto

$$\# \text{ de circuitos} \leqslant 2^{\# \text{ de caras}} - 1$$

(hay que excluir de las consideraciones a la curva que no encierra ninguna cara). Evidentemente, se puede presentar igualdad solamente cuando cada par de caras tiene una arista en común, como se ve de la figura 4(a), donde no hay ningún circuito que encierre solamente las caras 1 y 3; y también es condición indispensable para la igualdad el que cada unión de caras con sus aristas comunes deba ser simplemente conexo. O sea, cada cara debe tener una arista en común con la región no acotada, como se puede ver en la figura 4(b), donde no hay ningún circuito que encierra solamente las caras 1 y 2.

En el caso de $K_{3,3}$, la fórmula de Euler implica que cualquier imágen homeomorfa en el plano tendrá

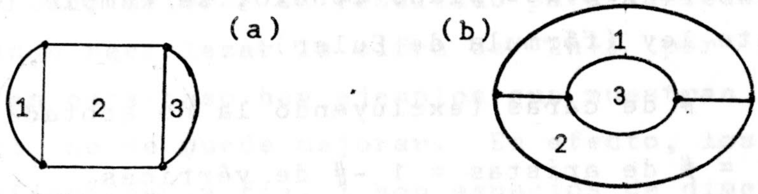


Fig. 4

4 caras. Pero entonces, para que se presentaran todos los quince circuitos, cada dos caras deberían tener frontera común entre sí y, además, cada cara deberá tener frontera común con la región no acotada. Esto es, una imágen homeomorfa de $K_{3,3}$ en el plano formaría un mapa que necesitaría cinco colores.

***