Boletín de Matemáticas
Vol. XII (1978) págs. 55 - 73

UN EJEMPLO DE UN LENGUAJE DE PRIMER ORDEN

por

Rafael Isaacs

Introducción.

El razonamiento Todos los tigres comen carne; carne es una palabra, entonces los tigres comen palabras, pone de manifiesto los dos primeros planos que hay que distinguir en el análisis de lo que es el lenguaje: El Plano del Significante y el Plano del Significado. Cuando decimos todos los tigres comen carne nos estamos refiriendo al objeto concreto carne, tejido muscular que llevan los animales, y estamos en el Plano del Significado. Cuando decimos carne es una palabra nos referimos probablemente al sonido carne o al grafismo, entonces estamos en el Plano del Significante. Esta distinción se profundiza mucho en Linguística de tal forma que nuestra ilustración es sin duda muy vaga;

pero lo importante es recalcar en la distinción que hay que hacer entre los objetos que se nombran -y lo que se dice de ellos- por un lado, y los objetos -o mejor los sistemas- que sirven para nombrar. Una rama de la Linguística, llamada **Sintaxis**, se ocupa de estudiar la estructuración del Significante como sistema, sin tener en cuenta los significados. En otras palabras, como las palabras o los objetos que nos sirven para referirnos a los objetos del mundo tienen sus leyes de composición -que no dependen de lo que se quiera decir o enunciar-, la sintaxis se ocupa del estudio de dichas leyes.

En matemáticas el estudio del lenguaje matemático se hizo necesario a partir de la Crisis de los Fundamentos. Se trataba de estudiar las bases para que una teoría estuviera bien hecha (fuera válida), y como las teorías se presentan utilizando un lenguaje -es él al fín y al cabo lo que percibimos de la teoría- , fué necesario investigar sobre el lenguaje matemático. La **Sintaxis Lógica**, que será la sintaxis del lenguaje matemático, nos indicará como se deben formar los signos para que se diga algo -se enuncie una proposición- , sin importar lo que significa ese algo. Entonces los objetos de la sintaxis lógica son signos sin contenido, que tienen una forma de escribirse y su correspondiente lectura, pero no significa algo en particular.

Una vez determinada la sintaxis -escogiendo ciertos signos y diciendo cómo se relacionan- podemos aplicarlos a diferentes objetos y hacer teorías sobre ellos con nuestro lenguaje. Una interpretación de un lenguaje comprende un conjunto de objetos de los cuales vamos a hablar y una función que, a grosso modo, a cada texto realizable le asocia un sentido referente a los objetos. Esta función de interpretación es la que relaciona el Plano del Significante con el Plano del Significado, en otras palabras ella da las reglas que"forman en esencia, la que corrientemente se denomina lenguaje" [1]. La función que en matemáticas llamamos de interpretación se rige por las reglas de la semántica, rama de la linguística que se ocupa de establecer la relación entre el Plano del Significante y el Plano del Significado.

En cuanto a la sintaxis y a la semántica el papel que juega la matemática está al mismo nivel que el de cualquier lengua: asocia sistemas de signos con relaciones y/o conceptos de objetos. El aspecto propiamente lógico se encuentra cuando de una proposición, correctamente enunciada según las reglas de la sintaxis, se puede deducir otra, independientemente del sentido que se les esté dando; en otras palabras, en la deducción formal aparece separado el Plano del Significante del Plano del significado. Cuando se tiene un conjunto de proposiciones de un lenguaje decimos que una interpretación del lenguaje es un modelo para dicho conjunto de proposiciones, si cada una de estas proposiciones es cierta según la interpretación. Una teoría es un conjunto de proposiciones, las cuales se pueden deducir unas de otras partiendo de unas llamadas axiomas de la teoría, entonces un modelo de alguna teoría será un modelo para las proposiciones de dicha teoría.

El principio fundamental para la aplicabilidad de la matemática es considerar que cualquier modelo para los axiomas de la teoría es también un modelo para todas las proposiciones de la teoría, proposiciones que son, precisamente, deducidas de los axiomas independientemente del modelo. No sobra decir que profundizando en este tipo de análisis, con un desarrollo supremamente minucioso, es como Godel logra su famoso y espectacular resultado "Sobre proposiciones formalmente indecidibles de Principia Matemática y sistemas análogos" en 1931 [2].

Quizás el tipo de lenguaje más sencillo por el cual se puede empezar es el calificado de primer orden, que generalmente se presenta acompañado de un ejemplo cuyo modelo son los números naturales [3]. En estas notas intento presentar el concepto general de lenguaje de los parentescos. Se expone en varias partes: la parte sintáctica, que nos indica cuáles son los signos que se utili zarán y cómo se deben relacionar entre sí. La parte semántica, en donde muestro que, además de servir este lenguaje para referirnos a los parentescos entre personas, nos puede servir para hablar de objetos tales como los números naturales o los cuadros de un tablero de ajedréz. En la tercera parte, se da un bosquejo de cómo construír teorías que utilicen el lenguaje expuesto. Dejo para lo último un resúmen y unas notas a manera de conclusiones.

Estudiar el lenguaje de los parentescos tiene sentido en este momento histórico. Se comenta sobre la necesidad de presentar al alumno estructuras matematizables que encuentre en la vida cotidiana [4], he aquí una. Ya que todos los matemáticos están de acuerdo en que la matemática no sólo trata de cantidades, la iniciación en la lógica y en los fundamentos con este tipo de ejemplos podría acercar al alumno a comprender la amplitud del ente matemático. La justificación que se presenta es primero que todo, pedagógica, y es que la investigación orientada por objetivos didácticos es una salida ante el abismo que existe entre el matemático educador y el matemático investigador en nuestros tiempos, especialmente en los países llamados del Tercer Mundo, en donde el matemático investigador prácticamente no existe. Por otra parte la discusión sobre aspectos de lógica y fundamentos de matemáticas es muy importante por cuanto la profundización en estos aspectos implica la constitución de un marco teórico que sirva para discutir hacia donde se debe dirigir la enseñanza de la matemática en nuestro medio.

I - Sintaxis.

Un lenguaje es una colección de objetos que llamaremos Símbolos entes eminentemente sintácticos, que son repartidos en cinco grupos: los lógicos, las constantes, las variables, los símbolos funcionales y los símbolos predicativos. Los símbolos lógicos son siempre los mismos, se utilizan en todos los lenguajes, mientras que los demás, son específicos de cada lenguaje. Los símbolos predicativos y los funcionales pueden ser de uno o de varios argumentos. Por ahora, esto solo es una forma de clasificarlos.

De la misma manera que cuando nos encontramos ante la Geometría tenemos gran número de proposiciones pero todas ellas se derivan de una cantidad mínima de axiomas, así como en el lenguaje de una teoría utilizamos sin duda infinidad de símbolos pero conviene reducirlos a un mínimo que serán los únicos que utilizaremos, salvo algunos que reemplacen como abreviatura, a combinaciones de los primitivos. Por otro lado, es importante hacer notar que estos símbolos serán entendidos tanto como unidades sono ras, como unidades gráficas, de ahí que cada grafo tenga su lectura.

El lenguaje de los parentescos $\mathcal{L}$ consta de los símbolos lógicos, que se pueden reducir a los siguientes:

( ) Los paréntesis

$\neg$ La negación

$\rightarrow$ La implicación

tiene solo una constante:

J Que se leerá "Juan"

como símbolos funcionales actuarán:

m( ) Que se leerá "La madre de..."

y

p( ) Que se leerá "El padre de..."

ambos símbolos funcionales m( ) y p( ) son de un solo argumento, hay también un símbolo predicativo de un solo argumento.

( )V Que se lee "es varón"

y un símbolo predicativo de dos argumento, el símbolo de la igualdad:

(,)I Que se lee "y son iguales"

Los paréntesis de los símbolos predicativos y funcionales se pueden ampliar según lo que se quiera introducir en ellos como veremos más adelante. Las variables que utilizará el lenguaje de los parentescos serán las letras

$$x, y, z, u, v, w$$

que se leerán de manera corriente. En algunos casos será necesario utilizar más variables; cuando así sea utilizaremos estas letras subindizadas.

Las constantes son los únicos signos que se refieren a objetos determinados; las variables se comportan como constantes, pero no representan a un objeto determinado, sino más bien algo indeterminado, no especificado. En español el papel de las variables lo juegan, de una forma no exactamente igual que en el lenguaje matemático, palabras como alguien, alguno, etc. Sobre el papel que juegan las variables, las constantes y los diferentes símbolos se aclarará más adelante cuando refiramos a la semántica. Las variables $\mathcal{L}$ se llaman individuales porque ellas se refieren a elementos indeterminados pero individuales, nunca a conjuntos, ni funciones, por esta razón diremos que $\mathcal{L}$ es un lenguaje de primer orden; sería de segundo orden si introdujeramos, por ejemplo variables que representen conjuntos indeterminados.

Cualquier sucesión de símbolos del lenguaje es llamado expresión: Así en $\mathcal{L}$ serán expresiones:

$$\neg\,((\ )\ (\Rightarrow J$$

$$\rightarrow (\ )\ Jm\ (\ )\ (((\ p\ m$$

De las expresiones escogeremos las que nos interesan. Primero escogeremos las expresiones que llamaremos términos; ellas nos servirán para mencionar objetos. Son escogidos los términos mediante las siguientes reglas:

1) Todas las variables y constantes son términos.
2) Supongamos que "t" es un término y "f( )" es un símbolo funcional de un solo argumento, entonces "f(t)" es un término. En general, si $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son términos y $f(, \ldots ,)$ es un símbolo funcional de n argumentos, entonces $f(t_1, \ldots, t_n)$ es un término.
3) Estas son las dos únicas formas de hacer términos.

Veamos ahora cómo podemos formar expresiones que sean términos de $\mathcal{L}$. Como "Juan" es término -por la regla 1- entonces por la regla 2 será también término:

p(J) "El padre de Juan"

y aplicando otra vez la regla 2, obtenemos otros términos:

p(p(J)) "El padre del padre de Juan"

m(p(J)) "La madre del padre de Juan"

Por la regla 3 podemos saber que la expresión:

$\Rightarrow$ (J(

no es término.

Vale la pena hacer notar que a esta altura ya podemos reemplazar combinaciones de símbolos por nuevos símbolos; por ejemplo, se puede introducir el símbolo a_m que se utilizará así: si t es un término, la expresión $p(m(t))$ se reemplazará por la expresión $a_m(t)$ que será leída el abuelo materno de t. Podemos observar que los términos no nos sirven sino para nombrar objetos; para hablar de las relaciones que existen entre los objetos, utilizaremos lo que llamaremos fórmulas bien formadas?, abreviadamente f.b.f., pero antes tenemos que ver qué es una fórmula atómica.

Una fórmula atómica será una expresión del tipo $(t_1, t_2, \ldots, t_n)P$ donde P es un símbolo predicativo de n argumentos y $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son n términos cualesquiera. Así en $\mathcal{L}$ como la expresión

$m(p(x))$ "La madre del padre de x"

es un término, y es un símbolo predicativo de un solo argumento, entonces la expresión:

$(m(p(x)))V$ "La madre del padre de x es varón."

es una fórmula atómica de $\mathcal{L}$. Así mismo, como sabemos que x y $m(p(J))$ son términos y que I es un predicativo de 2 argumentos entonces la expresión:

$(m(p(J)),x)I$ "La madre del padre de Juan es x" ó "La madre del padre de Juan y x son los mismos."

es una fórmula atómica de L.

Las fórmulas atómicas nos sirven ya para decir cosas de los objetos y de las variables, pero ellas no nos indican todo lo que podemos decir sino que lo generan cuando introducimos los concectivos lógicos. Todo lo que podemos decir de las variables y de los objetivos que representan las constantes será expresado por medio de las f.b.f. que se construyen según las siguientes reglas:

1) Toda fórmula atómica es una f.b.f. .

2) Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son f.b., entonces también $(\neg \mathcal{A})$ y $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ son f.b.f..

3) Solo son f.b.f. las expresiones que se formen por las dos reglas anteriores.

Por la regla 1) tenemos que la expresión

$(\neg (J)\ V)$ "Juan no es un varón" (1)

es una f.b.f. que nos servirá para decir algo de aquel objeto que llamamos Juan . Aquí también podemos introducir nuevos símbolos que reemplacen los originales, por ejemplo la expresión (1) se podría reemplazar por

(J)M "Juan es una mujer"

que no tiene sino ventajas taquigráficas, ya que no nos ayuda a decir más cosas. Así mismo podríamos introducir los otros dos signos del algebra proposicional.

$\wedge, \vee, \Leftrightarrow$

ya que como se sabe, estos son combinaciones de la negación y de la implicación.

Para darnos la idea de las f.b.f. que se pueden formar, presentamos dos ejemplos:

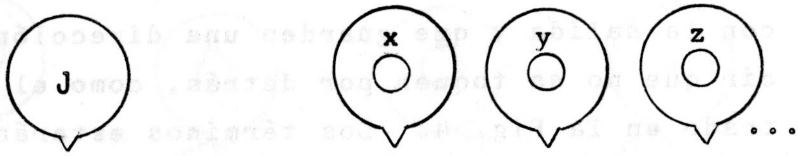
$((m(J))M \Rightarrow ((p(x))V \wedge (J)M))$

"Si la madre de Juan es mujer entonces el padre de x es varón y Juan es mujer."

$((p(m(m(z))))V \wedge (p(x)), m(y))I)$

"El padre de la madre de la madre de z es un varón y el padre de x es la madre de y."

La formación de términos, fórmulas atómicas, f.b.f. y posteriormente de proposiciones, se hace de una manera completamente mecánica, de aquí su independencia con lo que se quiere enunciar. Para que esta idea quede más clara, vamos a imaginar a cada símbolo de nuestro lenguaje como una ficha con ciertas especificaciones según el tipo de signo que sea. Así, las variables y las constantes se representarán con el mismo tipo de fichas pero las variables tendrán un espacio central como se muestra en la Fig. 1.



ficha para la constante "Juan" — fichas para las variables.

Fig. 1

Las fichas de los símbolos funcionales serán parecidas a las de las constantes, pero además de tener una salida triangular tienen una o varias entradas también triangulares según el número de argumentos delsímbolo funcional (Fig. 2a). Las fichas de los símbolos predicativos tienen entradas triangulares (tantas como argumentos tenga el símbolo predicativo) pero tienen una salida rectangular (Fig. 2b).

a. b.

Fichas para los símbolos predicativos y funcionales.

Fig. 2

Los símbolos lógicos serán representados por fichas con entradas rectangulares y una salida rectangular (Fig. 3). Las diferentes fichas se pueden encajonar siempre que correspondan la entrada con la salida y que guarden una dirección, es decir que no se toquen por detrás, como el caso mostrado en la Fig. 4. Los términos estarán representados por encajamiento de fichas con salida triangular únicamente, encajamientos que no dejan ninguna entrada libre y solo queda una salida. En la Fig. 5 se muestran encajonamientos que representarán las f.b.f. se formarán con fichas de cualquier tipo de tal manera que no quede ninguna entrada libre y solo una salida rectangular, se muestran ejemplos en la Fig. 6.

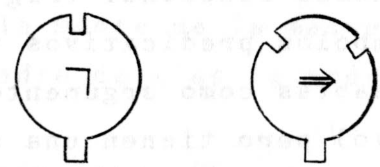
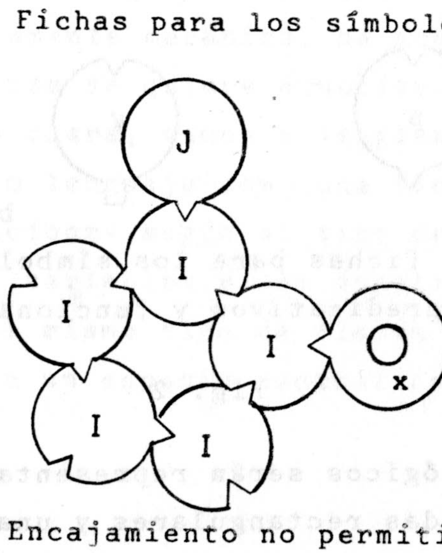
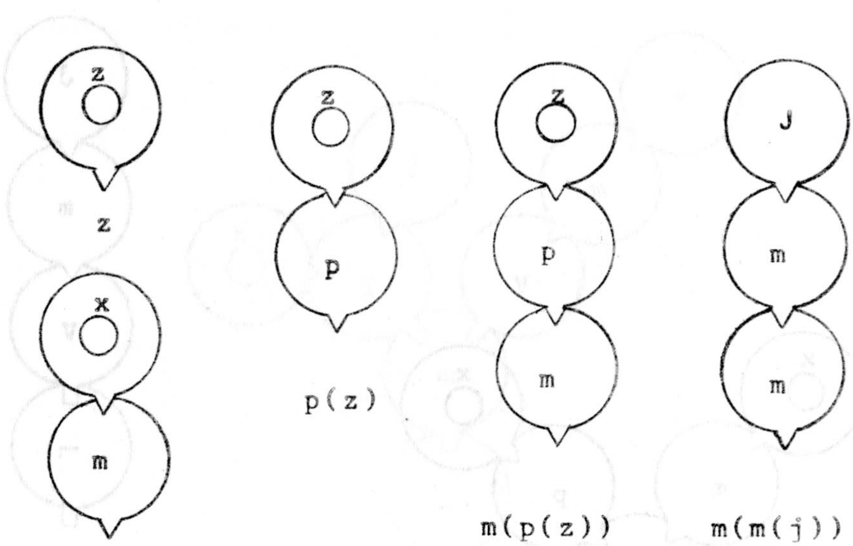


Fig. 3 Fichas para los símbolos lógicos.



Encajamiento no permitido.

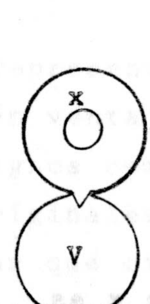
Fig. 4



m(x) p(z) m(p(z)) m(m(j))

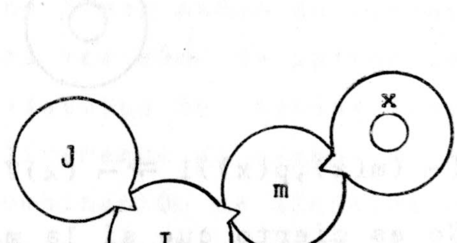
Encajamientos que representan diferentes términos.

Fig. 5



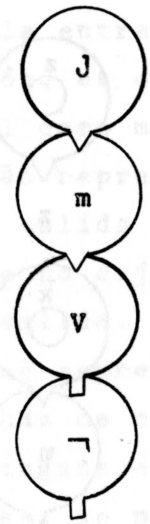
1. (x)V

"x es varón"



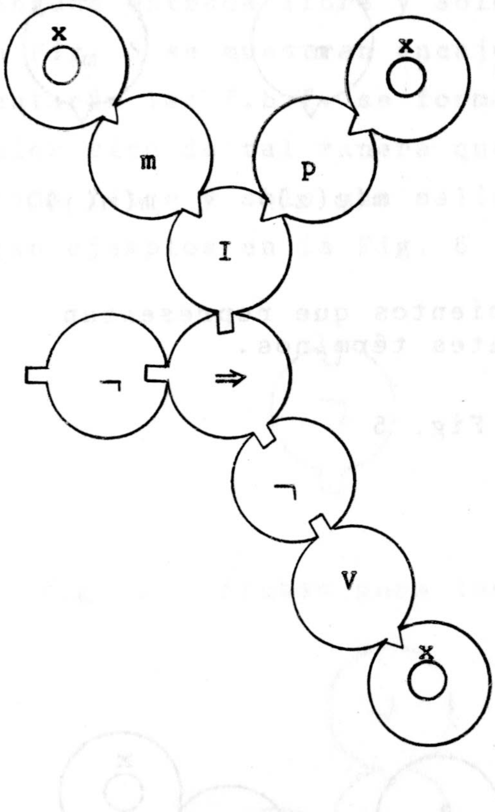
2. (J,m(x))I

"Juan es la madre de x ."



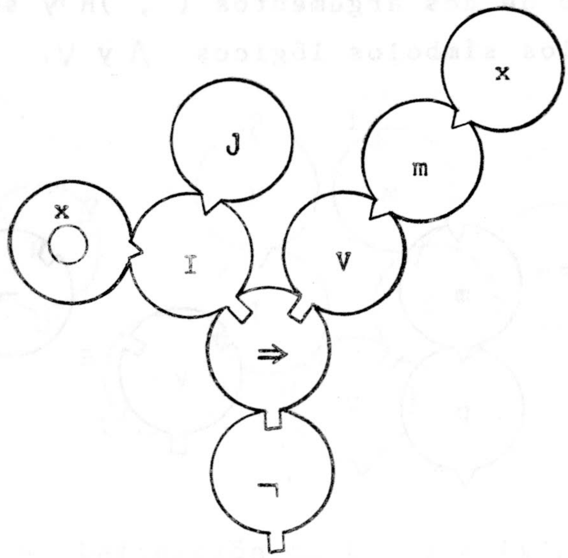
3. $(\neg(m(J))V)$

"La madre de Juan no es varón."



4. $(\neg\ (m(x),p(x))I \Rightarrow \neg\ (x)V))$

" No es cierto que si la madre de x es el padre de x entonces x no es varón."



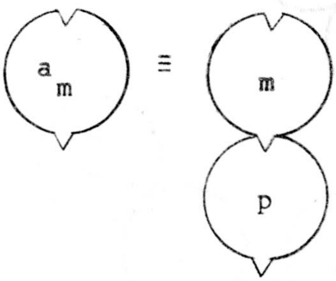
5. $(\neg\ (x,J)I \Rightarrow (m(x))V)$

" Es falso que si x es Juan, entonces la madre de x es varón."

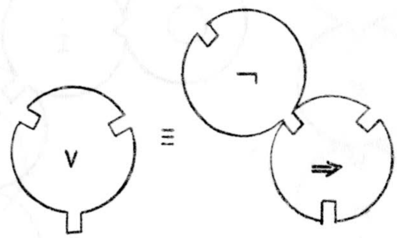
Encajonamientos que representan f.b.f. .

Fig. 6 (1.2.3.4.5.)

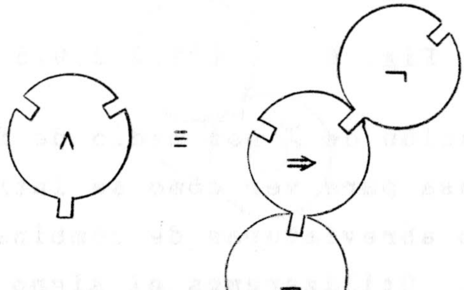
Esta representación de $\mathcal{L}$ por medio de fichas es también ventajosa para ver cómo se introducen nuevos signos como abreviaturas de combinaciones de los originales. Utilizaremos el signo $\equiv$ para indicar que cierta combinación de símbolos será reemplazada por un nuevo signo, esta forma de introducir nuevos signos es lo que tradicionalmente se llama **Definición**. En la figura 7 introducimos la definición del símbolo funcional de un solo argumento $a_m($ $)$"**el abuelo materno de..**"del símbolo predicativo de dos argumentos (,)H "y son hermanos" y de los símbolos lógicos $\wedge$ y $\vee$.



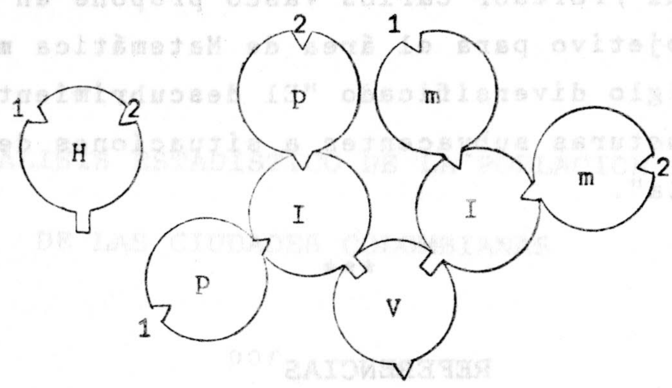
1. Definición de a_m( )



2. Definición de ∨



3. Definición de ∧



4. Definición de (,) H (x)

Definición de nuevos símbolos en términos de fichas.

Fig. 7 (1.2.3.4.)

(x) Los números de las entradas nos indican cómo deben ir repartidos los términos para que pueda ser utilizado el nuevo símbolo.

***

Notas.

Se puede ver una idea de este famoso resultado y de su demostración en [2].

En [3] se encuentran teorías de primer orden para los números naturales y el cálculo proposicional.

El Profesor Carlos Vasco propone en [4] , como objetivo para el área de Matemática moderna en el siglo diversificado "El descubrimiento de las estructuras subyacentes a situaciones de la vida diaria".

***

REFERENCIAS

[1] Gladkij, A.V., Mel'Cuk I.A., Introducción a la linguística matemática, Planeta Barcelona, 1972 p. 37.

[2] James R. Newman. Ed. The world of Mathematics, Vol.4. Simon and Schuster, New York.1956.

[3] Mendelson, E. Introduction to the Matematical Logic, Von Nostrand, N.York 1968.

[4] Vasco, Carlos. "Lógica, conjuntos y Estructuras", Notas de Matemáticas, U.Nal. Nº 4, 1975.