Boletín de Matemáticas
Vol. XII (1978) págs. 75 - 118

ANALISIS ESTADISTICO DE LA POBLACION DE LAS CIUDADES COLOMBIANAS

por

Gabriel Poveda

1. En 1923, en un estudio sobre la población de las ciudades de Austria, su país natal, el sociólogo y geógrafo Friedrich Auerbach hizo notar una cierta regularidad en la forma como varían de una ciudad a otra el tamaño de su población. Esa regularidad consiste en que si se disponen las ciudades del territorio considerado, en orden descendente de acuerdo con el número de sus habitantes, de manera que la primera de la lista sea la más populosa, se observa que las cifras de sus poblaciones van disminuyendo de acuerdo con cierta ley de recurrencia de una a otra.

En particular: si en una cuadrícula doble-logarítmica ponemos en abscisas el número ordinal que corresponde a cada ciudad en el listado de poblacio nes descendentes, y ponemos en ordenadas el número de sus habitantes, se obtiene una colección de puntos (uno para cada ciudad), que se disponen muy aproximadamente cercanos a una recta en el diagrama. Además Auerbach anotó que la pendiente de esa recta es muy cercana a -1 (menos uno).

Esta relación fué corroborada empíricamente no solo por Auerbach para las ciudades de Austria, sino también por Gibrat, Lotka, Singer y otros con relación a otros sistemas de poblaciones, en trabajos aparecidos entre 1913 y 1936. El demógrafo G.K. Sipf estudió la validez de esta correlación (que él llamó de "rango-tamaño") para las ciudades de Estados Unidos desde 1790, cada 10 años, hasta 1930 encontrando un ajuste bastante aceptable. Para 1950 fué satisfactoriamente verificada en ese país por Rutledge Vining.

A la observación descrita se le conoce hoy en Geografía con el nombre de **Ley de Auerbach** y se le menciona en trabajos sobre esa materia, sobre Economía Urbana y sobre Planeación Regional. Sin embargo, hasta ahora sigue siendo una mera observación empírica sin que se le haya dado una fundamentación teórica. Algunos teóricos le hacen observaciones conceptuales de fondo pero sigue siendo un instrumento bastante utilizado por demografistas y geógrafos.

En este trabajo se pretenden dos fines: a) comprobar si esta ley se cumple para Colombia según los últimos censos, y b) intentar una justificación teórica de la misma, desde el punto de vista de los Procesos Estocásticos.

2. En otras palabras, lo que expresa la ley de Auerbach es que, para un territorio determinado, y en un momento dado de su historia, al ordenar las ciudades en orden descendente de tamaño poblacional, la ciudad C_n que ocupa el n-ésimo lugar de la lista tiene una población p(n) que puede expresarse en la forma

$$p(n) = A\, n^{-c} + \varepsilon, \quad \text{con} \quad n=1,2,3,\ldots,N \quad (*)$$

A y c: Parámetros numéricos propios de la distribución de tamaños en un momento dado.

ε: Variable aleatoria cuyos valores numéricos tienen un orden de magnitud pequeño respecto a p(n).

N: Número de las ciudades mayores del territorio que se han censado en su población.

Además, observando el caso de Colombia, puede señalarse que los dos parámetros A, c, varían con el transcurso del tiempo, especialmente el primero. En realidad, las variaciones del segundo son mas bien leves e irregulares en el tiempo.

3. Para comprobar si en Colombia se cumple esta re

lación, se han recogido los datos del número de habitantes urbanos de las 100 mayores ciudades y poblaciones del país, tal como los informan los censos de 1938, 1951, 1964 y 1973. En cada una de esas fechas, los datos correspondientes se han dispuesto ordenadamente de mayor a menor y en esa forma se incluyen en el Anexo Nº 1.

A simple título ilustrativo citamos el caso de las 5 mayores poblaciones en cada fecha, y de la centésima (la menor de la muestra), en las cuatro fechas censales referidas.

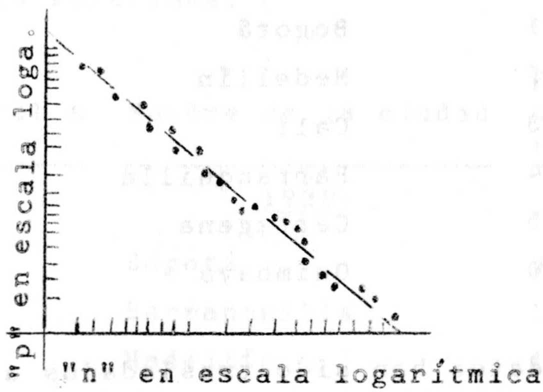
Número ordinal n	Nombre de la ciudad	Población urbana p(n) (Habitantes)
	1938	
1	Bogotá	325.685
2	Barranquilla	150.395
3	Medellín	143.952
4	Cali	88.366
5	Cartagena	72.767
100	Sahagún	4.308
	1951	
1	Bogotá	638.562
2	Medellín	328.294
3	Barranquilla	276.199
4	Cali	241.357
5	Cartagena	111.297
100	Villanueva	5.830

Número ordinal n	Nombre de la ciudad	Población urbana p(n) (Habitantes)
	1964	
1	Bogotá	1.661.935
2	Medellín	771.865
3	Cali	618.215
4	Barranquilla	493.034
5	Cartagena	217.910
100	San Jacinto	10.210
	1973	
1	Bogotá	2.696.270
2	Medellín	1.070.924
3	Cali	898.253
4	Barranquilla	661.009
5	Cartagena	292.512
100	Quimbaya	13.996

Los 400 datos han sido trasladados al gráfico anexo. Allí se aprecia, a primera vista, que efectivamente, con cierta aproximación, en cada censo los puntos se colocan en las proximidades de una línea recta. De un censo al posterior el nivel de la recta se vá elevando y además su pendiente (negativa) se va acentuando. Eso quiere decir que no solo vá aumentando, en general, el tamaño de las poblaciones, sino que las más grandes lo hacen más rápidamente. Además, se aprecia que las 4 ciudades mayores son las mismas en los cuatro censos, salvo uno u otro cambio en su orden relativo: Bogo tá, Medellín, Cali y Barranquilla.

LA LEY DE AUERBACH Y LA DISTRIBUCION DE PARETO.

4. Lo primero que conviene establecer es que la ley de Auerbach supone una distribución de Pareto. Más exactamente, que una muestra muy numerosa de ciudades puede considerarse como una muestra completa y bien representativa de un "universo hipotético" o "universo subyacente" de ciudades, cuyas poblaciones están distribuídas según una distribución de Pareto truncada.



En efecto. Sean:

n : Número ordinal de la ciudad C_n en el orden de tamaño decreciente, dentro de la muestra.

x(n) : Población de C_n, ajustada o estimada por la ley de Auerbach, es decir sobre la recta en el diagrama adjunto.

N : Número de ciudades en la muestra, o sea, la extensión de la muestra. En nuestro caso estamos tomando N = 100, lo cual, para efectos estadísticos puede considerarse como una "muestra grande".

X : Variable aleatoria continua de la "población" en el "universo virtual" o "universo hipotético", subyacente o implícito, representado por la muestra U.

F(x): Función de distribución acumulativa de X, o sea, la probabilidad de que eligiendo una "ciudad" al azar en el universo U, se encuentra que su población es $X \leqslant x$, siendo $x \in [a, A]$;

a : El mínimo valor posible para X en el "universo" U;

A : El máximo valor posible para X en U.

La ley de Auerbach establece que

$$x = A\, n^{-c} = A\, n^{-1/k} \qquad (k = 1/c)$$

Además, por la ley de los grandes números, con probabilidad muy cercana a la unidad, podemos afirmar lo siguiente: El número de ciudades en una muestra grande con $X \leqslant x$ es $N.\, F(x)$. Por lo tanto:

a. Número de ciudades en la muestra con

$$X > x : N.\left[1 - F(x)\right] .$$

b. Número de ciudades en la muestra con

$$X \geqslant x : N.\left[1 - F(x)\right] + 1 .$$

Pero, por definición, el número de ciudades en la muestra tales que $X \geqslant x$, es precisamente n.

Por lo tanto:

$$x = A \{[1 - F(x)] N + 1\}^{-1/k}$$

de donde

$$F(x) = 1 + 1/N - (A/x)^k/N \qquad (0.1)$$

En la expresión anterior se comprueba de inmediato que

$$F(A) = 1 .$$

Por otra parte, se debe tener, evidentemente

$$F(a) = 0$$

$$1 + 1/N - (A/a)^k N = 0$$

de donde

$$A = a \sqrt[k]{N+1} \qquad (0.2)$$

En rigor, la variable X, por su definición, solo puede asumir valores enteros. Pero debido a que éstos son números del orden de 10^4 a 10^6 en el tema que nos ocupa, es aceptable tratar a X como una variable continua en U. Ahora bien, al recorrer x el intervalo $[a, A]$, la función (0.1) es continua y derivable, de modo que admite una función de densidad para X en U, función que calculamos derivando F(x).

$$f(x) = k\, A^k\, x^{-k-1}/N = \frac{k\, a^k (N+1)}{N}\, x^{-k-1}, \qquad (0.3)$$

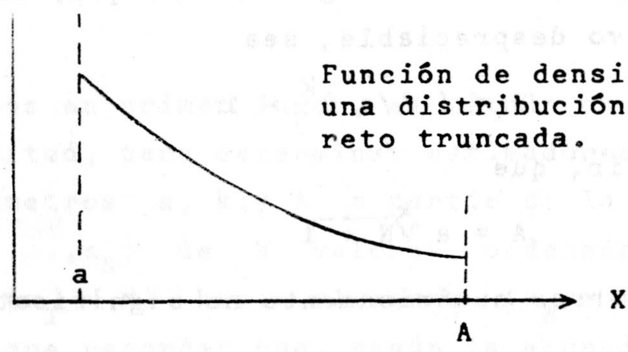
$$(a \leqslant x \leqslant A)$$

que reconocemos de inmediato como la función de densidad de una distribución de Pareto truncada. La función (0.3) es una función de densidad porque su integral definida en todo su dominio es igual a 1 :

$$\int_a^A \frac{KA^k}{N} x^{-k-1} dx = \frac{KA^k}{N}\left[\frac{x^{-k}}{k}\right]_A^a = \frac{A^k a^{-k} - 1}{N} = \frac{(N+1)-1}{N} = 1$$

teniendo en cuenta la identidad (0.2).

5. Recíprocamente, debemos observar que si se tiene un universo U en el cual hay una variable X que obedece a una distribución de Pareto de cola larga; y si extraemos una muestra numerosa, en forma simple y aleatoria, la muestra presenta con probabilidad cercana a uno la ley de Auerbach.



Función de densidad de una distribución de Pareto truncada.

En efecto sea

$$f(x) = \begin{cases} C\,x^{-k-1} & ;\ x \in [a,\ A] \\ 0 & ;\ x \notin [a,\ A] \end{cases} \qquad (0.4)$$

con $k > 0$, la función de densidad de la distribución de Pareto, truncada en A por la derecha, y acotada en a por la izquierda, siendo, ademas,

$A >> a$. La constante C debe satisfacer la condición

$$\int_a^A f(x)\, dx = 1$$

de la cual se deduce

$$C = \frac{k}{a^{-k} - A^{-k}}$$

La función de distribución acumulada es

$$F(x) = \int_a^x f(u)\,du = \frac{k}{a^{-k} - A^{-k}} \int_a^x x^{-k-1}\, dx =$$

$$= \frac{a^{-k} - x^{-k}}{a^{-k} - A^{-k}} \qquad (0.5)$$

Siendo $A >> a$, podemos escoger una muestra numerosa, de extensión N grande tal que, salvo error relativo despreciable, sea

$$N = (A/a)^k - 1 \qquad (0.6)$$

es decir, que

$$A = a\sqrt[k]{N + 1}$$

salvo error numéricamente no significativo.

Multiplicando numerador y denominador de (0.5) por A^k, y sustituyendo su valor según (0.6), se obtiene

$$F(x) = \frac{A^k a^{-k}}{A^k a^{-k} - 1} - \frac{A^k x^{-k}}{A^k a^{-k} - 1} = \frac{N + 1}{N} - \frac{(A/x)^k}{N}$$

$$F(x) = 1 + \frac{1}{N} - \frac{(A/x)^k}{N} \qquad (0.7)$$

que, según se vió en (0.1), es la función de distribución acumulativa para una muestra grande que exhibe la ley de Auerbach, como se aseveró antes.

Estimadores máximo-verosímiles para la Ley de Auerbach - Pareto.

6. Para estimar los parámetros de la función de densidad

$$f(x) = \frac{k}{a^{-k} - A^{-k}} x^{-k-1}, \qquad x \in [a, A]$$

a partir de una muestra numerosa de N elementos (que en nuestro caso son ciudades), pueden usarse varios métodos, en principio : mínimos cuadrados, mini-max, momentos equivalentes, máxima verosimilitud, etc.

Consideraremos en primer lugar, el método de máxima verosimilitud, para determinar estimadores de los parámetros a, k, y A a partir de la muestra $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ de N valores, ordenados desde el mayor $(x_1 = M)$ hasta el menor $(x_N = m)$. Al efecto, hay que recordar que, según la ecuación (0.2), los parámetros a, A, k, no son independientes, sino que están ligados por la ecuación

$$A^k = a^k (N + 1).$$

La función de verosimilitud es

$$L = \prod_{i=1}^{N} f(x_1)$$

y su logaritmo es

$$\log_e L = \sum_{i=1}^{N} \log_e f(x_i) = U$$

$$U(a,k) = N \cdot k \cdot \log_e a + N \cdot \log_e (N+1) + N \cdot \log_e k -$$

$$- (k+1) \sum \log_e x_i - N \cdot \log_e N$$

Con respecto al parámetro a:

$$\max_a U \Leftrightarrow \max_a \cdot \log_e a \Leftrightarrow \max a = x_N$$

puesto que $a \leqslant x_N$.

Por otra parte:

$$\max U \Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial k} = 0 \Leftrightarrow N \cdot \log_e a + \frac{N}{k} - \sum \log_e x_i = 0$$

de donde se deduce, substituyendo a por x_N, y despejando k:

$$k = \frac{N}{\sum \log_e x_i - N \log_e x_N}$$

Este es el estimador máximo-verosímil para k, y en el caso de los censos colombianos, que estamos tratando, tenemos $N = 100$, $x_N = x_{100}$.

Haciendo el cómputo numérico correspondiente encontramos los siguientes valores:

Año	Población más pequeña (x_{100})	k
1938	4.308	1.26427119
1951	5.830	1.530278791
1964	10.220	0.9624322113
1973	13.996	0.868048622

7. También se puede estimar los parámetros de la distribución empírica de tamaños de las ciudades, recurriendo al método de mínimos cuadrados. Con este fin, podemos escribir la ecuación (*) del numeral 2 en la forma

$$\log p = \log A - c \log n + \log \varepsilon$$

y tratamos de hacer mínima respecto a A, c, la sumación

$$S \equiv \sum_{i=1}^{N} (\log p - \log A + c \log n)^2$$

Derivando parcialmente a log A y respecto a c, se forman las ecuaciones

$$\Sigma \log p = N . \log A - c \, \Sigma \log n$$

$$\Sigma \log p . \log n = \log A \, \Sigma \log n - c \, \Sigma \log^2 n$$

De aquí se deduce

$$\log A = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma \log p & - \Sigma \log n \\ \Sigma \log p . \log n & - \Sigma \log^2 n \end{vmatrix}}{D}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} N & \Sigma \log n \\ \Sigma \log n & \Sigma \log^2 n \end{vmatrix}}{D}$$

en donde el denominador D es el determinante

$$D = \begin{vmatrix} N & - \Sigma \log n \\ \log n & - \Sigma \log p. \log n \end{vmatrix}$$

Realizando estas operaciones para los cuatros censos obtenemos:

Año	A	c	k = 1/c
1938	265191	0.915407032	1.092410223
1951	684261	1.05071251	0.9517351231
1964	1050712	1.13404563	0.881798733
1973	2306930	1.115630306	0.896354285

8. Daremos ahora una explicación a la evolución estadística de la distribución de tamaños interpretándola como un proceso estocástico monotónico y estacionario.

Sea U un colectivo o universo "virtual" o "subyacente" de ciudades, del cual consideramos que las ciudades colombianas constituyen una muestra simple y representativa; y llamaremos X a la variable (aleatoria) definida por la población de cada ciudad, que consideraremos continua.

Designamos con f(x,t) la función de densidad de

X en el universo U, en la fecha t. Es decir, que tomando al azar una ciudad de U en fecha t, la probabilidad de que su población esté comprendida en el intervalo $(x, x + dx)$, vale $f(x,t)dx$. Decimos que X está en estado x.

A medida que transcurre el tiempo, cada ciudad aumenta su población, pero a un ritmo que difiere de una u otra, según el tamaño que hayan alcanzado y según el momento que se considere. Consideramos estos cambios de población como transiciones de un estado a otro, o sea de un nivel a otro de la variable X. La función de transición de X en fecha t es $\phi(x,t)$, es decir, que la probabilidad de que una ciudad de población x en fecha t, pase a $x + dx$ durante dt, vale $\phi(x,t)dt$.

Según esta nomenclatura, la probabilidad de que para una ciudad elegida al azar, la variable X esté en el estado $x + dx$ en $t + dt$, es $f(x + dx, t + dt)\, d(x + dx)$. En la fecha anterior, t, X podría haberse encontrado, bien en el estado x, con probabilidad $f(x, t)dx$, o bien en el estado $x + dx$, con probabilidad $f(x + dx, t)$. Además, la probabilidad de transición de X del estado x al estado $x + dx$ durante dt es $\phi(x,t)dt$, y la probabilidad de transición del estado $x + dx$ al mismo estado $x + dx$ durante dt, es $1 - \phi(x+dx, t)dt$. Entonces, por consideraciones probabilísticas conocidas, podemos escribir

$$f(x+dx,t+dt)d(x+dx) = f(x+dx)d(x+dx)\left[1-\phi(x+dx)dt\right]+$$
$$+ f(x,t)dx.\phi(x,t)dt$$

y pasando los diferenciales al límite, se obtiene

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x,t).\ \phi(x,t)\right] = 0 \qquad (0.9)$$

Esta ecuación en derivadas parciales es una forma particular de la llamada Ecuación de Focker-Planck, para el caso específico de un proceso estocástico unilateral o monotónico. Puede también escribirse

$$\frac{\partial f}{\partial x} + f\ \frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi\ \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \qquad (10)$$

Si el régimen de transiciones depende solo del estado x pero nó del tiempo t, el proceso es estacionario por definición. En tal caso

$$\partial\phi/\partial t = 0 \quad \text{y} \quad \phi = \phi(x).$$

9. Por otro lado: si una variable X, en un colectivo U que evoluciona estadísticamente, según un régimen estacionario, presenta una distribución de Pareto (truncada o nó), la función de probabilidad de transición $\phi(x)$ debe tener una forma definida que vamos a investigar.

En efecto, sea

$$f(x,t) = C\,x^{-k-1}\ ;\ k > 0, \qquad (11)$$
$$a \leqslant x \leqslant A, \qquad C = k/(a^{-k} - A^{-k}),$$

la función de densidad de X, siendo k independiente de t. Sustituyendola en la ecuación (10) se obtiene

$$\frac{\partial C}{\partial t} + C\,\frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi C(k+1)\,x^{-1}$$

y separando las variables

$$\frac{\partial C/\partial t}{C} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + (k+1)\,\phi/x \qquad (12)$$

en donde el lado izquierdo depende solo de t y el lado derecho depende solo de x (1). Llamemos m la constante de separación (valor común de ambos lados de la ecuación (12)):

$$dC/dt = m\,.\,C$$

cuya integración dá

$$C(t) = C_o\,e^{mt}\,,\ \text{siendo}\ \ C_o = C(0) \qquad (13)$$

El lado derecho de la ecuación (12) nos dá

$$\frac{d\phi}{dx} - \frac{k+1}{x}\,\phi = -m$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden que se integra usando la fórmula

$$\phi = e^{+\int(k+1)dx/x}\left[-\int m\,e^{-\int(k+1)dx/x}\,dx + K\right]$$

---

(1) Ya antes justificamos el supuesto de que, en nuestro caso, k no depende de t sensiblemente.

en donde los integrales son integrales indefinidos y K es una constante arbitraria. Pero

$$e^{\int(k+1)dx/x} = e^{(k+1)\log x} = x^{k+1}$$

por lo tanto

$$\phi(x) = K\,x^{k+1} + (m/k)\,x \qquad (14)$$

siendo $\phi(x)$ una probabilidad, es necesariamente positiva. Por lo tanto, debe ser $k \geqslant 0$ y $m > 0$. Esta es la forma que debe tener la función $\phi(x)$, que se trataba de calcular explícitamente.

Sustituyendo la función (13) en la (11), tenemos que la función de densidad $f(x,t)$ es

$$f(x,t) = C_o\, e^{mt}\, x^{-k-1}$$

siendo

$$C_o = k \,/\, \left[a_o^{-k} - A_o^{-k}\right]$$

a_o : Extremo inferior del recorrido de X en la fecha t_o que se tome como origen de tiempo. En nuestro caso, se puede identificar con la población más pequeña del conjunto de ciudades que se estudia en esa fecha.

A_o : Extremo superior del recorrido de X en la fecha t_o. Se puede identificar con la población de la ciudad más grande en t_o.

k : Constante independiente de x y de t, con valor muy cercano a 1.

10. Si la distribución del universo U es siempre una distribución de Pareto de cola larga, es decir $A(t) >> a(t)$, $A_o >> a_o$, entonces se deduce que el parámetro $a(t)$ obedece una ley de crecimiento en el tiempo de tipo exponencial. En efecto, la ecuación (13) se escribe

$$\frac{k}{a(t)^{-k} - A(t)^{-k}} = \frac{k}{a_o^{-k} - A_o^{-k}} e^{mt}$$

Los valores de A son mucho mayores que los valores de a, y k es muy cercana a 1. Por eso, muy aproximadamente

$$1 / (a^{-k} - A^{-k}) \doteq a$$

luego

$$a(t) \doteq a_o \, e^{(m/k)t}, \quad \text{siendo } m/k > 0 \qquad (15)$$

En el caso de la distribución de las ciudades, lo anterior significa que representando en una cuadrícula semi-logaritmica los valores de la población de la ciudad más pequeña (o sea la centésima en el orden de tamaños) en las ordenadas, como función del tiempo en las abscisas, se debe tener una sucesión de puntos colineales. En el gráfico Nº1 (al final del artículo) se muestra el resultado de esta construcción gráfica para Colombia de 1938 a 1973, según los cuatro censos. Los cuatro puntos se acercan bien a una línea recta de la forma prevista en la ecuación (15).

La recta mínimo-cuadrática que ajusta estos cuatro puntos de $a(t)$, es

$$4337 \times 10^{bt}, \quad \text{siendo} \qquad (16)$$

$$b = 0.013596976$$

$$t = \text{número de años contados desde 1938}$$

y el coeficiente de correlación entre t y $\log a(t)$ es 0.932, lo que indica un buen ajuste de la recta. Comparando la ecuación (15) con la (16) y tratando b como un estimador de m/k, podemos deducir m, tomando a $k \doteq 1$:

$$m = b\ k \doteq 0.0136$$

que es la constante de separación.

11. Al observar y comparar las distribuciones por tamaños que dan los cuatro censos para las ciudades, por ejemplo como se vé en el Gráfico N°2, se deduce que, siendo rectas sus respectivas gráficas, eso significa que la distribución permanece siendo paretiana, a través del tiempo.

En este párrafo demostraremos que si la función de probabilidad de transición, $\phi(x)$, es proporcional a x, la distribución de tamaños es siempre paretiana. En otras palabras, que si en cada momento de su vida la tasa de crecimiento de población (nó la tasa porcentual, sino la tasa absoluta), en cada ciudad, es proporcional a la población existente, la distribución sigue siendo una distribución de Pareto, aunque en el tiempo vayan cambiando sus parámetros.

En efecto, ya se vió que las funciones de distribución, $f(x)$, y de transición, $\phi(x)$, cumplen la ecuación diferencial

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \phi(x) \frac{\partial f}{\partial x} = - f(x) \cdot \phi'(x) \qquad (17)$$

Esta es una ecuación diferencial parcial, de primer orden, que a veces se llama ecuación cuasi-lineal, y que se resuelve por un método muy conocido y atribuído a Lagrange (1).

Comparando la ecuación (17) con la identidad

$$\frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx = df$$

se deduce que

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\phi(x)} = - \frac{df}{f(x,t) \cdot \phi'(x)}$$

Esto dá lugar al par de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$dt = dx/\phi(x) \;; \quad dx/\phi(x) = - df/f(x) \cdot \phi'(x)$$

o bien

$$dx/\phi(x) - dt = 0 \;; \quad \phi'(x)dx/\phi(x) + df/f = 0$$

Por una simple integración indefinida de cada una de las dos anteriores ecuaciones, se obtiene

$$\int \frac{dx}{\phi(x)} - t = K_1 \;; \quad \phi(x)\, f(x) = K_2$$

---

(1) Ver Sneddon, Ian, Elements of Partial Differential Equations, New York, Mc Graw-Hill, 1957.

El método de Lagrange demuestra que la solución general de la ecuación (17) propuesta, es

$$H\ (K_1\ (x,t,f),\ K_2\ (x,t,f)) = 0$$

siendo H una función arbitraria; y si hay lugar a aplicar el teorema de la función implícita,

$$K_2\ (x,t,f) = G\ K_1\ (x,t,f)$$

siendo G, por lo tanto, también arbitraria. Por lo tanto, la solución buscada es

$$f(x,t) = \frac{1}{\phi(x)}\ G\ \left(\int \frac{dx}{\phi(x)} - t\right)$$

El caso a que nos estamos refiriendo, en que la probabilidad de transición es proporcional a x, corresponde a aquél de la ecuación (14) en que K = 0, o sea que

$$\phi(x) = mx/k\ .$$

Entonces

$$f(x,t) = \frac{k}{m\ x}\ G\ \frac{k}{m}\ \mathrm{Log}_e\ x - t \qquad (18)$$

Para darle su forma a la función G, apliquemos la consideración de que en un momento dado (que vamos a tomar como instante inicial, t = 0) la distribución es paretiana:

$$f(x,0) = C_o x^{-k-1}\ , \quad \text{con} \quad x \in [a,A]$$

Sustituyendo en la solución general (ecuación(18)), tenemos

$$\frac{C_o m x^{-k}}{k} = G(w), \text{ siendo } \quad w = \frac{k}{m} \log_e x \qquad (19)$$

o sea que

$$x = e^{mw/(k)}$$

$$x^{-k} = e^{-mkw/(k)}$$

Sustituyendo en (19), obtenemos

$$G(w) = \frac{C_o m}{k} e^{-mkw/(k)}$$

de donde se deduce que, para $w = (k) \log_e x/m - t$, esto es

$$G\left(\frac{k}{m} \log_e x - t \right) = \frac{C_o m}{(k)} e^{-\frac{mk}{k}\left(\frac{k}{m} \log x - t\right)}$$

$$= \frac{C_o m}{k+1} x^{-k} e^{mt}$$

Sustituyendo, finalmente, en la solución general, tenemos:

$$f(x,t) = \frac{k}{m\ x} \frac{C_o m}{k} e^{mt} x^{-k}$$

$$f(x,t) = C_o e^{mt} x^{-k-1}$$

Esta es nuevamente una distribución del tipo de Pareto. Pero los límites entre los cuales varía la población x deben haber variado. Porque en t = 0, tenemos

$$\int_{a(0)}^{A(0)} C_o x^{-k-1} dx = 1$$

Pero para t = t, en cualquier momento (posterior), también debemos tener

$$\int_{a(t)}^{A(t)} C_o\, mt\, x^{-k-1}\, dx = 1$$

12. Podemos resumir todo lo anterior en un solo enunciado: si en un país se cumple en un momento dado la ley de Auerbach (o sea que sus ciudades tienen una distribución paretiana de la población), es porque, y sólo porque cada una de ellas tiende a aumentar el número de habitantes proporcionalmente a los que ya tiene.

***

ANEXO 1

MATERIAL ESTADISTICO UTILIZADO

Población Urbana - 1938

Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.	Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.
1	Bogotá	325.658	12	Ibagué	27.448
2	Barranquilla	150.395	13	Santa Marta	25.113
3	Medellín	143.952	14	Ciénega	22.783
4	Cali	88.366	15	Girardot	22.557
5	Cartagena	72.767	16	Palmira	21.235
6	Manizales	51.025	17	Buga	19.595
7	Bucaramanga	41.714	18	Popayán	18.292
8	Cúcuta	37.323	19	Tunja	16.597
9	Pereira	30.762	20	Neiva	15.096
10	Armenia	29.673	21	Cartago	14.750
11	Pasto	27.564	22	Buenaventura	14.515

Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.
23	Pamplona	13.126
24	Montería	12.804
25	Honda	12.424
26	Tulúa	12.017
27	Soledad	11.500
28	Sabanalarga	11.432
29	Sincelejo	11.014
30	Sevilla	10.450
31	Arjona	10.416
32	Ocaña	9.937
33	Facatativá	9.779
34	Magangué	9.770
35	Tumaco	9.671
36	Sta.Rosa de C.	9.329
37	B/bermeja	9.307
38	Sonsón	8.984
39	Turbaco	8.977
40	Yarumal	8.693
41	Ipiales	8.343
42	Sinú	8.287
43	Carmen	8.228
44	Bello	8.180
45	Socorro	7.891
46	San Gil	7.811
47	Líbano	7.659
48	Aguadas	7.631
49	Calarcá	7.453
50	Agua de Dios	7.213
51	Chiquinquirá	6.998
52	Calamar	6.984
53	Pié de Cuesta	6.974
54	Zipaquirá	6.955
55	Baranoa	6.899
56	Mompós	6.694
57	Armero	6.401
58	Salamina	6.183

Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.	Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.
59	Lorica	6.146	77	Caicedonia	5.239
60	Villavicencio	6.074	78	Contratación	5.238
61	Andes	5.991	79	Sogamoso	5.216
62	La Dorada	5.965	80	Málaga	5.210
63	San Jacinto	5.891	81	Ciénega de Oro	4.970
64	Plato	5.814	82	Tolú	4.969
65	Riosucio	5.801	83	Jericó	4.922
66	Espinal	5.666	84	Pto.Colombia	4.896
67	Riohacha	5.651	85	Fusagasugá	4.866
68	El Banco	5.626	86	Concordia	4.827
69	Pto.Tejada	5.566	87	La Ceja	4.801
70	Chaparral	5.506	88	San Estanislao	4.770
71	Pto.Berrío	5.487	89	Abejorral	4.665
72	Anserma	5.458	90	Sitionuevo	4.630
73	Cmp.de la Cruz	5.458	91	Zapatoca	4.617
74	Manah	5.426	92	Corozal	4.519
75	Cisneros	5.423	93	Cereté	4.503
76	Quibdó	5.278	94	Santander	4.421

Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.
95	Garzón	4.367
96	San Antero	4.355
97	Neira	4.349
98	Fontibón	4.333
99	Túquerres	4.324
100	Sahagún	4.308

Población Urabana - 1951.

Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.
1	Bogotá	638.562
2	Medellín	328.294
3	Barranquilla	276.199
4	Cali	241.357
5	Cartagena	111.297
6	Bucaramanga	102.887
7	Manizalez	88.893
8	Pereira	76.262
9	Cúcuta	70.375
10	Armenia	57.098
11	Ibagué	54.347
12	Palmira	54.293
13	Pasto	48.853
14	Santa Marta	37.005
15	Girardot	35.665
16	Buenaventura	35.087
17	Buga	32.016
18	Popayán	31.866
19	Cartago	31.051
20	Neiva	30.040
21	Tuluá	28.715
22	Bello	28.398
23	B/bermeja	25.046
24	Ciénega	24.358
25	Montería	23.682
26	Tunja	23.008

Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.	Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.
27	Sincelejo	21.625	45	Arjona	12.361
28	Soledad	20.158	46	Líbano	12.090
29	Sevilla	17.210	47	Socorro	11.842
30	V/vicencio	17.126	48	Chaparral	11.705
31	Magangué	17.114	49	Ipiales	11.569
32	Pamplona	16.396	50	Itaguí	11.027
33	Honda	16.051	51	Sonsón	10.913
34	Calarcá	15.707	52	Caicedonia	10.681
35	Ocaña	15.214	53	Yarumal	10.349
36	La Dorada	14.577	54	Armero	10.258
37	Sabanalarga	13.982	55	Turbaco	10.208
38	Fontibón	13.871	56	San Gil	10.149
39	Sogamoso	13.574	57	Chiquinquirá	10.143
40	Facatativá	13.479	58	Carmen de B.	9.647
41	Sta.Rosa de C.	13.413	59	El Banco	9.636
42	Envigado	13.392	60	Espinal	9.389
43	Zipaquirá	12.708	61	Monpós	9.192
44	Tumaco	12.692	62	Quibdó	9.013

Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.	Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.
63	Valledupar	9.011	81	Andes	6.905
64	Pto.Berrío	8.947	82	Sn.Jacinto	6.675
65	Pto.Tejada	8.535	83	Fundación	6.620
66	Lorica	8.420	84	Túquerres	6.482
67	Fusagasugá	8.345	85	Quimbaya	6.315
68	Baranoa	8.144	86	Ceretê	6.161
69	Florencia	8.119	87	Bolivar	6.121
70	Aguadas	8.064	88	Cienega de O.	6.108
71	Plato	8.039	89	Pradera	6.092
72	Salamina	7.940	90	Mariquita	6.066
73	Anserma	7.767	91	Málaga	6.022
74	Duitama	7.723	92	Campoalegre	5.997
75	Piedecuesta	7.720	93	San Antero	5.970
76	Chinchiná	7.577	94	Urrao	5.958
77	Zarzal	7.395	95	Riohacha	5.953
78	Riosucio	7.363	96	Sahagún	5.910
79	Corozal	7.240	97	Zambrano	5.863
80	Since	7.112	98	Caldas.	5.846

Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.	Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.
99	Sn.Juan Nep.	5.832	100	Villanueva.	5.830

Población Total (Urbana y Rural)-1960 (*)

1	Bogotá.	1.256.640	14	Armenia	110.400
2	Medellín	651.240	15	Montería	101.520
3	Cali	639.900	16	B/ventura	94.350
4	Barranquilla	452.140	17	Sevilla	90.910
5	Bucaramanga	208.640	18	Buga	78.540
6	Pereira	183.730	19	Neiva	77.410
7	Cartagena	179.250	20	Bello	72.090
8	Manizales	170.890	21	Calarcá	69.200
9	Ibagué	143.590	22	B/bermeja	68.720
10	Cúcuta		23	Cartago	68.110
11	Tulúa	129.340	24	Ciénega	65.730
12	Palmira	129.330	25	Sta.Rosa de C.	64.750
13	Pasto	119.600	26	Sta.Marta	62.650

(*) Estimado por el Banco de la República.

Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.	Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.
27	Popayán	61.940	45	Villavicencio	42.810
28	Girardot	60.210	46	Quibdó	42.610
29	Andes	55.250	47	Roldanillo	41.080
30		52.840	48	La Dorada	40.840
31	Tunja	52.170	49	Plato	40.170
32	Envigado	50.890	50	Trujillo	40.050
33	Chaparral	50.290	51	Valledupar	39.740
34	Tumaco	50.140	52	Sogamoso	36.680
35	Sincelejo	50.110	53	Ortega	36.440
36	Sahagún	49.540	54	Rionegro.(Sn)	35.080
37	Magangué	49.300	55	Salamina	34.630
38	Líbano	48.660	56	Toro	34.460
39	Itaguí	48.400	57	Bolívar	34.330
40	Sonsón	47.980	58	Corozal	33.940
41	Abejorral	47.920	59	Sabanalarga	33.440
42	Lorica	47.580	60	Aguadas	33.360
43	Riosucio	45.970	61	Ipiales	32.690
44	Pensilvania	44.180	62	Anserma	32.440

Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.	Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.
63	Caicedonia	32.380	81	Pacho	28.440
64	Soledad	32.340	82	Purificación	28.380
65	Yarumal	32.130	83.84	Sta.Barbara	28.230
66	El Tambo	30.910	83.84	Rovira	28.230
67	Dagua	30.200	85	Armero	28.000
68	Cunday	30.080	86	Quinchía	27.690
69	Espinal	30.060	87	Pitalito	27.200
70	Zipaquirá	30.000	88	El Cairo	27.160
71	Patía	29.980	89	Apía	26.730
72	Mompós	29.910	90	Pivijay	26.150
73.74	Carmen de B.	29.610	91	Soacha	25.900
73.74	Génova	29.610	92	Rionegro(Ant)	25.560
75	El Banco	29.550	93	Chinú	25.390
76	Versalles	29.240	94	Santander	25.300
77	Ocaña	29.160	95	Riofrío	25.150
78	Belén de Um.	28.980	96	Samacá	25.000
79	Yolombó	28.700	97	Cajamarca	24.940
80	Guamo	28.600	98	Anolaima	24.540

Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.	Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.
99	Duitama	24.440	100	Neiva	24.320

Población Urabana - 1964-

Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.	Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.
1	Bogotá	1.661.935	16	Neiva	75.886
2	Medellín	771.865	17	Montería	70.531
3	Cali	618.215	18	B/ventura	70.079
4	Barranquilla	493.034	19	Girardot	66.584
5	Cartagena	217.910	20	Buga	65.535
6	Bucaramanga	216.821	21	Itaguí	60.318
7	Manizales	190.036	22	B/bermeja	59.625
8	Pereira	147.487	23	Popayán	58.500
9	Cúcuta	147.176	24	Tulúa	56.539
10	Ibagué	125.233	25	Cartago	55.539
11	Armenia	125.022	26	Ciénaga	47.719
12	Palmira	106.502	27	V/vicencio	45.277
13	Sta.Marta	89.161	28	Sincelejo	44.001
14	Bello	85.894	29	Valledupar	43.553
15	Pasto	82.546	30	Envigado	40.686

Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.	Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.
31	Tunja	40.451	49	Honda	19.945
32	Soledad	37.617	50	Carmen de B.	19.196
33	Sogamoso	32.274	51	Fusagasugá	18.755
34	Duitama	31.865	52	Líbano	18.640
35	S.Rosa de C.	31.646	53	San Gil	18.518
36	Calarcá	30.342	54	Zarzal	17.768
37	Ocaña	28.028	55	Florencia	17.709
38	Magangué	27.354	56	Caldas	17.704
39	Sevilla	26.757	57	Armero	17.495
40	La Dorada	26.168	58	Sonsón	16.955
41	Pamplona	25.502	59	Chiquinquirá	16.926
42	Tumaco	25.145	60	Yarumal	16.823
43	Ipiales	23.320	61	Arjona	16.310
44	Espinal	22.791	62	Caicedonia	16.327
45	Zipaquirá	22.648	63	Chinchiná	15.944
46	Facatativá	20.742	64	Pto.Berrío	15.812
47	Sabanalarga	20.254	65	Yumbo	15.270
48	Quibdó	19.989	66	El Banco	14.889

Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.
67	Pto.Tejada	14.863
68	Salamina	14.263
69	Turbaco	14.255
70	Fundación	14.128
71	Baranoa	14.064
72	Corozal	14.000
73	Socorro	13.716
74	Plato	13.364
75	Chaparral	13.261
76	Lorica	12.880
77	Florida	12.875
78	Ríonegro	12.541
79	Pie de Cuesta	12.278
80	La Cirginia	12.223
81	Cerrito	12.200
82	Flandes	12.015
83	Garzón	11.999
84	Quimbaya	11.872
85	Cereté	11.849
86	A.Codazzi	11.673
87	Sahagún	11.560
88	Soacha	11.435
89	Santander	11.426
90	Montenegro	11.350
91	Río Sucio	11.274
92	Pradera	11.223
93	Andes	11.135
94	Mompós	10.965
95	Pto.Boyacá	10.895
96	Pitalito	10.818
97	San Onofre	10.747
98	Túquerres	10.698
99	Since	10.631
100	San Jacinto	10.210

Poblaciones Totales (Urabana y Rural)- 1964.

Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.	Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.
1	Bogotá	1.697.311	17	Neiva	98.790
2	Medellín	772.887	18	B/ventura	96.708
3	Cali	637.929	19	Bello	93.207
4	Barranquilla	498.301	20	Tulúa	80.398
5	Cartagena	242.085	21	Valledupar	78.437
6	Bucaramanga	229.748	22	Girardot	76.920
7	Manizales	221.916	23	Popayán	76.568
8	Pereira	188.365	24	Buga	75.898
9	Cúcuta	175.336	25	St.Rosa de C.	74.223
10	Ibagué	163.661	26	Tumaco	71.427
11	Palmira	140.889	27	B/bermeja	71.096
12	Armenia	137.222	28	Tunja	68.905
13	Montería	126.329	29	Itaguí	68.086
14	Ciénega	113.143	30	Cartago	65.408
15	Pasto	112.876	31	Magangué	64.561
16	Sta.Marta	104.471	32	Envigado	61.576

Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.	Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.
33	Villavicencio	58.430	51	Chaparral	39.821
34	Sincelejo	55.705	52	Ipiales	39.734
35	Calarcá	54.834	53	El Carmen B.	39.704
36	Lorica	54.750	54	Salamina	39.695
37	Líbano	54.574	55	Soledad	38.456
38	Duitama	52.537	56	Ocaña	38.445
39	Sogamoso	51.639	57	Yarumal	38.438
40	Plato	48.712	58	Mompós	38.126
41	Uribia	46.933	59	Patía	37.894
42	Sevilla	44.395	60	Sabanalarga	37.671
43	Espinal	43.892	61	Aguadas	37.130
44	Quibdó	42.926	62	El Tambo	36.111
45	Turbo	42.825	63	Montelíbano	34.360
46	Riosucio	42.691	64	Vélez	34.115
47	Corozal	42.011	65	Santander	32.846
48	Bolívar(C)	41.029	66	Soacha	32.601
49	Sahagún	40.861	67	Pensilvania	32.579
50	Sonsón	40.316	68	Anserma	32.540

Nº de Oden.	Ciudad.	Habitantes.
69	Curí	32.019
70	Riohacha	31.897
71	Ayapel	31.890
72	La Dorada	31.749
73	Pitalito	31.686
74	El Banco	31.479
75	Pacho	31.469
76	Belén de Umb.	31.051
77	Chiriguaná	30.903
78	Guamo	30.838
79	Abejorral	30.757
80	Samacá	30.581
81	Florencia	30.445
82	Pamplona	30.395
83	Rionegro	30.337
84	Fusagasugá	30.328

Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.
85	Cereté	29.660
86	Tierralta	29.626
87	Rionegro(Sn)	29.523
88	Bolivar (Sn)	29.287
89	Purificación	29.287
90	Urrao	28.870
91	Jamundí	28.179
92	Piviguay	28.175
93	Caicedonia	28.117
94	Dadeiba	28.070
95	Agua Chica	27.814
96	Zipaquirá	27.775
97	Candelaria	27.435
98	Pto.Berrío	27.281
99	San Onofre	27.263
100	Armero	26.734

Población Urabana -1973-

Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.	Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.
1	Bogotá	2.696.270	17	St.Marta	102.484
2	Medellín	1.070.924	18	Itaguí	96.972
3	Cali	898.253	19	Montería	89.583
4	Barranquilla	661.009	20	Valledupar	87.425
5	Cartagena	292.512	21	B/bermeja	87.191
6	Bucaramanga	291.661	22	Tulúa	86.736
7	Cúcuta	219.772	23	V/vicencio	82.869
8	Manizales	199.904	24	Popayán	77.669
9	Ibagué	176.223	25	Buga	71.016
10	Pereira	174.128	26	Cartago	69.154
11	Palmira	140.481	27	Sincelejo	68.797
12	Armenia	135.615	28	Soledad	64.469
13	Pasto	119.339	29	Envigado	63.584
14	B/ventura	115.770	30	Girardot	59.165
15	Bello	115.119	31	Tunja	51.620
16	Neiva	105.476	32	Sogamoso	48.490

Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.	Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.
33	Ciénega	42.546	51	Caldas	27.395
34	Tumaco	38.742	52	Sabanalarga	26.542
35	Floridablanca	38.446	53	Fusagasugá	25.456
36	Ocaña	38.352	54	Zipaquirá	25.413
37	Dosquebradas	37.837	55	Chinchiná	24.891
38	Duitama	36.551	56	Caicedonia	23.567
39	Magangué	34.396	57	El Carmen B.	23.392
40	Espinal	32.475	58	Copacabana	23.327
41	Pamplona	31.877	59	Rionegro	22.654
42	Florencia	31.817	60	Florida	22.400
43	Sevilla	31.143	61	Soacha	22.276
44	La Dorada	30.962	62	A. Codazzi	21.932
45	Ipiales	30.871	63	Chiquinquirá	21.727
46	Calarcá	29.349	64	San Gil	21.679
47	St.Rosa de C.	28.368	65	Maicao	21.645
48	Quibdó	28.040	66	Honda	21.506
49	Yumbo	28.011	67	Zarzal	21.370
50	Facatativá	27.892	68	Yarumal	21.330

Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.	Nº de Orden.	Ciudad.	Habitantes.
69	El Banco	20.756	85	El Cerrito	17.357
70	Arjona	20.571	86	Piedecuesta	17.308
71	Riohacha	19.604	87	Agua Chica	16.771
72	Pto.Berrío	19.579	88	Turbo	16.070
73	Armero	19.567	89	Sonsón	15.999
74	Turbaco	19.360	90	La Virginia	15.948
75	Caucasia	19.348	91	Pradera	15.732
76	Líbano	19.132	92	Anserma	15.599
77	Cereté	18.788	93	Socorro	15.592
78	Sahagún	18.717	94	Pitalito	15.049
79	Plato	18.589	95	Andes	14.957
80	Baranoa	18.397	96	Flandes	14.932
81	Pto.Tejada	18.315	97	Chaparral	14.546
82	Lorica	18.251	98	San Andrés	14.428
83	Fundación	17.497	99	Mompós	14.076
84	Corozal	17.419	100	Quimbaya	13.996

***

BIBLIOGRAFIA

[1] Deryke, Pierre-Henri. La Economía Urbana, Madrid, Instituto de Estudios de Admon. Local, 1971. 266 p.

[2] Isard, Walter. Location and Space-Economy. New York, Ed. John Wiley and Sons, Inc., 1956 350 p.

[3] Lotka, Alfred J. Elements of Mathematical Biology. New York, Dover Publications, Inc., 1956. 2nd. Edition. 465 p.

[4] Zipf, G.K. Human Behaviour and the Principle of Least Effort, Cambridge, Mass. Addison-Wesley Press, 1949. Caps 9 y 10.

[5] Singer, H.W. "Courbe des Populations: a parallel to Pareto's law", Economic Journal, Vol. XLVI (Junio 1936), pp. 254-263.

[6] Gibrat, R. Les Inégalités Economiques. Paris, Sirey, 1938.

[7] Auerbach, Friedrich, "Das Gesetz der Bevolkerungs konzentration", Petermanns Mitteilungen, Vol. 59 (Febrero 1913), pp. 74-76.

[8] Beckmann, M.J. "City Hierarchies and the Distribution of City Size". Economic Deve-

lopment and Cultural Change", Vol. 6, pp. 243-248.

[9] Richardson, Harry W. Elements of Regional Economics. Middlessex, Penguin Books, 1969. 166 p.

***

GRAFICO N° 1 CORRELACION DE TAMAÑO Y ORDEN PARA LOS 100 MAYORES CENTROS DE COLOMBIA, SEGUN SU POBLACION URBANA

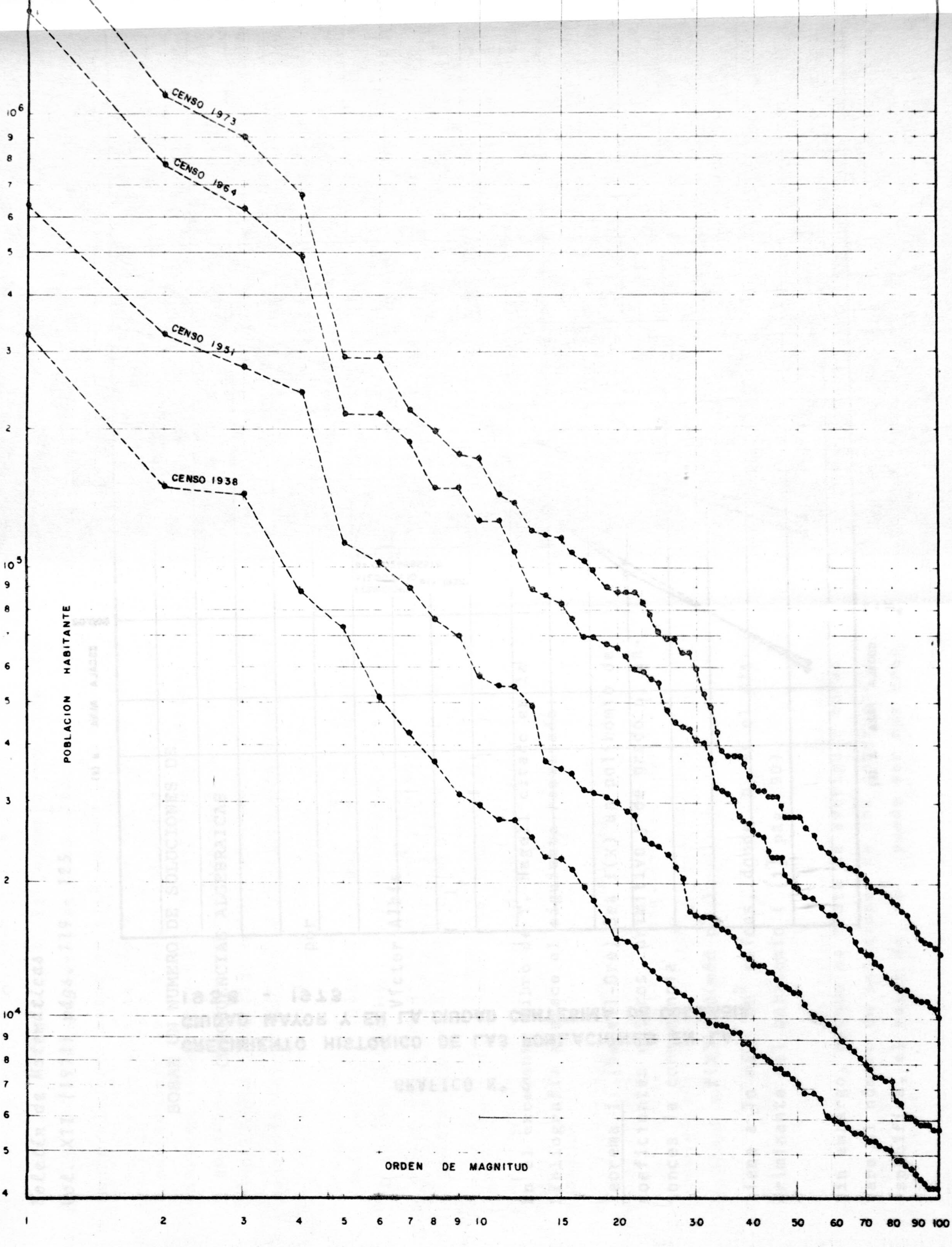


GRAFICO N° 2

CRECIMIENTO HISTORICO DE LAS POBLACIONES EN LA CIUDAD MAYOR Y EN LA CIUDAD CENTESIMA DE COLOMBIA 1938 - 1973