Boletín de Matemáticas
Vol. XII (1978), págs,162 - 187

TENDENCIAS ARMONICAS EN LA TEORIA DE LOS NUMEROS

por

Carlos Julio Moreno

§ 1 Introducción.

En mi conferencia en el VI Coloquio Colombiano de Matemáticas, dictada en julio de 1976, presenté brevemente, desde el punto de vista de la teoría analítica de los números, algunas ideas relacionadas con los productos de Euler que fueron introducidos y estudiados por Langlands. La tesis que presenté daba a conocer con más detalles la relación existente entre las ecuaciones funcionales y las simetrías que ya le eran conocidas a Riemann en el caso de la función $\zeta(s)$ presentes en las fórmulas explícitas que ocurren en el estudio de la distribución de números primos.

En la presente nota daremos una interpretación de la simetría que existe en la fórmula explícita de Riemann [5]. Esta limitación artificial nos permite sin embargo, dar claramente la idea central y evitar la introducción de conceptos cuya definición exacta tomaría más tiempo y espacio.

En el § 2 definiremos la función zeta de Riemann y daremos para ésta una demostración de la ecuación funcional basada en el estudio de las series no analíticas de Eisenstein. La idea principal que presentaremos allí es la de que la ecuación funcional de la función zeta de Riemann es en realidad una consecuencia de la simetría del tipo de Weil que satisface la serie de Eisenstein para el grupo $SL(2, \mathbb{R})$. En el § 3 daremos una prueba sencilla, siguiendo las ideas de Weil [7], de la fórmula explícita de Riemann [5]; también exhibiremos la simetría que ésta contiene y la relacionaremos con la ecuación funcional. Finalmente presentaremos una proposición sencilla de Weil, que nos permite reformular, desde el punto de vista del análisis armónico, la famosa hipótesis de Riemann acerca de los ceros de la función zeta que están localizados en la banda crítica.

Quiero expresar aquí mi agradecimiento a los organizadores del VI Coloquio de Matemáticas por su gentil invitación.

§ 2 Las series de Eisenstein y la ecuación funcional.

La función zeta de Riemann se define formalmente como el producto infinito

$$\Lambda(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(\tfrac{s}{2}) \prod_p (1-p^{-s})^{-1}$$

$$= \pi^{-s/2}\Gamma(\tfrac{s}{2})\ \zeta(s),$$

que, como se puede verificar fácilmente, representa una función holomorfa de la variable compleja s en el semi-plano en el cual la parte real de s es estrictamente mayor que 1; Riemann fué el primero en probar, por dos métodos enteramente diferentes, que la función $\Lambda(s)$ tiene una continuación meromorfa a todo el plano de la variable compleja, con un polo de orden 1 en el punto $s = 1$. Aunque muchas variaciones de las ideas de Riemann en relación con la ecuación funcional se publicaron en los siguientes cien años después de la aparición de [5], todas éstas se basaban en una u otra forma en los métodos de Riemann, es decir, en la teoría de los residuos de Cauchy y la fórmula de sumación de Poisson. El descubrimiento de un principio bastante general, de tipo diferente a aquéllos utilizados por Riemann, se debe a Selberg, quien, en su trabajo fundamental de 1956 [6], introdujo y estudió las series de Eisenstein no analíticas asociadas al grupo $G = SL(2)$. Como hoy bien lo sabemos, estas series forman parte esencial del análisis armónico del espacio de funciones $L^2(G_{\mathbb{R}}/G_{\mathbb{Z}})$, y conducen a una generalización no abeliana de la fórmula sumatoria de Poisson.

En lo que sigue, exponemos algunas de estas ideas, siguiendo la presentación de Kubota [2], y utilizando una notación simplificada. Las notaciones que usaremos son: $\mathbb{R}$, denota el eje de los reales; $\mathbb{C}$, a los complejos; $\mathbb{Z}$, a los enteros racionales; $G_{\mathbb{R}} = SL(2,\mathbb{R})$, al grupo de matrices cuadradas de orden 2 de coeficientes reales y determinante igual a 1; y $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$, al grupo definido por las mismas condiciones pero de coeficientes en $\mathbb{Z}$; K denotará al grupo compacto maximal de $G_{\mathbb{R}}$ consistente en todas las rotaciones

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

A su vez, A denotará al subgrupo de las matrices diagonales y H representará al subespacio superior de Poincaré:

$$H = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, y > 0\} .$$

El álgebra de los operadores diferenciales que actúan en el espacio de las funciones en H y que son invariantes bajo la acción del grupo $SL(2,\mathbb{R})$ es el álgebra polinomial $\mathbb{C}[D]$ generada por el laplaciano

$$D = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) .$$

El grupo $SL(2,\mathbb{R})$ contiene un subgrupo distinguido nilpotente, que denotaremos con

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{R} \right\} .$$

Consideraremos también el subgrupo definido por

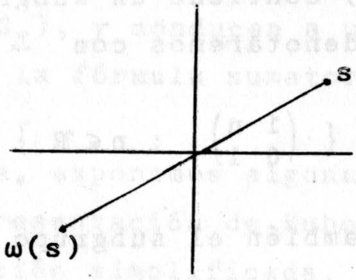
$$\Gamma_\infty = N \cap \Gamma$$

La correspondencia, bien conocida, entre las funciones en H y las funciones en el grupo $SL(2,\mathbb{R})$ que son invariantes bajo la acción del grupo compacto K, se basa en la descomposición de Iwasawa, $SL(2,\mathbb{R}) = NAK$, que a cada elemento σ de $SL(2,\mathbb{R})$ asocia la descomposición paramétrica

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & n(\sigma) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(\sigma)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & y(\sigma)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta(\sigma) & -\operatorname{sen}\theta(\sigma) \\ \operatorname{sen}\theta(\sigma) & \cos\theta(\sigma) \end{pmatrix},$$

de tal manera que a una función $f(\sigma)$ definida en el espacio homogéneo $SL(2,\mathbb{R})/K$ le corresponde una función $\phi_f(z)$ definida en H y dependiente de la variable compleja $z = n(\sigma) + iy(\sigma)$. El álgebra compleja de Lie del grupo A se denotará con $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, y la identificaremos, como es bien conocido en el estudio de las estructuras de las álgebras de Lie, con los números complejos $\mathbb{C}$, de tal manera que el álgebra dual $\hat{\mathfrak{a}}_{\mathbb{C}}$ será también $\mathbb{C}$. El grupo de Weil de $\hat{\mathfrak{a}}_{\mathbb{C}}$, que en lo que sigue denotaremos con Ω, contiene sólo dos elementos: la identidad y la reflexión simétrica ω de centro en el origen dada por $\omega(s) = -s$.

$$\hat{\mathfrak{a}}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \,.$$



La descomposición espectral del espacio de Hilbert de las funciones $L^2(SL(2,\mathbb{R})/\Gamma)$ definidas en el grupo $SL(2,\mathbb{R})$ que son invariantes bajo la acción de Γ contiene una suma contínua y una suma discreta [2, p. 62]. La parte discreta contiene funciones que parecen tener gran importancia en teoría de números. La parte contínua, se conoce explícitamente, y está basada en el estudio de las siguientes funciones:

<u>Series de Eisenstein</u>: s representa un elemento del álgebra dual de Lie $\hat{\mathfrak{a}}_{\mathbb{C}}$, y también la podemos considerar como una variable compleja: si $\sigma \in SL(2,\mathbb{R})$ es la matriz

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

y $z = x + iy$ es una variable en H, podemos poner

$$\sigma(z) = \frac{az + b}{cz + d} \,.$$

Es fácil verificar que la parte imaginaria del número $\sigma(z)$ está dada por

$$\operatorname{Im}\sigma(z) = \frac{y}{|cz+d|^2}$$

De acuerdo con la teoría de las álgebras de Lie, podemos identificar esta expresión con

$$\operatorname{Im}\sigma(z) = e^{\rho H(\sigma\circ g)} ,$$

donde

$$g = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & y^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

y

$$H : A \longrightarrow \mathfrak{A}_{\mathbb{C}}$$

es la aplicación logarítmica $H(g) = \frac{1}{2}\log y$ y $z = x + iy$; ρ es el elemento del álgebra dual $\hat{\mathfrak{A}}_{\mathbb{C}}$ que consiste en multiplicar por 1 : $\rho(\alpha) = \alpha$. Utilizando estas igualdades, tenemos que la serie de Eisenstein definida por Harish-Chandra [1, p. VI],

$$E(g,s) = \sum_{\sigma\in\Gamma/\Gamma_\infty} e^{(\rho+s)H(\sigma g)} ,$$

es idéntica a la serie de Eisenstein definida por Kubota ([2], p. 11),

$$E(z,s) = \sum_{\sigma\in\Gamma/\Gamma_\infty} \operatorname{Im}\sigma(z)^{1+s/s} .$$

Como es costumbre, los elementos σ en ambas sumas se toman sobre un conjunto completo de coclases del grupo cociente Γ/Γ_∞. Las principales propiedades de la función $E(z,s)$, inicialmente definida para valores de s con parte real mayor que 1 , son su continuación meromorfa a todo el plano de la variable s, y la ecuación funcional

$$E(z,\omega(s)) = \frac{\Lambda(s)}{\Lambda(s+1)} E(z,s)$$

(Kubota [2], p. 44). Vamos ahora a utilizar estas propiedades para demostrar, siguiendo el método de Selberg, le ecuación funcional para el producto de Riemann $\Lambda(s)$.

<u>Teorema 1</u>. El producto de Riemann satisface la ecuación funcional

$$\Lambda(s) = \Lambda(1-s) .$$

<u>Nota</u>. Como se observará más adelante, si ω es el elemento del grupo de Weil de $\hat{\mathfrak{O}\mathfrak{l}}_{\mathbb{C}}$, diferente de la unidad, el teorema puede escribirse, más apropiadamente, en la forma $\Lambda(s) = \Lambda(1+\omega(s))$. Es en este sentido que la ecuación funcional se debe a la invariancia por un elemento del grupo de Weil de la serie de Eisenstein. Sin mucha duda, podríamos afirmar que las mismas leyes fundamentales que gobiernan el comportamiento simétrico de las partículas elementales, también determinan la naturaleza del producto de Riemann y, por consiguiente, aquellas propiedades de los números enteros que se deducen de $\Lambda(s)$.

<u>Prueba del Teorema 1</u>. Si utilizamos la notación

ya introducida, podemos escribir el desarrollo en serie de Fourier ([2], p.16) en la forma

$$E(\sigma, s) = \sum_{\omega\in\Omega} c(\omega,s)e^{(\omega(s)+\rho)H(\sigma)} + \sum_{m\in\mathbb{Z}}^{*} \frac{1}{\Lambda(s+1)}$$

$$\cdot \frac{\sigma_s(|m|)}{|m|^{s/2}} \cdot 2K_{s/2}(2\pi|m|e^{2\rho H(\sigma)})e^{\rho H(\sigma)+2\pi imn(\sigma)},$$

donde la primera suma se extiende a todos los elementos ω del grupo de Weil Ω de $\hat{\mathcal{O}\!\mathcal{R}}_{\mathbb{C}}$ y la segunda suma Σ^* se extiende a todos los números enteros m diferentes de cero; para el elemento neutro de Ω, ponemos

$$c(1,s) = 1,$$

y para el elemento ω de orden 2, ponemos

$$c(\omega,s) = \frac{\Lambda(s)}{\Lambda(s+1)}.$$

Además, $K_s(z)$ es la función modificada de Bessel:

$$K_2(z) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{I_{-s}(z) - I_s(z)}{\text{sen } \pi s},$$

e

$$I_s(z) = \sum_{m=o}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}z)^{s+2m}}{m!\Gamma(m+s+1)}.$$

La importante relación

$$K_s(z) = K_{\omega(s)}(z), \quad \omega\in\Omega \qquad (1)$$

es inmediata; también hemos puesto

$$\sigma_s(|m|) = \sum_{d|m} d^s ,$$

donde la suma contiene sólo divisores positivos de m. Igualmente se verifica que para un elemento ω del grupo de Weil Ω, tenemos

$$\frac{\sigma_s(|m|)}{|m|^{s/2}} = \frac{\sigma_{\omega(s)}(|m|)}{|m|^{\omega(s)/2}} . \qquad (2)$$

Observemos que las funciones $c(\omega;s)$ satisfacen trivialmente la ecuación (Harish-Chandra[1], p. VIII)

$$c(\omega\nu, \nu(s)) = c(\omega, s)\, c^{\cdot}(\nu, \nu(s)), \qquad (3)$$

donde ω y ν son dos elementos arbitrarios de Ω; por consiguiente, la ecuación funcional de la serie de Eisenstein, la podemos escribir en la forma

$$E(\sigma, s) = c(\omega, s)\, E(\sigma, \omega(s)). \qquad (4)$$

Aplicando al desarrollo de Fourier de $E(\sigma,s)$ las ecuaciones funcionales (1)-(4), obtenemos:

$$E(\sigma,s) = \sum_{\nu\in\Omega} c(\omega,s)c(\nu,\omega))\, e^{(\nu\circ\omega(s)+\rho)H(\sigma)} +$$

$$+ \sum_{m\in\mathbb{Z}}^{*} \frac{c(\omega,s)}{\Lambda(\omega(s)+1)} \frac{\sigma_{\omega(s)}(|m|)}{|m|^{\omega(s)/2}}\, 2K_{\omega(s)/2} \cdot$$

$$\cdot\, (2\pi|m|e^{2\rho H(\sigma)}\, e^{\rho H(\sigma)+2\pi i m n(\sigma)} =$$

$$= \sum_{\nu\in\Omega} c(\omega\nu,s)\, e^{(\omega\nu(s)+\rho)H(\sigma)} +$$

$$+ \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{c(\omega,s)}{\Lambda(\omega(s)+1)} \circ \frac{\sigma_s(|m|)}{|m|^{s/2}} \circ$$

$$\circ\ 2K_{s/2}(2\pi|m|e^{2\rho H(\sigma)}\ e^{\rho H(\sigma)} + 2\,imn(\sigma) \circ$$

De esta identidad deducimos, utilizando teoremas bien conocidos sobre los desarrollos en funciones propias del operador laplaciano, que los coeficientes que aparecen en ambas series de Fourier de $E(g,s)$ dadas arriba deben ser iguales. Es decir,

$$\frac{1}{\Lambda(s+1)} = \frac{c(\omega,s)}{\Lambda(\omega(s)+1)}$$

$$= \frac{\Lambda(s)}{\Lambda(s+1)} \circ \frac{1}{\Lambda(\omega(s)+1)} ,$$

lo cual nos conduce a la ecuación

$$\Lambda(s) = \Lambda(1+\omega(s))$$

$$= \Lambda(1-s) ,$$

que era la que quería demostrar.

§ 3 La fórmula explícita y la simetría de Weil.

Consideremos la clase $\mathcal{L}$ de funciones definidas en el eje de los reales y que satisfacen las siguientes propiedades:

(a) Si $h(x) \in \mathcal{L}$, existe una constante real $a > 0$ tal que la función

$$h(x)\, e^{(\frac{1}{2}+a)|x|}$$

es integrable en el eje de los reales.

(b) La función $h(x)$ y su derivada son contínuas en $\mathbb{R}$, excepto en un número finito de puntos $\{\alpha_i\}$, en donde $h(x)$ y su derivada tienen discontinuidades de primera especie que satisfacen

$$h(\alpha_i) = \tfrac{1}{2}(h(\alpha_i+0) + h(\alpha_i-0)).$$

(c) Existe un número real $b > 0$ tal que

$$\lim_{|x|\to\infty} h(x)\, e^{(\frac{1}{2}+b)|x|} = 0 ,$$

$$\lim_{|x|\to\infty} h'(x)\, e^{(\frac{1}{2}+b)|x|} = 0 .$$

Las propiedades que caracterizan la clase $\mathcal{L}$ nos permiten utilizar libremente, como lo haremos en seguida, sin justificarlo, la transformación inversa de la transformación de Fourier. Utilizaremos también algunas propiedades de las distribuciones en el sentido de Schwartz [4].

Definimos la transformación de Melin de una función h por medio de la integral

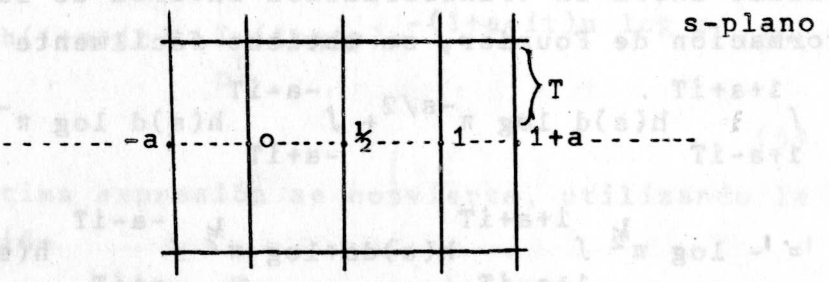
$$h(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{(s-\frac{1}{2})t}\, dt ,$$

donde h(s) se considera como función de una variable compleja, en lugar de considerarla, como sería mejor, como una función en $\hat{\mathfrak{O}}_{\mathbb{C}}$. Para simplificar un poco nuestras fórmulas, estudiaremos solamente la subclase

$$\mathcal{L}_o = \{h : h(o) = h(1) = 0\}$$

Consideremos ahora el contorno $C_{T,a}$ que consiste del rectángulo del plano complejo definido por las acotaciones

$$-a \leq Re(s) \leq 1+a \quad y \quad -T \leq Im(s) \leq T :$$



Si T no es la parte imaginaria de un cero del producto de Riemann Λ(s), entonces el teorema de Cauchy nos da para una función $h \in \mathcal{L}_o$

$$\int_{C_{T,a}} h(s) \frac{\Lambda'(s)}{\Lambda(s)} ds = (2\pi i) \sum_{-T\leq\gamma\leq T} h(\rho) =$$

$$= \int_{1+a-iT}^{1+a+iT} h(s)\circ \frac{\Lambda'(s)}{\Lambda(s)}\, ds + \int_{-a+iT}^{-a-iT} h(s)\frac{\Lambda'(s)}{\Lambda(s)}\, ds + O(1),$$

donde la suma $\sum_{\gamma}$ recorre los ceros $\rho = \beta + i\gamma$ de $\Lambda(s) = 0$ cuyas partes imaginarias tienen un valor absoluto acotado por T ; el símbolo $O(1)$, que resulta de una integración en las barras horizontales, representa en lo que sigue una función de T que tiende hacia 0 cuando T tiende a ∞. De la definición de $\Lambda(s)$ y de la ecuación funcional se obtiene que

$$\frac{\Lambda'(s)}{\Lambda(s)}\, ds = d \log \Lambda(s)$$

$$= d \log \pi^{-s/2} + d \log \Gamma(\tfrac{s}{2}) + d \log \zeta(s)$$

$$= d \log \pi^{-1-s/2} + d \log \Gamma(\tfrac{1-s}{2}) +$$

$$+ d \log \zeta(1-s).$$

Usando ahora la transformación inversa de la transformación de Fourier, se obtiene fácilmente que

$$\int_{1+a-iT}^{1+a+iT} h(s) d \log \pi^{-s/2} + \int_{-a+iT}^{-a-iT} h(s) d \log \pi^{-(1-s)/2}$$

$$= - \log \pi^{\frac{1}{2}} \int_{1+a-iT}^{1+a+iT} h(s) ds + \log \pi^{\frac{1}{2}} \int_{-a+iT}^{-a-iT} h(s)\, ds$$

$$= \log \pi^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{-T}^{T} h(\tfrac{1}{2}+it) i dt + \int_{-T}^{T} h(\tfrac{1}{2}+it) i dt + O(1) \right\}$$

$$= 2\pi\, h(0) \log \pi^{\frac{1}{2}} + O(1) .$$

Del producto de Euler.

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} ,$$

obtenemos fácilmente que en la región de convergencia absoluta

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{p^n} (\log p)\, p^{-ns}$$

donde la suma se hace sobre todas las potencias positivas p^n de todos los números primos. Si observamos que $s = 1 + a + it$ y $ds = idt$, entonces

$$\int_{1+a-iT}^{1+a+iT} h(s)\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\, ds = \int_{1+a-iT}^{1+a+iT} h(s) \,.$$

$$. \; (- \sum_{p^n} (\log p)\, p^{-ns})ds$$

$$= - \int_{-T}^{T} h(1+a+it) \sum_{p^n} (\log p)e^{-(1+a+it)n \log p}\, idt.$$

(6)

Esta última expresión se convierte, utilizando la definición

$$h(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{(s-\frac{1}{2})t}\, dt$$

en

$$- \int_{-T}^{T} \sum_{p^n} (\log p)e^{-(1+a+it)n \log p} \int_{-\infty}^{\infty} h(x)$$

$$e^{(\frac{1}{2}+a+it)x}\, dx\, idt \quad =$$

$$= -\int_{-T}^{T} i\,dt\ \sum_{p^n} \int_{-\infty}^{\infty} (\log p) h(u) e^{(\frac{1}{2}+a+it)u-(1+a+it)n\log p} du$$

$$= - \int_{-T}^{T} dt\ \sum_{p^n} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\log p}{p^{n/2}}\right) h(u)\ e^{(\frac{1}{2}+a+it)(u-n\ \log\ p)} du.$$

Si efectuamos el cambio de variable $u = U+n \log p$, resulta que la última integral es

$$= -\int_{-T}^{T} \left\{ \sum_{p^n} \int_{-\infty}^{\infty} H_{p,n} (u)\ e^{ita}\ du \right\} dt \ ,$$

donde hemos hecho

$$H_{p,n}(u) = \frac{\log p}{p^{n/2}}\ h(u+\log p^n)\ e^{(\frac{1}{2}+a)u} .$$

Como $h(u) \in \mathcal{L}_o$, entonces

$$|H_{p,n}(u)| \ll p^{-n/2}(\log p)e^{(\frac{1}{2}+a)u}\ e^{-(\frac{1}{2}+b)(u+n\log p)}$$

$$\ll \frac{\log p}{p^{n(1+b)}}\ e^{-u(a-b)} \ ,$$

donde hemos supuesto que el número real a que aparece en la definición del contorno $C_{T,a}$ satisface la desigualdad $a \leqslant b$; similarmente se obtiene, para la contribución que corresponde a la banda vertical izquierda, que

$$\int_{-a+iT}^{-a-iT} h(s)\ (- \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)}\ )\ ds$$

$$= -\int_{-T}^{T} \left\{ \sum_{p^n} \int_{-\infty}^{\infty} H^{\omega}_{p,n}\ (u)\ e^{itu}\ du \right\} dt \ , \qquad (7)$$

donde

$$H^{\omega}_{p,n}(u) = \frac{\log p}{p^{n/2}} h(u-\log p^n)\, e^{-(\frac{1}{2}+a)u} .$$

Utilizando de nuevo la transformación inversa de Fourier para una función H de $\mathcal{L}_o$,

$$-\int_{-\infty}^{\infty} H(u)\, e^{itu} du = 2\pi H(0) + O(1) ,$$

resulta de (6) y (7) que

$$\int_{C_{T,a}} h(s) d \log \zeta(s) =$$

$$= - \sum_{p^n} p^{-n/2} (\log p) \{h(\log p^n) + h(-\log p^n)\}.$$

Los factores gama en $\Lambda(s)$ contribuyen, después de un simple cambio de variable, en la forma

$$\int_{C_{T,s}} h(s) d \log \Gamma(\tfrac{s}{2}) =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} h(s) \{d \log \Gamma(\tfrac{s}{2}) - d \log \Gamma(\tfrac{1-s}{2}) \}$$

$$= i \int_{-T}^{T} h(\tfrac{1}{2}+it) \{ \frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac{1}{2}+it) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac{1}{2}-it)\} dt$$

Esta última integral nos conduce a considerar la siguiente integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} \hat{h}(s)\, d \log \underline{\Gamma}(as+b) .$$

donde a es real y positivo y b es cualquier nú mero complejo. Del cambio de variable $s = \frac{1}{2} + it$, $ds = idt$, resulta que ésta es

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-T}^{T} \hat{h}(\tfrac{1}{2}+it)\cdot a \frac{\Gamma'}{\Gamma} (a(\tfrac{1}{2}+it)+b)\, idt$$

$$= \frac{a}{2\pi} < {}_{-}h^{*} , \overline{I}_{a,b} > + O(1)$$

donde

$${}_{-}h^{*}(t) = \hat{h}(\tfrac{1}{2}+it) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, e^{itx}\, dx ,$$

$$I_{a,b}(t) = \frac{\Gamma'}{\Gamma} (a/2 + b-iat),$$

y

$$<f,g> = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx.$$

Supongamos por un momento que b es real, y definamos

$${}_{+}I_{a,b}(t) = \frac{\Gamma'}{\Gamma} (\frac{a}{2} +b+iat),$$

e

$${}_{-}I_{a,b}(t) = \frac{\Gamma'}{\Gamma} (\frac{a}{2} +b-iat) .$$

Resulta entonces que

$$\overline{{}_{+}I_{a,b}(t)} = {}_{-}I_{a,b}(t).$$

También tenemos ([3], p.13)

$${}_{+}I_{a,b}(t) = \lim_{M\to\infty} {}_{+}I_{a,b,M}(t),$$

donde

$${}_{+}I_{a,b,M}(t) = \log M - \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n+a/2+b+iat}$$

$$= \log M + {}_{+}g_n(t) \ ,$$

y donde

$${}_{+}g_n(t) = - \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n+a/2+b+iat} \ .$$

La transformación de Fourier de ${}_{+}g_n(t)$ es

$${}_{+}g_n^*(x) = - \sum_{n=0}^{M} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixt}}{n+a/2+b+iat} \, dt$$

y, por consiguiente,

$${}_{+}g_M^*(-x) = - \sum_{n=0}^{M} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{n+a/2+b+iat} \, dt \ .$$

Haciendo el cambio de variable $T = at$, $dT = adt$ en la última integral, se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{n+\frac{a}{2}+b+iat} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i.x/a.T}}{n+\frac{a}{2}+b+iT} \, dT \ ;$$

y, utilizando la fórmula clásica de distribuciones (Magnus [3], p. 430), se obtiene finalmente que

$$\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\,x/a\,T}}{n+\frac{a}{2}+b+iT} \, dT = \begin{cases} \frac{2\pi}{a} \, e^{-(n+\frac{a}{2}+b)x/a} & \text{si } \frac{x}{a}>0 \\ 0 & \text{si } \frac{x}{a}<0 \end{cases}$$

(Esta fórmula es válida sin ninguna hipótesis sobre la naturaleza de b). Finalmente, obtenemos

$${}_{+}g_n^*(-x) = \begin{cases} - \sum_{n=o}^{M} \frac{2\pi}{a} \, e^{-(n+\frac{a}{2}+b)x/a} & \text{si } \frac{x}{a}>0 \\ 0 & \text{si } \frac{x}{a}<0 \end{cases} \ ;$$

y, por consiguiente,

$$
{}_{+}g_n^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x>0 \\ -\frac{2\pi}{a}\, e^{(\frac{a}{2}+b)x/a} \cdot \dfrac{1-e^{(M+1)x/a}}{1-e^{x/a}} & \text{si } x<0 \end{cases}
$$

De esto deducimos que

$$
{}_{+}I^*_{a,b,M}(x) = (2\pi\ \delta_o)\log M + {}_{+}g^*_M\ (x),
$$

donde δ_o es la distribución de Dirac concentrada en el orígen.

Similarmente se obtiene, para la función

$$
{}_{-}I_{a,b,M}(t) = \log M - \sum_{n=o}^{M} \frac{1}{n+\frac{a}{2}+b-iat},
$$

que su transfomación de Fourier es

$$
{}_{-}I^*_{a,b,M}(x) = (2\pi\underline{\delta}_o)\ \log M + {}_{-}g^*_n\ (x),
$$

donde

$$
{}_{-}g_n(t) = -\sum_{n=o}^{M} \frac{1}{n+\frac{a}{2}+b-iat}\ .
$$

Utilizando una vez más la fórmula clásica de las distribuciones (Magnus [2], p.430), se obtiene

$$
-\Sigma \int_{\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{n+\frac{a}{2}+b-iat}\, dt = \begin{cases} -\frac{2\pi}{a} \sum\limits_{n=o}^{M} e^{-(n+\frac{a}{2}+b)x/a} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x<0 \end{cases}
$$

Finalmente, de la identidad de Plancherel

$$
<{}_{-}h^*,\ {}_{-}I_{a,b}> = <h,\ {}_{-}I^*_{a,b}> \quad ,
$$

deducimos la fórmula

$$< {}_{-}h^{*}, {}_{-}I_{a,b} > = <h, \lim_{M\to\infty} {}_{-}I^{*}_{a,b,M}>$$

$$= \lim_{M\to\infty} <h, {}_{-}I^{*}_{a,b,M}>$$

$$= \lim_{M\to\infty} 2\pi h(0)\log M - \int_{o}^{\infty} \frac{2\pi}{a} e^{-(\frac{a}{2}+b)x/a} \cdot$$

$$\cdot \frac{1 - e^{-(M+1)k/a}}{1 - e^{-k/a}} h(x)\, dx \,.$$

Hemos así demostrado la siguiente proposición:

<u>Proposición</u>: Si la función h pertenece a la clase $\mathcal{L}_o$, y si definimos la distribución $W_{a,b}$,para a real positivo y b complejo, por medio de la fórmula

$$W_{a,b}(h) = \lim_{M\to\infty} \int_{o}^{\infty} e^{-(\frac{a}{2}+b)x/a} \cdot$$

$$\cdot \frac{1 - e^{-(M+1)x/a}}{1 - e^{x/a}} \cdot h(x)dx - ah(0)\log M,$$

entonces

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} \hat{h}(s)d \log \Gamma(as+b) = -W_{a,b}(h). \quad (8)$$

Especializando esta proposición, obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-iT}^{+iT} \hat{h}(s)d \log \underline{\Gamma}(\tfrac{s}{2}) = - W_{\frac{1}{2},o}(h(t)\ ),$$

y

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}+iT}^{\frac{1}{2}-iT} h(s)d\log\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) = -W_{\frac{1}{2},0}(h(-t)).$$

Para simplificar las expresiones que resultarán más adelante, adoptaremos la siguiente notación

$$W_{\infty}(h)=\lim_{M\to\infty}\left\{\int_{0}^{\infty}\frac{1-e^{-(M+1)2x}}{1-e^{-2x}}e^{-x/2}h(x)dx-\tfrac{1}{2}h(0)\log\frac{M}{\pi}\right\} \tag{9}$$

Si observamos que la expresión (5) está incorporada en la definición (9), y si para un número primo finito ponemos

$$W_p(h) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log p}{p^{n/2}}h(\log p^n)$$

y para el primo infinito definimos $W_\infty(h)$ como en (9), podemos sumar todos los términos locales para formar un objeto global que llamaremos la distribución zeta:

$$W(h) = -\sum_p W_p(h) - W_\infty(h).$$

Definamos ahora el importante concepto de transformación de Weil, que cuando se aplica a la distribución W, nos da una nueva distribución $W^{\underline{\omega}}$. La definición es, simplemente

$$W^{\underline{\omega}}(h(t)) = W(h(-t)).$$

Si consideramos conjuntamente las contribuciones a la integral

$$\int_{1+a-iT}^{1+a+iT} \hat{h}(s)\, d \log \Lambda(s)$$

Que provienen del lado derecho del contorno $C_{T,a}$ y

$$\int_{-a+iT}^{-a-iT} \hat{h}(s)\, d \log \Lambda(1-s)$$

que provienen del lado izquierdo, justificando así el intercambio formal de $\Gamma(\frac{s}{2})$ por $\Gamma(\frac{1-s}{2})$ y de $\zeta(s)$ por $\zeta(1-s)$, resulta finalmente, cuando $T \to \infty$, la siguiente fórmula:

<u>Teorema 1</u>. Si h es una función de la clase $\mathcal{L}_0$, si W es la distribución zeta y si $W^{\underline{\omega}}$ es su transformada de Weil, resulta, para la transformación $\hat{h}$ de Melin, la siguiente fórmula:

$$\sum_{\underline{\rho}}^{*} \hat{h}(\underline{\rho}) = (W + W^{\underline{\omega}})(h) ,$$

donde la suma $\sum_{\underline{\rho}}^{*}$ se hace sobre todos los ceros del producto de Riemann $\Lambda(\underline{\rho}) = 0$.

<u>Nota</u>. En la suma $\sum_{\underline{\rho}}$ se sobrentiende que, al pasar al límite $T \to \infty$, cada término $\hat{h}(\underline{\rho})$ aparece con su conjugado complejo $\hat{h}(\overline{\underline{\rho}})$.

El interés del teorema 2 radica en la simetría presente, que, si se nos permite el abuso de notación, podemos escribir, siguiendo la notación ya introducida en la definición de la serie de Eisenstein $E(g,s)$, como

$$\sum_{\substack{\underline{\rho} \\ \underline{\Lambda}(\underline{\rho})=0}} \hat{h}(\underline{\rho}) = \sum_{\underline{\omega}\in\underline{\Omega}} W^{\underline{\omega}}(h),$$

donde Ω es el grupo de Weil del algebra de Lie $\hat{\mathfrak{A}}_{\mathbb{C}}$.

De algún interés es también el siguiente lema, para cuya demostración referimos al lector al artículo original de Weil [7]:

Lemma (Weil). Si $\underline{\Lambda}(s)$ es el producto de Riemann y W es la distribución zeta que aparece en el teorema 2, entonces, una condición necesaria y suficiente para que todos los ceros $\underline{\rho}$ de $\underline{\Lambda}(s)$ satisfagan

$$\text{Parte real de } \underline{\rho} = \tfrac{1}{2},$$

es que la distribución

$$W + W^{\underline{\omega}}$$

en el espacio de funciones $\mathcal{L}_0$ sea positiva en el sentido de L. Schwartz.

Nota. La demostración de este lema fué dada por Weil para un tipo de distribución definida en el espacio $\mathcal{L}$ y que no contenía la simetría de Weil; los cambios necesarios son triviales, y los dejamos para que sean verificados por el lector interesado.

Como se sabe bien (L. Schwartz [4], p.130), las distribuciones positivas tienen muchas propiedades interesantes, como la de tener carácter hermítico ([4], p.131, Théorème XVII), la cual es comparable con la simetría de Weil que está presente en la fórmula del teorema 2; por estas razones creemos que es de interés estudiar más a fondo la estructura de la distribución $W + W^{\omega}$ y de distribuciones similares que pueden construírse a partir del término constante de las series de Eisenstein en las cuales figuren grupos de Weil que contengan más de dos elementos. Es también de interés estudiar estos resultados desde el punto de vista del teorema de Bochner([4], p.132, Théorème SVIII) acerca de las distribuciones de tipo positivo.

***

BIBLIOGRAFIA

[1] Harish-Chandra, Automorphic forms on semisimple Lie groups, Springer Lecture Notes, Volumen 62, 1968.

[2] T. Kubota, Elementary theory of Eisenstein series, Halsted Press, New York, 1973.

[3] W. Magnus, F. Oberhettinger and R.P. Soni, Formulas and theorems for the special

functions of Mathematical Physics, Springer, New York, 1966.

[4] L. Schwartz, Théorie des distributions, Vol.II, Actualités Scientifiques et Industrielles, Herman, Paris, 1959.

[5] B. Riemann, Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse, Monatsher, Berliner Akad. 1859.

[6] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in wearkly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc., 20, 1956, 47-87.

[7] A. Weil, Sur les "formules explicites" de la theorie des nombres premiers, Comm. Lund. 1952, 252-265.

University of Illinois at Urbana-Champaign
Departament of Mathematics.