Boletín de Matemáticas
Vol. XII (1978), págs. 188 - 211

EL ESTADO ACTUAL DE LAS MATEMATICAS PURAS

por

Bill Watson

Como se puede suponer, el título de esta conferencia es muy, muy ambicioso. También, como Uds. pueden imaginarse, existen pocos matemáticos en el mundo capaces de responder adecuadamente a la pregunta: ¿ Cuál es el estado actual de las matemáticas puras? Además, después de estos comentarios, es probable que Uds. se hayan dado cuenta de que yo no soy uno de tales matemáticos.

Teniendo presentes estas observaciones, propongo dividir nuestra conferencia en dos partes distintas:

1) Las matemáticas que conosco.
2) Las que no conozco muy bien.

Tal vez, estas consideraciones prácticas parezcan graciosas. Sin embargo, esperamos poder justificarlas en términos de un análisis realístico de las importancias relativas y las dinámicas de los varios campos de las matemáticas puras. Como una aproximación inicial, podríamos considerar los siguientes campos como campos viables:

i) lógica y fundamentación
ii) teoría de números
iii) funciones de varias variables complejas
iv) álgebra
v) topología geométrica
vi) topología diferencial
vii) topología algebraica
viii) geometría diferencial
ix) geometría algebraica
x) análisis funcional
xi) ecuaciones diferenciales ordinarias
xii) ecuaciones diferenciales parciales.

Si hemos ofendido a alguien por haber omitido los campos de autómatas, teoría de control, probabilidad y estadística, análisis numérico, relatividad u otros campos de aplicaciones, esperamos que nos puedan comprender. También hemos omitido algunos campos de las matemáticas puras, como la topología los cuales hoy en día, no presentan ningún problema significativo. Aún la conjetura topológica de los cuatro colores, recientemente resuelta, no es más que un ejercicio de largas computaciones. Por supuesto hemos omitido los estudios, como la teoría de categorías y la teoría de gráficos, los cuales no son considerados como campos de investigación dinámica, sino como implementos.

Para justificar nuestra escogencia de los campos antes mencionados, quisieramos recordarles la historia de las Medallas de Fields. Desde 1897, cada cuatro años (con algunas excepciones ocasionadas por las guerras), se ha reunido el Congreso Internacional de Matemáticos. En efecto, fué en la segunda reunión, en 1900, que el genio matemático alemán David Hilbert, presentó su famosa conferencia sobre los veintitres problemas más importantes en las matemáticas. Por cierto, la solución de uno de ellos es suficiente para garantizar fama al matemático que lo haya resuelto. Luego, en 1938, en Oslo, las primeras Medallas de Fields, que llevan el nombre de un matemático canadiense quien las estipuló en su testamento, fueron otorgadas al Profesor Lars V., Ahlfors (Finlandia) por su trabajo en análisis, y al Profesor Jesse Douglas (EE. UU.) por sus investigaciones en las ecuaciones diferenciales parciales. Debido a la Guerra Mundial, las siguientes fueron presentadas doce años después en Cambridge, EE.UU. Los matemáticos premiados en los años posteriores fueron:

PREMIADO	CAMPO
1950, Cambridge	
Laurent Schwartz (Francia)	Análisis
Alte Selberg (Suecia)	Geometría algebraica
1954, Amsterdam	
Kunhiko Kodaira (Japón)	Geometría algebraica
Jean-Pierre Serre (Francia)	Geometría algebraica
1958, Edimburgo	
Klano F. Roth (Alemania)	Teoría de números
René Thom (Francia)	Topología geométrica
1962, Estocolmo	
Lars V. Hörmander (Suecia)	Ecuaciones diferenciales parciales
John W. Milnor (EE.UU.)	Topología geométrica
1966, Moscú	
Michael F. Atiyah (Inglaterra)	Geometría algebraica
Paul J. Cohen (EE.UU.)	Lógica
A. Grothendieck (Francia)	Geometría algebraica
Stephen Smale (EE. UU.)	Topología geométrica
1970, Niza	
Alan Baker (Inglaterra)	Teoría de números
Heisuke Hironaka (Japón)	Geometría algebraica
S.P. Novikov (Rusia)	Topología geometrica
J.G. Thompson (Inglaterra)	Teoría de grupos
1974, Vancouver	
Enrico Bombieri (Italia)	Geometría algebraica
David Mumford (EE. UU.)	Geometría algebraica

Recibir una Medalla de Fields equivale a ser reconocido como el mejor o uno de los mejores matemáticos jóvenes en el mundo; no solamente porque este honor lo califica como un genio matemático, sino también porque reconoce la importancia y la trascendencia de sus trabajos matemáticos.

Basándonos en los datos anteriores, podemos construír la tabla siguiente:

CAMPO	NUMERO DE PREMIADOS
Algebra	1
Lógica	1
Teoría de números	2
Topología geométrica	4
Análisis y E.D.P.	4
Geometría algebraica	8
Total:	20

El hecho de que cuarenta por ciento de las Medallas de Fields fueron otorgadas por investigadores en geometría algebraica es muy impresionante. Además, veinte por ciento fueron otorgadas en la clasificación de la topología geométrica.

Como consecuencia de estos hechos, vamos a limitar nuestro análisis intensivo a los campos de la geometría algebráica, la geometría diferencial, la topología algebraica, la topología geométrica y la topología diferencial. Sobre los demás, presentaremos solamente algunas observaciones superficiales.

Como una pequeña digresión presentamos la siguiente relación:

PAIS DE NACIMIENTO.	NUMERO DE PREMIADOS.
Estados Unidos	5
Francia	4
Inglaterra	3
Japón	2
Suecia	2
Alemania	1
Finlandia	1
Italia	1
Rusia	1

Estas cifras demuestran que es falso el rumor de que la mayoría de los mejores matemáticos en los últimos cuarenta años han sido estadounidenses. Francia e Inglaterra han producido más matemáticos premiados por cada millón de habitantes. Sin embargo, si examinamos los datos de acuerdo al país en el cual el trabajo premiado fué realizado, entonces encontramos otras conclusiones:

PAIS DEL TRABAJO	NUMERO DE PREMIADOS
Estados Unidos	9
Francia	4

Inglaterra	4
Italia	1
Rusia	1
Suecia	1

La riqueza, las bibliotecas y los institutos de investigación concentrados en los Estados Unidos cambian la distribución. Teniendo todos los aspectos de los Estados Unidos en mente, no es claro si ésto es bueno ó malo. Entonces, si Ud. es un matemático latino que quiere favorecer a su país, tal vez sería preferible que fuera por algunos años al Instituto de Estudios Avanzados en Princeton, obtuviera su Medalla de Fields y regresara inmediatamente a su país natal.

Comenzaremos nuestro análisis hablando de los campos de segunda importancia para mí. En el álgebra, hay claramente una búsqueda de gran importancia: ésta es la clasificación de los grupos simples de orden finito. El trabajo de J.G. Thompson y W. Feit en los años sesenta, el cual clasifica los grupos solubles de orden impar, es básico y dió esperanzas a otros algebristas. Sobre los grupos de orden par casi nada se conoce, aunque el matemático norteamericano Daniel Gorenstein ha hecho algunos avances. En la dirección de anillos y módulos, el matemático francés, Serre, conjeturó que cada módulo proyectivo y finitamente generado sobre el anillo, $K[x_1, \ldots, x_n]$ de po linomios en n indeterminadas sobre un cuerpo, K, es libre. La conjetura inspiró muchas investigaciones en la K-teoría y en otras subteorías del álgebra. Fué resuelta en 1976 por Daniel Quillen, e independientemente, usando métodos diferentes, por A.A. Suslin. Obviamente hay otros tópicos de investigación seria en el álgebra pero éstos dos, debido a su importancia, atraen a la mayoría de los algebristas.

En la lógica y la fundamentación, una de las búsquedas más importantes de las últimas décadas ha sido el intento de encontrar un nuevo sistema de axiomas para la teoría de conjuntos, tal que la teoría de números (y, por lo tanto, casi todo el resto de las matemáticas) sea más o menos consistente. Sabemos, por Kurt Gödel, que los axiomas de Zermelo-Frankel fallan cuando están sometidos a un análisis lógico intensivo. Pero no existe la certeza de que cada sistema contenga fallas vis-a-vis en las matemáticas que estudiamos hoy en día. El hecho obvio de que los números reales son reales debe manifestarse en algún sistema de axiomas para la teoría de conjuntos.

En la teoría de números, es completamente claro que la conjetura más buscada es la del alemán G. Bernhard Riemann: Si w es un cero no trivial de la extensión analítica de la función Zeta de Riemann,

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

entonces, w se encuentra en la línea, Re(s) = ½, en el plano complejo. La Hipótesis de Riemann, con un conocimiento de la distribución geométrica de las raíces en la línea Re(s) = ½, tiene implicaciones numerosas y significativas para el comportamiento de los primos. Además, hay otros tópicos importantes en la teoría de números, pero ninguno de esta magnitud. En particular, las conjeturas famosas, como la de Fermat sobre $x^n + y^n = z^n$, son miradas sólo como juegos fascinantes.

En el campo de las funciones de varias variables complejas, hay tres o cuatro problemas los cuales ocupan las energías de los más importantes investigadores, como Grauert. La clasificación de los dominios de holomorfía, de las variedades de Stein, y de los dominios seudoconvexos, y la investigación de los ciclos analíticos en una variedad algebraica, no compacta, tienen mucha importancia.

Para una explicación del estado actual del análisis funcional, sistemas dinámicos, y ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, lamentablemente, tenemos que dirigirla a otra fuente.

Recuerde Ud. que mencionamos las palabras del Profesor David Hilbert en 1900. Las primeras son muy importantes para nosotros:

" ¿Quién de nosotros no se alegraría de levantar el velo tras el cual el futuro yace escondido; de echar una mirada a los próximos avances de nuestra ciencia y a los secretos de su desarrollo durante los siglos futuros? ¿Cuáles metas en particular existirán hacia las cuales los más sobresalientes espíritus matemáticos de las generaciones futuras lucharán? ¿Cuáles nuevos métodos y nuevos hechos en el campo, amplio y rico, del pensamiento matemático revelarán los siglos venideros?

La Historia nos enseña la continuidad del desarrollo de las ciencias. Sabemos que cada época tiene sus propios problemas, los cuales la época siguiente resuelve o echa a un lado por ser infructuosos, y los reemplaza con nuevos problemas. Si deseamos obtener una idea sobre el desarrollo probable del conocimiento matemático en el futuro inmediato, debemos dejar que los problemas no resueltos pasen ante nuestras mentes y revisar los problemas que la ciencia de hoy presenta y las soluciones que esperamos del futuro "

D. Hilbert (1900)

El octavo problema de Hilbert en su lista de veintitrés fué la resolución de la Hipotesis de Riemann. Expresado precisamente, Riemann conjeturó en 1859 que la extensión meromórfica de la función Zeta de Euler :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

posee ceros solamente en la línea $Re(s) = \frac{1}{2}$. Más tarde Richard Dedekind y Heinrich Weber extendieron la función Zeta, expresándola en términos de ideales primos del anillo de los enteros algebraicos en un cuerpo finito. Por fin, en su tesis en 1923, Emil Artin formalizó la moderna "Hipotesis de Riemann",

$$| \alpha_i | = \sqrt{q}$$

donde las α_i son coeficientes de un polinomio p de grado 2g correspondiente a una curva de género g sobre un cuerpo finito, F_q. Como ud. ha podido suponer Karl Friedrich Gauss fué el primero que resolvió la Hipótesis moderna sobre cuerpos de característica no cero.

En 1941, André Weil, el sucesor al título del mejor matemático, que anteriormente habían poseído Hilbert, Elí Cartan y Henri Poincaré, presentó dos demostraciones diferentes de la "Hipotesis de Riemann", para una curva de género arbitrario sobre un cuerpo finito. Luego, en 1949, Weil publicó sus conjeturas sobre cómo la "Hipótesis de Riemann" debe presentarse en las variedades algebráicas no singulares, X, sobre un cuerpo finito, F_q. Había cuatro conjeturas y una de estas era la generalización de la "Hipótesis de Riemann" según Artin. En particular, la cohomología de X como una variedad compleja es una parte integrante de las "conjeturas de Weil".

En las tres décadas siguientes, los mejores matemáticos del mundo se dedicaron infructuosamente a resolver las cuatro conjeturas de Weil. Al principio, Serre trató de utilizar los métodos topológicos de Oscar Zariski y William V.D. Hodge, y Weil incorporó la teoría de haces de Jean Leray, Henri Cartan (el hijo de Eli), Serre y otros, y los teoremas de cero de Kodaira y D.C. Spencer. Estos fracasos condujeron a la búsqueda de nuevas teorías de cohomología como la cohomología de vectores de Witt por Serre; la cohomología l-ádica (etale) de Grothendieck y de Michael Artin (hijo de Emil); la cohomología de haces de Leray; la cohomología de formas diferenciales de George de Rham y de Dolbeault (d"); la cohomología cristalina de M. Artin, y otras. Finalmente, en 1957, Grothendieck reformuló toda la geometría algebraica en términos de esquemas, o sea, ciertos functores en la teoría de categorías.

El aspecto más importante de la evolución en la geometría algebraica, desde E. Artin hasta Grothendieck, ha sido la tendencia a generalizar una conjetura, simple pero fuerte, a otra u otras con interpretaciones más ricas. Esta generalización llevó a la creación de teorías potentes que se utilizaron al principio como implementos, pero luego pasaron a ser objetos matemáticos independientes.

En 1973, un jóven matemático belga, Pierre Deligne, demostró todas las conjeturas de Weil usando puntos de vista diferentes a los de sus predecesores.

Actualmente, una gran parte de las investigaciones en la geometría algebraica, está concentrada en el entendimiento y la aplicación de las teorías creadas y usadas por Deligne para alcanzar su triunfo. Además la labor de Deligne ilustra un fenómeno que ha ocurrido a menudo en las ciencias teóricas, y particularmente en las matemáticas. En este caso, el genio Deligne obtuvo el resultado brillantísimo de la resolución de las conjeturas de Weil, en una forma tan acelerada y directa, que en su trayectoria dejó un gran número de resultados muy importantes sin considerar. Como es lógico, muchos otros matemáticos se han dedicado a la investigación de estos resultados.

Existen muchos aspectos de la geometría algebraica que atraen a la mayoría de los genios en las matemáticas. Por esta razón, la geometría algebraica ha sido el campo de investigación de gran parte de los ganadores de las Medallas de Fields. Por ejemplo, la teoría de Hodge es una de las más importantes en las matemáticas, porque relaciona, a través de la cohomología, las integrales de las formas armónicas con varios invariantes topológicos y algebraicos. Dándole la interpretación correcta, esta teoría resulta muy potente. Hace pocos años, Deligne (otra vez!) descubrió la teoría de estructuras mixtas de Hodge, que demuestra tener muchas cualidades. Parece, por ejemplo, que puede ser aplicada con éxito a las variedades resultantes de la aplicación de la teoría de Hironaka de la resolución de las singularidades, la cual es uno de los resultados más importantes de este siglo, (Medalla de Fields de 1970). El matemático norteamericano Philip Griffiths está actualmente ocupado en investigaciones sobre las teorías mixtas de Hodge-Deligne.

También en las variedades complejas y compactas, existe la formula de Riemann-Roch-Hirzebruch que relaciona la integral de un polinomio de J.A. Todd en las clases características de Shiing-Shen Chern, con la característica de Euler-Poincaré. En 1957, Grothendieck generalizó esta fórmula (RRG), pero muchos matemáticos sostienen que es posible generalizarla aún más. Otro problema consiste en entender los "moduli", los cuales son variedades que clasifican objetos algebraico-geométricos. En particular, Mumford, Goro Shimura, Michio Kuga y sus alumnos han realizado grandes avances en el estudio de este problema tan difícil. La antigua teoría (de Dedekind, Kronecker y Hilbert) de los cuerpos de clases sigue siendo un tema no sondeado.

Sin embargo, se espera que la nueva teoría de "motivos" de Deligne (otra vez!) en las manos de él y de Bombieri, H. Cartan, Serre y John Tate pueda avanzar nuestro conocimiento de la teoría de números algebráicos. Además, existen otras ramas de investigación en la geometría algebraica, las cuales pueden ser mejor explicadas en contexto con la geometría diferencial.

Si recordamos que la geometría diferencial de una variedad compleja es, en muchos casos, la geometría algebraica, entonces, podremos entender cómo muchos de los investigadores en la geometría algebraica son geómetras diferenciales. En la geometría diferencial, podemos distinguir dos senderos: (1) la geometría de las variedades, y en particular su identidad como variedades algebraicas, y (2) los teoremas de índices de Atiyah e I.M.Singer. En el primer caso, matemáticos tales como Chern, A. Andreotti y Eugenio Calabi utilizan, entre otros, el método de los espacios fibrados para clasificar las variedades. Hasta ahora los éxitos que han alcanzado descansan solamente en dimensiones bajísimas (≤ 3). En el segundo caso, el poder total del Teorema de Indice de Atiyah-Singer todavía no se conoce bien.

Desde la publicación del Teorema Egregio, de Gauss (1827), uno de los problemas principales de la geometría diferencial ha sido entender la curvatura o mejor dicho, las curvaturas. Una de las direcciones que este estudio ha tomado ha sido la generalización del famoso teorema de Gauss a los teoremas de pellizcamiento. Un Teorema típico de pellizcamiento dice que una variedad compacta M^5 tiene el tipo de homología de una esfera S^5 si las curvaturas seccionales K_π satisfacen $0 \leqslant \delta K_1 \leqslant K_\pi \leqslant K_1$ para cualquier $\delta > 2/11$. El estudio de este campo por H.E. Rauch, W. Klingenberg, Jeff Cheeger, D. Gromoll y otros, es uno de los más dinámicos en la geometría diferencial. Otra dirección en este estudio ha sido la determinación de las posibilidades para la curvatura escalar o la curvatura de Ricci en una variedad topológica. En esta rama, la obra seminal de Jenry Kazden y Frank Warner es de gran importancia. Finalmente, el estudio más interesante en la geometría diferencial es el del espectro del operador laplaciano en las funciones y las formas de una variedad Riemanniana, M. Nuestra meta ha sido descubrir la geometría de M basándonos en el conocimiento de los valores propios, $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots$, de Δ ó de la función "Zeta" asociada.

Sabemos que es imposible distinguir una clase de difeomorfismo, pero es posible establecer una isometría entre M y una esfera ó un espacio proyectivo, ó establecer que M es Kähleriana o posee una cierta característica de Euler-Poincaré. Científicos tales como Marcel Berger, André Lichnerowicz, Harrold Donnely y Peter Gilkey están trabajando en este campo. En efecto, la mayor contribución de Gilkey a la teoría del espectro, y a las matemáticas, en general, ha sido la clasificación de las invariantes geométricas de la variedad. Por ejemplo su método es tan potente que hace posible una prueba del Teorema de Gauss-Bonnet, brevemente contenida en una línea. La extensión de la teoría es un campo muy creciente.

El otro sendero importante en la geometría diferencial está constituído por los teoremas de índices de Atiyah y Singer entre otros matemáticos. Estos teoremas han sido contribuciones fértiles y potentes a las geometrías diferenciales y algebraicas. El teorema de Atiyah y Singer relaciona los polinomios de Todd y ciertas clases de Chern antes mencionadas, con un invariante, llamado el índice, de algún operador elíptico en una variedad M^n. Si P es tal operador entre espacios de Sobolev de formas o funciones, entonces su índice, i(P), es la dimensión de su núcleo menos la dimensión del núcleo de su operador adjunto. Además es posible construír el "símbolo" σ_P de P. Con esta preparación, el Teorema de Indice dice:

$$i(P) = \sum_{k=o}^{n} T_k \; (Ch_{n-k})$$

donde: T_k es el polinomio de Todd en el espacio fibrado tangente complejificado, y Ch_{n-k} es la (n-k)-ésima clase de Chern de un espacio fibrado construído en base al símbolo de P.

Aunque parece muy profundo, su aplicación es fácil:

(1) Sean n par, y $P = d + d^*$ entre las formas de grado par hasta las de grado impar (d^* es el adjunto formal de d). Esencialmente $P = \sqrt{\Delta}$. Entonces el Teorema de Indice es el Teorema de Gauss-Bonnet.

$$\int_M r = \chi(M)$$

(2) Sean $n = 4k$ y P como en el primer ejemplo con dominio y rango, el espacio de las formas en el 1-espacio propio del operador $*$ de Hodge. Luego, el teorema de índice expresa la signatura $S(M)$ de Hirzebruch de M en términos de las clases de Pontryagin. Este es el teorema clásico de índice de Hirzebruch.

(3) Sea M^{2m} Kähleriana y $P = \bar{\partial}_r : \Lambda^{r,s} \to \Lambda^{r,s+1}$. Entonces al mismo tiempo, el teorema de índice de Atiyah-Singer produce el teorema de índice de Hodge $(S(M) = \sum_r i(\bar{\partial}_r))$ y el teorema de Riemann-Roch-Hirzebruch, ya mencionado.

Hay varias demostraciones del Teorema de Indice de Atiyah-Singer y puesto que utilizan los implementos más potentes, quisieramos mencionar algunas: (i) La prueba original en 1963 por Atiyah y Singer utilizaba cobordismo; (ii) otra, en 1968, por los mismos, incorporaba el Teorema de Periocidad de Raoul Bott y la K-teoría de Grothendieck; y (iii) en 1973 Atiyah, Bott y Patodi demostraron el teorema de índices a través de la ecuación del calor.

Hoy en día, las investigaciones en este campo fascinante tratan de entender el índice módulo 2, el G-índice y el índice de familias de operadores. Este último muestra una conexión profunda entre el teorema de índice y la K-teoría.

Los otros campos de los grupos de transformaciones, variedades de dimensión infinita y el del autor, estructuras casicomplejas también tienen importancia.

Un implemento clave en todas las geometrías y las topologías es la topología algebraica, que incluye la homotopía, la homología y la cohomología de un espacio topológico. Hoy en día existen dos nuevas teorías en la topología algebraica, que poseen grandes posibilidades de ser útiles en la demostración de conjeturas importantes. En los trabajos recientes de Deligne, Dennis Sullivan, John Morgan y Griffiths en las variedades Kählerianas, la teoría de la homotopía racional de Sullivan ya ha demostrado que es muy poderosa. También la teoría de localización de M. Kan y Sullivan, extendida por Peter Hilton y Gilbert Baumslag, está produciendo muchos resultados significativos en la topología geométrica, la teoría de grupos nilpotentes y la geometría algebraica.

En la topología geométrica podemos distinguir tres problemas de máxima importancia. Estos están involucrados en la relación entre las categorías de las variedades topológicas (TOP), de las variedades lineales por partes (PL), y de las variedades C^{∞}, (DIFF). La Conjetura de Triangulación dice, esencialmente, que una variedad topológica es homeomorfa a una variedad lineal por partes. El Hauptvermutung expresa que tal estructura PL es única. La Conjetura de Poincaré dice que una n-variedad compacta, que posea la misma homotopía que S^n, es homeomorfa a S^n. Rado demostró la primera Conjetura de Triangulación para $n \leqslant 2$ en 1924; Edwin Moise probó ésta y el Hauptvermutung para $n = 3$ en 1951; y el trabajo de R.C. Kirby y Larry Sieberman en las manos de Bruce Edwards produjo una demostración, para todas las n, de la Conjetura de Triangulación en el presente año. La segunda conjetura, o sea el Hauptvermutung, es falsa. La famosa Conjetura de Poincaré fué demostrada para $n \leqslant 2$ y $n \geqslant 5$, durante la primera parte de la década del sesenta, por Smale, John Stallings y M.H.A. Newman. La inhabilidad de probarla para $n = 3$ parece que es debida a los métodos de demostración. Sin embargo, el caso n = 4 es un gran problema en la topología geométrica. Esencialmente no conocemos nada sobre las variedades de dimensión cuatro, aunque vivimos en una variedad de cuatro dimensiones. Es cierto que la búsqueda de más conocimientos sobre las M^4 y de aún más ejemplos de éstas es el foco de la gran parte de las investigaciones en este campo. Tal vez los implementos del cobordismo de Thom y Smale y de la cirugía de C.T.C. Wall puedan continuar siendo útiles en dicha búsqueda.

La topología diferencial esta caracterizada, hoy en día, por dos teorías importantísimas. La teoría de foliaciones, de varios niveles de diferenciabilidad, ha sido una de las más fructuosas teorías en todas las matemáticas. La teoría de foliaciones es la construcción, si es posible, de una descomposición de una variedad en subvariedades de una manera regular, tal que, localmente, la variedad parece rayada por las subvariedades. Después de que André Haefliger y Bott realizaron un gran progreso en la década del cincuenta, el campo de las foliaciones experimentó avances importantes en el trabajo de Blaire Lawson y William Thurstor en nuestra década. Todavía hay mucho por hacer en este campo tan interesante.

El análisis armónico en grupos semi-simples, ejemplificado en los trabajos de Harish-Chandra, Lanteoría de localización de M. Kan y Sullivan, extendida por Peter Hilton y Gilbert Baumslag, está produciendo muchos resultados significativos en la topología geométrica, la teoría de grupos nilpotentes y la geometría algebraica.

En la topología geométrica podemos distinguir tres problemas de máxima importancia. Estos están involucrados en la relación entre las categorías de las variedades topológicas (TOP), de las variedades lineales por partes (PL), y de las variedades C^∞, (DIFF). La Conjetura de Triangulación dice, esencialmente, que una variedad topológica es homeomorfa a una variedad lineal por partes. El Hauptvermutung expresa que tal estructura PL es única. La Conjetura de Poincaré dice que una n-variedad compacta, que posea la misma homotopía que S^n, es homeomorfa a S^n. Rado demostró la primera Conjetura de Triangulación para $n \leqslant 2$ en 1924; Edwin Moise probó ésta y el Hauptvermutung para $n = 3$ en 1951; y el trabajo de R.C. Kirby y Larry Sieberman en las manos de Bruce Edwards produjo una demostración, para todas las n, de la Conjetura de Triangulación en el presente año. La segunda conjetura, o sea el Hauptvermutung, es falsa. La famosa Conjetura de Poincaré fué demostrada para $n \leqslant 2$ y $n \geqslant 5$, durante la primera parte de la década del sesenta, por Smale, John Stallings y M.H.A. Newman. La inhabilidad de probarla para $n = 3$ parece que es debida a los métodos de demostración. Sin embargo, el caso n = 4 es un gran problema en la topología geométrica. Esencialmente no conocemos nada sobre las variedades de dimensión cuatro, aunque vivimos en una variedad de cuatro dimensiones. Es cierto que la búsqueda de más conocimientos sobre las M^4 y de aún más ejemplos de éstas es el foco de la gran parte de las investigaciones en este campo. Tal vez los implementos del cobordismo de Thom y Smale y de la cirugía de C.T.C. Wall puedan continuar siendo útiles en dicha búsqueda.

La topología diferencial esta caracterizada, hoy en día, por dos teorías importantísimas. La teoría de foliaciones, de varios niveles de diferenciabilidad, ha sido una de las más fructuosas teorías en todas las matemáticas. La teoría de foliaciones es la construcción, si es posible, de una descomposición de una variedad en subvariedades de una manera regular, tal que, localmente, la variedad parece rayada por las subvariedades. Después de que André Haefliger y Bott realizaron un gran progreso en la década del cincuenta, el campo de las foliaciones experimentó avances importantes en el trabajo de Blaire Lawson y William Thurstor en nuestra década. Todavía hay mucho por hacer en este campo tan interesante.

El análisis armónico en grupos semi-simples, ejemplificado en los trabajos de Harish-Chandra, Langlands y otros, es otro de los campos más profundos de las matemáticas. Tanto que resulta demasiado tratar de explicarlo aquí.

Recientemente, Thom y Christopher Zeeman han desarrollado la teoría de catástrofes, la cual está relacionada con la de las singularidades de las funciones diferenciables. La clasificación completa de las catástrofes permite un análisis analítico de fenómenos no contínuos, como la ruptura de una viga, la erupción de una manifestación estudiantil, una crisis en la bolsa de valores, ó la transmisión de una onda en el corazón. Todavía las sugerencias de sus aplicaciones corren muy por delante de su base rigurosa, pero muchos matemáticos están trabajando en este tópico.

Es muy propicio que terminemos nuestro análisis con la teoría de las catástrofes porque así tendremos que responder a la pregunta: "¿Cuáles serán las oleadas del futuro?" Entonces es posible decir inmediatamente: (1) la homotopía racional de Deligne, Sullivan, Morgan y Griffiths, y (2) la teoría de catástrofes de Thom y Zeeman. Ambos prometen grandes descubrimientos en el futuro.

También, contamos con otras teorías muy potentes además de las dos ya mencionadas:

(i) El espectro del laplaciano,

(ii) las estructuras mixtas de Hodge-Deligne,

(iii) la teoría de invariantes de Gilkey,

(iv) la teoría de "moduli" de Mumford y otros,

(v) la teoría de localización de Sullivan y Hilton.

Y para resolver y extender estas teorías, contamos con una colección de algunos de los mejores matemáticos de la historia. En particular la opinión universal es que el joven Pierre Deligne es el mejor matemático que tenemos y el próximo ganador de la Medalla de Fields. Deligne está muy por encima de Weil; Grothendieck y Serre, y probablemente al mismo nivel de Poincaré. Somos muy afortunados al ser sus contemporáneos. Aparte de Deligne tenemos otros matemáticos de altísima calidad. Entre ellos se encuentran:

M., Artin
E., Bombieri
C., Fefferman
P., Gilkey
P., Griffiths
S., Hawking
H., Hironaka
R., Langlands
B., Mazur
D., Mumford
D., Quillen
D., Sullivan
W., Thurston

Espero sinceramente que todos podamos colaborar en, o por lo menos, entender sus trabajos.

***

Case Western Reserve University.

Texto de la conferencia presentada por el autor en el VII Coloquio Colombiano de Matemáticas, Cali, Agosto de 1977.

N. del E.