Boletín de Matemáticas
Vol. XIII (1979), págs. 1 - 50

ANALISIS Y PROBABILIDAD *

por

Jairo Alvarez G.

Introducción. Durante los últimos años se ha podido observar en Colombia un creciente interés por la Teoría de Probabilidad. Este interés alcanza a reflejarse a nivel de los planes de estudio de matemáticas, a través de cursos como Probabilidad, Estadística, Procesos Estocásticos etc., que han ido obteniendo una verdadera importancia dentro de su estructura curricular. No obstante lo anterior,

* Trabajo presentado en el VII Coloquio Colombiano de Matemáticas. Cali, 1977

la visión preponderante que existe de la Probabilidad, en nuestro medio, es la de una rama aplicada de la Matemática, cuyos resultados y métodos están referidos únicamente a la formulación de modelos matemáticos para el estudio de problemas (fenómenos) aleatorios, que se generan en disciplinas exteriores a la matemática como la demografía, la biología, la física, etc., pero que no tiene conexiones, ni aplicaciones de importancia dentro del cuerpo teórico mismo de la matemática.

Esta es, sin duda, una visión limitada, que corresponde a una situación superada históricamente en el desarrollo de la teoría de probabilidad.

La probabilidad es hoy, una rama legítima de la matemática, no solo porque posee una problemática, métodos propios y una aplicabilidad que nadie discute sino, también, porque el cuerpo de sus resultados ha alcanzado una adecuada fundamentación y estructuración con entronques claros con todo el edificio de la matemática contemporánea.

El propósito de este trabajo es contribuír a ampliar la visión que se tiene, en nuestro medio, de la Teoría de Probabilidad, dando una visión, aún así sea esquemática, de importantes interacciones e intersecciones que se han generado entre el análisis clásico y la probabilidad y que han abierto las puertas a la aplicación de métodos probabilísticos al estudio de problemas analíticos.

El trabajo incluye:

1) Una visión esquemática del desarrollo histórico de la probabilidad, hasta ubicar los temas que queremos tratar aquí.

2) Una aplicación de la ley de los grandes números a la demostración de aproximación de Weierstrass.

3) La definición del movimiento Browniano como un proceso de Markov.

4) La descripción de algunos temas centrales de la teoría clásica del potencial.

5) El análisis de las conexiones estructurales entre el movimiento Browniano y la teoría del potencial.

6) Finalmente, utilizando las analogías con el movimiento Browniano, se extiende a una marcha simétrica al azar en el espacio, la formulación y solución del problema de Dirichlet. Se sigue, en este caso, un ejercicio propuesto por Dynkin [12], así como sus sugerencias generales para resolverlo.

1. Perspectiva histórica del desarrollo de la Probabilidad.

La Probabilidad, como teoría matemática, tiene su origen histórico en el Siglo XVII en los trabajos de B. Pascal y P. Fermat, quienes estudiaron y resolvieron problemas de apuestas asociadas con juegos de azar que eran populares en la época. La definición de probabilidad, que hoy se conoce con el nombre de probabilidad clásica, que describe todo juego de azar en base a resultados simétricos de igual probabilidad, prácticamente ya existía antes de Pascal y Fermat, pero ellos fueron los primeros en establecer los principios que permitieron desarrollar una aritmética probabilística y resolver problemas aplicados al respecto, ([4]).

En particular, ellos resolvieron el problema de apuestas equitativas para diferentes tipos de juegos. Sin embargo, su trabajo no trasciende el marco de los juegos de azar.

El primer gran desarrollo teórico de la probabilidad puede asociarse con las obras, casi contemporáneas, de J. Bernoulli , De Moivre, Gauss, Poisson y Laplace realizadas a finales del Siglo XVII y durante todo el Siglo XVIII. Estos autores, al introducir el aparato matemático de la época al estudio de problemas relacionados con fenómenos de azar, abrieron las puertas al gran desarrollo y aplicabilidad de la teoría de probabilidad, que trascendió el marco de los juegos de azar y vino, posteriormente, a configurar la probabilidad como una nueva rama de la matemática pura.

En su libro el "Arte de la Conjetura", J. Bernoulli presenta, por ejemplo, el antecedente histórico de la versión moderna de la ley de los grandes números, hoy conocida como el Teorema de Bernoulli; que constituye uno de los resultados centrales de la Teoría de Probabilidad. Este Teorema al dar el fundamento matemático de la noción intuitiva de regularidad estadística, permite ligar, los resultados de la teoría de probabilidad con una comprobación experimental estadística que es causa principal de la gran aplicabilidad que ha alcanzado la teoría de probabilidad ([2], [4]).

Por su parte A. de Moivre, con su libro "La Doctrina de las Probabilidades", publicado en 1718, donde aparece por primera vez la regla de la multiplicación, da gran impulso y difusión a la teoría de la probabilidad. En la segunda edición de esta obra, publicada en 1738, aparece (al parecer por primera vez) la distribución normal y su utilización en una fórmula de aproximación de la distribución binomial. Esta fórmula, mejorada posteriormente por Laplace, conduce al teorema conocido hoy como de De Moivre-Laplace, cuya generalización se conoce como Teorema Central del Límite, otro de los resultados fundamentales de la teoría de probabilidad. ([2], [3], [4]).

Esta primera etapa del desarrollo de la teoría de probabilidad, tiene su punto culminante en el libro de Laplace "Teoría Analítica de las Probabilidades", que aparece en 1812 y en el cual se recogen y se sistematizan los resultados de autores anteriores y se presentan numerosas aplicaciones de la teoría de probabilidad. Laplace permanece, sin embargo, atado a la definición clásica de probabilidad ([2], [4]), a pesar de que en distintas aplicaciones de la probabilidad, diferentes de los juegos de azar, la concepción de los resultados simétricos de igual probabilidad era difícilmente aplicable y estaban planteando la necesidad de revisar dicha definición.

La obra de Laplace marca una época de gran difusión y utilización de la teoría de probabilidad. Durante el Siglo XIX, la probabilidad es utilizada no sólo en el análisis estadístico de poblaciones, que sirve de base para el desarrollo de la matemática actuarial, sino que se extiende a la Física con la Mecánica Estadística desarrollada por Maxwell, Boltzman y Gibbs ([2]). El mismo Laplace, paralelamente a Gauss, aplicó métodos probabilísticos al estudio de errores provenientes de mediciones físicas, desarrollando así una teoría de errores de gran importancia en las ciencias experimentales.

Después de Laplace, y a pesar de la difusión mencionada, la probabilidad sufre un largo receso teórico que sólo viene a ser superado a finales del siglo, por la matemática Rusa, iniciándose, la que podría llamarse, segunda gran etapa de su desarrollo. Esta etapa está asociada fundamentalmente a los nombres de Chebyshev y sus alumnos Lyapunov y Markov, ([3]) quienes introducen el concepto de variable aleatoria y extienden y demuestran, en forma rigurosa, los teoremas sobre límites de variables independientes, ley de los grandes números (Chebyshev) y Teorema Central del Límite (Lyapunov), mientras que Markov inicia el estudio de los procesos de Markov a principios del Siglo. No obstante este gran resurgimiento teórico de finales del Siglo pasado y principios del presente, la probabilidad seguía teniendo las características de un conjunto de resultados particulares aislados sin una ordenada fundamentación y sustentación. Tal como dice Feller ([1]), "pocos matemáticos fuera de la Unión Soviética consideraban la probabilidad como una rama legítima de la matemática".

El trabajo de Kolmogorov, iniciado hacia 1920, en el cual se alcanza una formulación axiomática de la teoría de probabilidad utilizando conceptos básicos de la teoría de la medida y la variable real, y en la cual se superan las dificultades de la definición clásica, le da a la probabilidad dicha categoría ubicándola, a nuestra manera de ver, como una rama del análisis. El estudio de la teoría de los procesos de Markov, iniciado por éste a principios del Siglo y cuya teoría general es desarrollada hacia 1930 por Kolmogorov, Feller, Levy y otros, pone en evidencia conexiones importantes entre la rama de los procesos de Markov de trayectorias continuas y el estudio de los operadores diferenciales de segundo orden. En 1923 Wiener, al fundamentar en términos probabilísticos los trabajos de Einstein sobre el movimiento Browniano, da la primera construcción rigurosa de un proceso de Markov con trayectorias continuas. ([6], [9]). En 1945 Kakutani demuestra que la solución del problema clásico de Dirichlet está asociada con la esperanza matemática de variables aleatorias determinadas por el movimiento Browniano. Posteriormente, en la década del 50, los trabajos de Doob y Hunt desarrollan las conexiones estructurales entre los procesos de Markov, particularmente, del movimiento Browniano, con la teoría clásica del potencial, que permiten demostrar la equivalencia matemática de ambas teorías.

Queremos destacar, finalmente, que aunque la probabilidad ha desarrollado sus métodos y herramientas propias, la utilización, en su momento, de resultados y teorías de otras ramas de la matemática, principalmente del análisis, ha sido factor fundamental en todo su desarrollo, muy especialmente en la configuración de las tres grandes etapas que hemos esquematizado anteriormente. Por su parte, la teoría de probabilidad que tiene sus orígenes en problemas de azar, que no se plantearon inicialmente en la Física, fuente principal de los problemas que han dado impulso al desarrollo del análisis, ha ido evidenciando, cada día, mayores conexiones con el análisis. Estas conexiones se presentan, a veces, como aplicaciones de la probabilidad a demostraciones de resultados conocidos, pero en el caso de los procesos de Markov y la teoría del potencial llevan a las conexiones estructurales que son el tema central de este ensayo, y que, como se ha dicho, han permitido utilizar métodos probabilísticos en el estudio de problemas analíticos.

2. Una Demostración Probabilística del Teorema de Aproximación de Weierstrass. ([5])

Sea f una función real acotada superiormente por M y definida en el intervalo $[0,1]$. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ las variables aleatorias independientes, que describen una sucesión de observaciones de Bernoulli, las cuales toman el valor 1 (éxito) con probabilidad x y 0 (fracaso), con probabilidad $1 - x$. Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la suma de éxitos en las n primeras observaciones. Recordando que "la probabilidad de obtener k éxitos en las primeras observaciones" $= P_x(S_n = k)$, está dada por la expresión $P_x(S_n = k) = \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$, se pueden escribir las siguientes igualdades:

$$E_n(x) = E_x\left[f(S_n/n)\right] = \sum_{k=0}^{n} f(k/n)P_x(S_n = k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$

Lo que permite ver que la esperanza matemática $E_n(x)$ es un polinomio en x, de grado n.

Queremos mostrar que, para n suficientemente grande, $\sup_{x\in[0,1]}|E_n(x) - f(x)|$ se hace arbitrariamente pequeño. En efecto, se puede escribir

$$|f(x)-E_n(x)| = |E_x[f(x)-f(S_n/n)]| \leqslant$$

$$\sum |f(x)-f(k/n)|P(S_n = k).$$

Si f es continua en $[0,1]$, lo será uniformemente, y por lo tanto para $\varepsilon > 0$, se puede escoger $\delta > 0$, tal que $|f(y)-f(z)| < \varepsilon/2$, siempre que $|y-z| \leqslant \delta$, lo que permite transformar la desigualdad anterior de la siguiente manera:

$$|f(x)-E_n(x)| \leqslant \sum_{|x-k/n|\leqslant\delta} |f(x)-f(k/n)|P(S_n=k) +$$

$$\sum_{|x-k/n|>\delta} |f(x)-f(k/n)|P(S_n=k)$$

$$\leqslant \varepsilon/2 + 2M \sum_{|x-k/n|>\delta} P(S_n=k)$$

$$\leqslant \varepsilon/2 + 2M\, P(|x-S_n/n)| > \delta).$$

Utilizando la desigualdad de Chebyshev, se sabe que en el caso de observaciones independientes de Bernoulli, $P(|x-S_n/n| > \delta) \leq 1/4n\delta^2$, desigualdad que no depende de x. Es decir que, para n suficientemente grande, se puede hacer $2M\ P(|x-S_n/_n|>\delta) < \varepsilon/2$ independientemente de x en $[0,1]$ y, por lo tanto, $|f(x)-E_n(x)| < \varepsilon$, para todo x en $[0,1]$, que es exactamente lo que se quería probar. En otras palabras, los polinomios $E_n(x)$ aproximan a f uniformemente.

3. El Movimiento Browniano como un Proceso de Markov.

3.1 Definición: Tal como se dijo en la parte histórica, el estudio del movimiento Browniano está íntimamente ligado al surgimiento y desarrollo de los procesos de Markov. Con el propósito de dar su descripción matemática consideremos el movimiento de una partícula en el espacio, que sigue un movimiento Browniano sin barreras, y que inicia su recorrido en un punto x. Al cabo del tiempo t, sea $X(t)$ su posición en $\mathbb{R}^3$ y $p_t(x,E)$ la probabilidad de que la partícula esté en el conjunto E.

Considerando intervalos pequeños de tiempo y partiendo deque en intervalos co. secutivos $[r,s]$ y $[s,t]$ los desplazamientos $X(t)-X(s)$, $X(s)-X(r)$ son fenómenos independientes, Einstein demostró que la función de densidad $\eta(t,x)$ asociada con la función de probabilidad $p(t,x,\cdot)$ debía satisfacer a la ecuación de difusión:

$$\partial\eta(t,x)/\partial t = D\eta(t,x) \; ,$$

siendo D una constante positiva ([9]). Tomando $D = 1/2$, se puede concluír que $\eta(t,x) = (2\pi t)^{-3/2} \exp\left[-|x|^2\right]$, es decir, la probabilidad de que, al cabo del tiempo t, la partícula esté en el conjunto E , está dada por la expresión

$$p(t,x,E) = \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} \int_E \exp\left(-|y-x|^2/2t\right)dy$$

Al variar t, la partícula describirá una trayectoria típica w . Puesto que la partícula ha de seguir una trayectoria continua, se puede tomar al espacio de todas las curvas continuas, definidas en $[0,\infty)$ y que toman valores en $\mathbb{R}^3$, como el conjunto de todas las trayectorias posibles en el movimiento Browniano, es decir como su espacio muestral Ω . Considerando en este espacio la σ-álgebra de eventos $\beta(\Omega)$, generada por los eventos del tipo $(X(t) \in E)$, donde t varía en $[0,\infty)$ y E es un conjunto arbitrario de Borel en $\mathbb{R}^3$, para un x fijo, la familia $(p(t,x,\cdot))_{t\geq 0}$ induce la existencia de una función de probabilidad única P_x , definida sobre $\beta(\Omega)$. Con este enfoque, los vectores aleatorios $X(t)$, que dan la posición de una partícula al cabo de un tiempo t, se pueden considerar definidos sobre el espacio de probabili dad $(\Omega, \beta(\Omega), P_x)$ tales que $X(t)(w) = w(t)$. Esta familia de variables aleatorias define, por lo tanto, un proceso estocástico, conocido como proceso de Wiener, que se puede caracterizar con las siguientes condiciones:

o) $P_x(X_t \in E) = p(t,x,E)$;

i) $P_x(X_o(w) = x) = p(0,x,\{x\}) = 1$;

ii) Para $0 = t_o < t_1 < \ldots < t_n$, los vectores aleatorios $X(t_j) - X(t_{j-1})$, $j = 1, \ldots, n$, son mutuamente independientes y

$$P_x((X(t_j)-X(t_{j-1})\in E) = \left[2\pi(t_j-t_{j-1})\right]^{-\frac{3}{2}} \int_E \exp\left[-\frac{|y-x|^2}{t_j-t_{j-1}}\right] dy$$

Denotaremos con $E_x[\cdot]$ la esperanza matemática respecto de P_x.

Si se considera que el movimiento no se origina en un punto fijo; sino en un punto aleatorio con distribución de probabilidad μ la probabilidad de cualquier evento A en Ω se calcula según la relación $P_\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^3} P_x(A)\mu(dx)$. En particular, si

$A = (X(t) \in E)$.

$$P_\mu(X(t) \in E) = \int_E p(t,xE)\mu(dx) \qquad ([12])$$

3.2 Propiedad Markoviana: En general, el movimiento se puede originar desde cualquier punto x en $\mathbb{R}^3$, por lo cual disponemos de una familia de distribuciones de probabilidad, de doble índice, $\{p(t,x,\cdot)\}_{t>0}^{x\in\mathbb{R}^3}$, que "controlan" los desplazamientos $X(t)$ de la partícula, según sea el punto de orígen del movimiento y que se conocen con el nombre de "probabilidades de transición del movimiento". Tenemos pues, el conjunto de todos los movimientos posibles de la partícula, con origen diferente, que matemáticamente constituyen un conjunto de procesos estocásticos y que son, en definitiva, el modelo matemático probabilístico que describe el movimiento Browniano.

Una propiedad muy importante de este movimiento es que el pasado no afecta el futuro. Es decir, la posición de la partícula en el futuro $t+s$, está determinada por su posición en el presente t y no depende, para nada, de sus posiciones en el pasado $t-s$. Esta propiedad, llamada Markoviana, se recoge matemáticamente, en la ecuación

$$p(t+s, x, E) = \int_{\mathbb{R}^3} p(s, y, E)\, p(t, x, dy) ,$$

que se conoce como "la ecuación de Chapman-Kolmogorov". En otras palabras, el proceso estocástico $Y(s) = X(t+s)$, es un proceso de Wiener con distribución inicial $p(t,x,\circ)$.

En realidad esta propiedad Markoviana es aún más fuerte, en este caso, pues ella se conserva si el tiempo t, que es un tiempo fijo, se reemplaza por un tiempo aleatorio τ. Por ejemplo, una partícula que inicia su movimiento en el origen 0, toma un tiempo aleatorio τ_r en "visitar" o "tocar", por primera vez, la superficie de una esfera B de radio r, pero posteriormente a este tiempo de llegada "a la superficie" de la esfera, el movimiento de la partícula mantiene su carácter Browniano, independiente de su pasado. En otras palabras, el proceso $Y(t) = X(t + \tau_r)$ puede considerarse como un proceso de Wiener con distribución inicial $\Pi_r(\cdot)$ definida por la expresión $\Pi_r(E) = P(X(\tau_r)\in E)$, $E \subset \partial B$.

Digamos, finalmente, que el movimiento Browniano es, matemáticamente, un proceso de Markov en cuanto que esta definido por una colección de procesos estocásticos $\{(X(t))_{t\geq 0}, (\Omega, \beta(\Omega), P_x\}_{x\in\mathbb{R}^3}$, que satisfacen la propiedad Markoviana y que por cumplir además, la propiedad Markoviana fuerte, y tener trayectorias continuas, se llama también proceso Markoviano fuerte ó proceso de difusión.

3.3 <u>Tiempo de Escape</u>. Consideremos el movimiento de una partícula que se inicia en un punto x interior a un conjunto D, abierto, conexo y acotado. Sea τ el tiempo aleatorio de su primera salida (tiempo de escape) del conjunto D. También se pue_ de considerar como el tiempo de su primer "paso" o "visita" a ∂D. Un resultado importante es que la partícula, eventualmente, sale de D, y que en promedio este tiempo es finito. Simbólicamente, $P_x(\tau < \infty) = 1$ y $E_x[\tau] < \infty$. En particular la expresión $\Pi(x, E) \equiv P_x(X(\tau) \in E)$, $E \subset \partial D$, que puede ser leída como "la probabilidad de que la partícula al golpear por primera vez a ∂D lo haga en el subconjunto E de ∂D", define una función de probabilidad (llamada distribución armónica) sobre eventos que son subconjuntos de Borel de la superficie ∂D.

El que la partícula, escape con probabilidad 1 del conjunto D, se puede demostrar de una manera simple ([12]), reduciendo el problema al caso particular de una esfera con radio r y la partícula iniciando su movimiento en el centro de la misma. Si la partícula permanece dentro de la esfera hasta el tiempo $t = n$, todos los desplazamientos $X(1) - X(0)$, $X(2) - X(1)$, ..., $X(n) - X(n-1)$, que son independientes y tienen la misma distribución, serán menores a $2r$, en su norma. Consecuentemente,

$$P_o(\tau \geq n) \leq P_o\{(|X(1)-X(0)| < 2r, \ldots, |X(n)-X(n-1)| < 2r)\} \leq P_o\{(|X(1) - X(0)| < 2r)\}^n = \alpha^n$$

Donde α^n es necesariamente menor que 1. Por lo tanto, $P_o(\tau = \infty) \leq \alpha^n$, para todo n, no negativo; lo que implica $P_o(\tau = \infty) = 0$. O lo que es lo mismo, $P_o(\tau < \infty) = 1$.

Una observación interesante, por otra parte, es la siguiente. Si el punto $x \notin \overline{D}$ y τ se toma como el tiempo de la primera visita a ∂D, $P_x(\tau < \infty) < 1$. Es decir que, eventualmente, la particula no volverá a retornar a $\overline{D}$. Se dice en estos casos que D es transitorio o no-recurrente. En el caso del movimiento Browniano en la recta o en el plano, conjuntos abiertos y acotados son recurrentes.

4. Los Temas de la Teoría del Potencial.

4.1 El Potencial de una carga. La teoría del potencial es un área muy extensa del análisis clásico que tiene su origen en problemas de la física, que tocan con el estudio de la Ley de Coulomb y la atracción de cargas eléctricas ó, en general, con el estudio de fuerzas semejantes a las caracterizadas por la Ley Newtoniana de la gravitación Universal. Según la Ley de Coulomb, por ejemplo, dos cargas puntuales en el universo se atraen o se repelen con una fuerza cuya dirección está definida por la línea que conecta ambas cargas y cuya magnitud es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. Si se considera una distribución de carga eléctrica en una región del espacio, de suerte que el valor de la carga en cada punto está dada por una función f, el potencial en un punto x, debido a la distribución de carga definida por f , $U(x,f)$, se define como el trabajo necesario para traer una unidad de carga desde el infinito al punto x .

Se demuestra que este trabajo está dado por la expresión

$$U(x,f) = \frac{1}{2\Pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)dy}{|x-y|}$$

La teoría clásica del potencial está pues referida al estudio de las propiedades de los potenciales, las relaciones potencial-carga y, en general, de otras cantidades y conceptos definidos en términos de ellos.

En la teoría del potencial, el estudio del operador laplaciano $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv \Delta\right)$, que se aplica a funciones que son doblemente diferenciables en alguna región, juega un papel central. Por ejemplo, el operador Laplaciano resulta ser el operador inverso del operador potencial en el sentido que aplicado sobre un potencial dado nos permite recuperar la distribución de carga que lo produce. En efecto, si la distribución de carga f es continua y acotada $(Uf)(x)$ es doblemente diferenciable y

$$\Delta(Uf)(x) = -2f(x) \qquad ([13]) \text{ (Ec. de Poisson)}$$

Esta ecuación permite ver que el laplaciano del potencial se anula en las regiones del espacio sobre las cuales no se distribuye la carga, vale decir en los puntos del espacio libres de carga.

En general, una función u, doblemente diferenciable es un conjunto abierto D, tal que $\Delta u = 0$, se dice que es una función armónica. Según lo anterior los potenciales son funciones armónicas en los puntos del espacio libres de carga.

4.2 <u>Las Funciones Armónicas</u>. El estudio de las funciones armónicas constituye prácticamente el tema central de la teoría clásica del potencial. Tal como dice O.D. Kellog ([10]) "A medida que se avanza en la teoría del potencial resulta evidente que la teoría del potencial puede ser considerada, matemáticamente, como la teoría de una cierta ecuación diferencial conocida como ecuación de Laplace" ($\Delta f = 0$). Las funciones armónicas presentan propiedades sorprendentes e interesantes. Una de ellas, y que juega un papel muy importante en la teoría del potencial, es el principio del máximo. Una función u, definida sobre un conjunto conexo y abierto D, obedece el principio del máximo si ella no puede alcanzar en D un valor igual a su superior [Sup $(u(x): x \in D)$], a no ser que sea constante. De manera semejante se define el principio del mínimo. Las funciones armónicas satisfacen ambos principios.

Mirando las propiedades anteriores desde otro ángulo ellas nos dicen que si u es una función armónica en $D \cup \partial D$, siendo D un conjunto abierto conexo y ∂D su frontera, u debe alcanzar sus valores máximo y mínimo sobre ∂D. Resultado que a su vez nos lleva a ver que las funciones armónicas están completamente definidas por sus valores en la frontera en el siguiente sentido. Si u y v son dos funciones armónicas definidas sobre $D \cup \partial D$, tales que $u = v$ sobre ∂D entonces $u = v$ sobre D.

El principio del máximo y del mínimo, de las funciones armónicas, se demuestra apoyándose en la propiedad, igualmente sorprendente, de ser valoradas en forma promedio. En efecto, se demuestra ([13]), que si u es una función armónica, definida en un conjunto abierto D y $B_r(x)$ es una esfera centrada en x, de radio r y contenida en D, entonces

$$u(x) = \frac{1}{4\Pi r} \int_{\partial B_r} u(y)dS = \frac{1}{4\Pi r^3} \int_{B_r} u(y)dV .$$

Es decir, que el valor de u en x es igual a su valor promedio, cuando dicho promedio se toma sobre la superficie o sobre todo el volumen de una esfera centrada en x.

La conexión entre esta propiedad y la del máximo no es difícil de ver. Suponga, por ejemplo, que una función u continua, es valorada en forma promedio en un conjunto D abierto y conexo en $\mathbb{R}^3$ y que existe un punto x en D en el cual la función posee un máximo. Se puede determinar una esfera abierta S, de radio δ alrededor de x, tal que para todo $y \in S$, $u(y) \leq u(x)$. Puesto que la función es valorada en forma promedio

$$u(x) - \frac{1}{4\pi r^3} \int_S u(y)dV = \frac{1}{4\pi r^3} \int_S (u(x)-u(y))dV = 0 \ ;$$

lo cual, debido a la no negatividad de $u(x)-u(y)$, solo puede ser si $u(x)-u(y) = 0$ sobre S. Se puede reiterar la argumentación con nuevas esferas centradas en la frontera de la anterior utilizando luego la conexión de D para concluir que para todo y en D, $u(y) = u(x)$. Es decir que si la función u tiene un máximo en D entonces es constante.

4.3 <u>El problema de Dirichlet</u>. Uno de los problemas más antiguos y más estudiados, en la teoría del potencial, que ha tenido gran influencia en la teoría de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de uso en la física, es el llamado problema de Dirichlet que se puede plantear de la siguiente manera. Sea una función real f, definida sobre la frontera ∂R, de un conjunto abierto R. ¿Existe una función h continua sobre $R \cup \partial R$ y tal que $\Delta h = 0$ sobre R y $h = f$ sobre ∂R ? La existencia y unicidad de tal solución ha sido demostrada para una gran variedad de dominios, pero una representación analítica explícita se conoce para muy pocos casos. Por ejemplo, el problema de Dirichlet tiene solución única para dominios llamados de Poincaré, con f continua. Un conjunto R se dice que es un dominio de Poincaré si es abierto y conexo y para cada punto x de su frontera es posible hallar un cono circular, con vértice aplicado en x, que es disjunto de R.

Muy conocida es la solución al problema de Dirichlet para un dominio esférico, dado por la siguiente fórmula, conocida como fórmula de Poisson ([13]).

$$h(x) = \frac{1}{4\Pi\rho} \int_{\partial R} \frac{\rho^2 - \|y-x\|^2}{\|z-x\|^3} f(z)\, d\sigma(z)$$

donde y es el centro de la esfera R y ρ su radio.

4.4 Funciones de Green. El problema de Dirichlet puede ser considerado como un caso particular de un problema más amplio respecto del operador Laplaciano, y que se puede formular de la siguiente manera. Sea R un conjunto abierto y f y g funciones reales definidas sobre ∂R y R respectivamente. ¿Existe una función continua h tal que $\Delta h = g$ sobre R y $h = f$ sobre ∂R ?

Cuando h es una función C^2 en una vecindad abierta de $R \cup \partial R$, R es acotada y ∂R una superficie suave, es posible encontrar una representación de h en términos de sus valores sobre ∂R y de su Laplaciano sobre R, que describimos a continuación.

Para x fijo en R se define la función

$$G(x,y) = \frac{1}{4\Pi} \frac{1}{|y-x|} + \psi(y)$$

siendo $\psi(y)$ una función armónica sobre R.

$G(x,y)$, como función de y, es armónica sobre R excepto cuando $y = x$.

Denotaremos como $D_n G$ y $D_n \psi$ las derivadas de G y ψ en la dirección del vector normal externo de la superficie ∂D. Utilizando la segunda identidad de Green se puede obtener la siguiente representación de h sobre R.

$$h(x) = \int_{\partial D} (G(x,y) D_n h(y) - h(y) D_n G(x,y)) d\sigma(y)$$

$$- \int_{D} G(x,y)\, \Delta h(y) dy$$

Esta fórmula se conoce como tercera identidad de Green.

Si se escoge ψ tal que $\psi(y) = \frac{1}{|y-x|}$ sobre ∂D, entonces $G(x,y) = 0$ sobre ∂D. Si queremos además que $h = f$ sobre ∂D y $\Delta h = g$, la fórmula anterior puede transformarse para obtener la llamada descomposición de Riesz en su versión del Cálculo.

$$h(x) = -\int_{\partial D} f(y) D_n G(x,y) d\sigma(y) - \int_D G(x,y) g(y) dy$$

Y, en particular, si h es armónica se tiene que

$$h(x) = -\int_{\partial D} f(y) D_n G(x,y) d\sigma(y)$$

A pesar de que esta fórmula supone que h es C^2 sobre una vecindad abierta, ella puede ser utilizada para resolver el problema propuesto al principio de esta sección, puesto que en ella sólo intervienen los valores de h sobre ∂D y el valor de su laplaciano sobre D. Bastaría demostrar que la función h, así definida, cumple las propiedades exigidas. En la fórmula anterior, sin embargo, interviene la función G cuya existencia se puede garantizar solo en la medida en que existe la función ψ tal que $\Delta\psi = 0$ sobre D y $\psi = \dfrac{1}{|y-x|}$ sobre ∂D. Es decir, en la medida en que se puede resolver el problema de Dirichlet para el conjunto D con condición de frontera definida por la función $\dfrac{1}{|y-x|}$. En este sentido el problema propuesto y el problema de Dirichlet son equivalentes y su solución se puede reducir a calcular la función G, usualmente conocida como función de Green respecto a D. La existencia de la función de Green se ha demostrado para una amplia variedad de conjuntos pero, su representación explícita, sólo se conoce para unos pocos conjuntos. Se conoce, por ejemplo, la función de Green para esferas y es utilizada para llegar a la fórmula de Poisson ya presentada al hablar del problema de Dirichlet en la sección anterior. [7].

5. Conexiones del Movimiento Browniano y Teoría del Potencial.

Las conexiones estructurales entre el análisis y los procesos de Markov se hacen evidentes a través del estudio de los conceptos "operador de transición", "operador infinitesimal" y "operador característico" de un proceso de Markov. Seguiremos estas conexiones apoyadas fundamentalmente, en el movimiento Browniano que hemos presentado como un proceso de difusión o proceso de Markov fuerte.

5.1 El Semi-grupo de Operadores de Transición.

Las probabilidades de transición $p(t,x,\cdot)$ permiten definir los operadores lineales P_t, de transición, de la siguiente manera:

$$(P_t f)(x) = \int_{R^3} f(y)p(t,x,dy) \quad \text{para } f \text{ acotada.}$$

Los operadores P_t , son operadores lineales que dejan invariante al conjunto C_A de las funciones continuas acotadas y constituyen un semi-grupo, que es continuo. En efecto, utilizando las propiedades de las probabilidades de transición, algunas de las cuales hemos enunciado aquí, se puede demostrar ([11]), que los operadores de transición cumplen las siguientes propiedades.

0) $P_t 1 = 1 \ (1(x) = x)$; $P_t f \geqslant 0$, para $f \geqslant 0$

1) $P_t : C_o \to C_o$. P_t operador lineal con norma

$\|P_t\| \leqslant 1$

2) $P_o f = f$, P_o es el operador idéntico I

3) $P_{t+s} = P_t \circ P_s$ (propiedad de semi-grupo)

4) $(P_t f)(x) \underset{t \to 0}{\to} f(x)$ (continuidad del semi-grupo).

Este semi-grupo de operadores determina unívocamente al movimiento Browniano en el sentido de que a partir de él se pueden recuperar sus probabilidades de transición y por lo tanto su construcción completa.

5.2 <u>El operador o generador Infinitesimal.</u> El operador o generador infinitesimal del movimiento

Browniano se define de la siguiente manera. Para toda $f \in C_A$, para la cual $(1/t)((P_t f)(x)-f(x))$ converge uniformemente cuando t tiende a cero, definimos

$$Af = \lim_{t \to o} \frac{1}{t} |P_t f - f|$$

Se demuestra ([11]) que si C_A^2 es el conjunto de funciones en C_A que son funciones de clase C^2, entonces C_A^2 está contenido en el dominio de A. Más aún, en este caso $Af = \frac{1}{2}\Delta f$, es decir el operador A coincide con el operador laplaciano definido globalmente.

En particular, se puede demostrar que $P_t f \in C_A^2$ (en realidad es C^∞) y, por lo tanto, $P_t f$ está en el dominio del operador A. Es decir, que

$$A(P_t f) = \frac{\partial}{\partial t}(P_t f)(x) = \frac{1}{2}\Delta(P_t f)(x).$$

Debe ser claro que la definición de operador o generador infinitesimal, que hemos dado para el caso particular del movimiento Browniano, puede extenderse a cualquier proceso de Markov. En particular para procesos de difusión este generador infinitesimal es un operador diferencial de segundo orden del tipo

$$\sum a_{ij}(x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} - c(x)f(x).$$

El punto fundamental es que el operador infinitesimal determina completamente al proceso de Markov asociado con él, en cuanto que conociendo el operador infinitesimal se puede reconstruír el semigrupo de operadores de transición y, por lo tanto, el proceso de Markov mismo. Este es el caso del movimiento Browniano para el cual se puede demostrar que $P_t f = \lim_{\lambda\to\infty} \sum_{\lambda=0} \frac{t^k}{k!} \left[\lambda^2(\lambda I - A)^{-1} - \lambda I\right]^k f$ ([8]) ([11]). Se puede establecer bajo qué condiciones un operador lineal permite generar un semigrupo de probabilidades de transición y, por lo tanto, ser el generador infinitesimal de un proceso de Markov ([11]). Se conoce que la construcción de Wiener del movimiento Browniano, se puede extender a cualquier operador elíptico L para el cual se pueda construir una solución fundamental de la ecuación diferencial $\frac{\partial u_t}{\partial t} = Lu_t$.

5.3 <u>La formulación probabilística del potencial Browniano</u>. Utilizando la definición del operador infinitesimal, a través del concepto de operador de transición, descubrimos una primera conexión fundamental entre el Movimiento Browniano y el operador Laplaciano. Sobre esta conexión hemos de insitir más adelante.

Los operadores de transición pueden ser utilizados también para dar la siguiente descripción probabilística del potencial newtoniano de una función.

El potencial de una función f sobre $\mathbb{R}^3$, de soporte compacto, es la función (Gf)(x), definida de la siguiente manera

$$(Gf)(x) = \int_0^\infty (P_t f)(x)dt$$

siempre y cuando dicha integral exista.

Se puede ver que, trasladando la integración al espacio de probabilidad del movimiento Browniano, e intercambiando integrales se llega a la siguiente igualdad

$$(Gf)(x) = E_x \left[\int_0^\infty f(X_t) \right]$$

Las siguientes transformaciones demuestran que, en realidad, Gf es el potencial newtoniano de f. Tome $f \geqslant 0$ y suponga que (Gf)(x), está definido para todo x .

$$(Gf)(x) = \int_0^\infty (2\Pi t)^{-3/2} \left[\int_{\mathbb{R}^3} e^{-|x-y|/2t} f(y)dy \right] dt$$

Intercambiando integrales y efectuando el cambio de variable definido por $|x-y|^2/t = u$ se tiene

$$(Gf)(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \left[\int_0^\infty \frac{2|x-y|^{-1}}{(2\Pi)^{3/2}} e^{-u^2/2} du \right] f(y)dy$$

$$= \frac{1}{2\Pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)dy}{|x-y|} \left[2 \int_0^\infty (2\Pi)^{-1/2} e^{-u^2/2} du \right]$$

$$= \frac{1}{2\Pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)dy}{|x-y|}$$

El operador G es en realidad un operador lineal, que puede definirse en el rango del operador infinitesimal y que resulta siendo su inverso. En efecto, se puede demostrar que $A(Gf) = -f$, lo cual no es otra cosa que la ecuación de Poisson.

Como en el caso del operador infinitesimal, es posible extender la definición del operador de Green o potencial a los procesos de Markov fuertes y su relación con el operador infinitesimal seguirá cumpliéndose de la misma manera.

En general es posible extender el concepto de potencial para procesos de Markov utilizando el concepto de potencial de orden

$$\alpha > 0, \left(\int_0^\infty e^{-\alpha}(P_t f)(x)dt \right),$$

en este caso, a partir del operador potencial (operador de Green), como del operador infinitesimal, es posible recuperar el proceso de Markov asociado con él.

5.4 La Versión Probabilística (local) del Laplaciano. El operador característico. Podemos ahora dar una definición probabilística del Lapla ciano, en el sentido local que comúnmente se le dá en el cálculo y en el análisis. Sea f una función definida en algún subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ y x un punto en su dominio. Sea $U(x)$ una vecindad abierta de dicho punto y $\tau(U)$ el tiempo de escape de U. Se dice que f tiene Laplaciano generalizado, en el punto x, si el límite

$$\lim_{U(x)\to x} \frac{E_x[f(X(\tau(U)))]-f(x)}{E_x[\tau(U)]} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)\Pi(x,dy)-f(x)}{\int_0^\infty t\,dF_\tau(t)}$$

existe. Cuando este es el caso lo denotaremos con el símbolo $\Delta_o f(x)$. Las vecindades $U(x)$ se pueden reemplazar por vecindades esféricas $B(x)$, con radio r tendiendo a cero, para obtener el mismo límite, lo cual permite asimilar esta definición a la definición de laplaciano generalizado ([13]) quese conoce en la teoría clásica del potencial, y que deja ver en forma inmediata, que si f es de clase C^2, entonces $\Delta_o f(x) = \frac{1}{2}\Delta f(x)$.

En efecto, en el caso de una vecindad esférica $B(x)$, de radio r y centrada en x, la simetría del movimiento Browniano implica que para $E\subset \partial B(x)$, $\Pi(x,E) = \int_E \frac{d\sigma}{4\Pi r^2}$. Es decir, que $\Pi(x,E)$ da el área de la superficie de E, normalizada respecto del área de la superficie total de $B(x)$. Se calcula, además, ([12]) que en este caso el tiempo promedio de escape de la partícula es $r^2/3$.

Es decir, $E_x[\tau] = \int_0^\infty t d F_\tau(t) = r^2/3$. Resultados que permiten escribir las siguientes igualdades:

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^3} f(y)\Pi(x,dy)-f(x)}{\int_0^\infty t d F_\tau(t)} = \frac{3}{r^2}\left[\frac{1}{4\Pi r^2}\int_{\partial B(x)} f(y)d\sigma(y)-f(x)\right]$$

Cuando f es C^2 y r tiende a cero, el límite de la expresión de la derecha existe y es un resultado que se estudia con frecuencia en el cálculo avanzado y en cuya demostración interviene la segunda identidad de Green. El límite, como ya se dijo para la expresión probabilística de la derecha, es igual, en este caso, a $(\frac{1}{2})\Delta f(x)$.

Se puede demostrar, igualmente, que cuando el límite $\lim\limits_{t\to o} \frac{P_t f(x)-f(x)}{t}$ existe, también existe $\Delta_o f(x)$ y ambos valores coinciden, con lo cual Δ_o puede ser considerado como un operador lineal que extiende el generador infinitesimal A. Se puede hablar, entonces, del operador característico del movimiento Browniano o generador local, definición que puede extenderse a todos los procesos de Markov.

5.5 Versión Probabilística del Problema de Dirichlet. Funciones de Green.

Utilizando la definición anterior podemos trasladar, al lenguaje probabilístico del movimiento Browniano, la definición de funciones armónicas. Una función f será armónica en algún subconjunto abierto de su dominio de definición si $\Delta_0 f(x)$ existe y es igual a cero para cada x en el conjunto.

Un ejemplo de función armónica, y a través del cual se llega a la solución probabilística del problema de Dirichlet es el siguiente. Sea D un conjunto abierto (acotado) y conexo y f una función continua y acotada. Sea τ el tiempo (aleatorio) de escape del conjunto D. La función

$$u(x) = E_x\left[f(X(\tau))\right] = \int_{\partial D} f(y)\Pi(x,dy)$$

definida sobre $\overline{D}$, es armónica sobre D, y coincide con f sobre ∂D.

(La igualdad de u con f sobre ∂D, es inmediata puesto que $P_x(X(\tau) = x) = 1$ para todo $x \in \partial D$.

Para demostrar que es armónica se puede probar simplemente que u es valorada en forma promedia. Utilizando la propiedad Markoviana fuerte se puede escribir que para A, subconjunto de Borel de ∂D,

$$\Pi(x,A) = \int_{y \in \partial S_r} \Pi(y,A)\Pi(x,dy), \quad \text{para } x \in D \quad \text{y}$$

$S_r(x)$ esfera centrada en x y contenida en D. Esta igualdad permite escribir las siguientes igualdades:

$$u(x) = E_x\left[u(X_{\tau_r})\right] = E_x\left[E_{X_{\tau_r}}\left[f(X_\tau)\right]\right]$$

$$= \int_{y\in\partial D} \int_{z\in\partial S_r} f(y)\Pi(z,dy)\Pi(x,dz) =$$

$$= \int_{y\in\partial D} f(y)\Pi(x,dy) = u(x) ,$$

que prueban que u es valorada en forma promedio.

La solución del problema de Dirichlet exige que $\lim_{x\to y\in D} u(x) = f(y)$, es decir, que $u(x)$ sea continua. Esta condición se cumple cuando ∂D sea suficientemente suave (dominio de Poincaré). Es importante comentar que la formulación probabilística ha permitido ahondar en el estudio del problema de Dirichlet.

Siguiendo los lineamientos anteriores, es posible dar una versión probabilística de la fórmula de representación dada en 4.4 de una función C^2 y que permite resolver para h la ecuación diferencial $\Delta h = g$ con condición de frontera $h = f$.

Hasta el momento hemos considerado el movimiento Browniano de una partícula, sin ningún tipo de restricciones con el parámetro t variando en el intervalo $[0,\infty)$. Se puede considerar el caso más general de un movimiento tal que su parámetro t tiene un límite de variación aleatorio. Por ejemplo, se puede considerar el movimiento de una partícula que se inicia en el interior de un conjunto abierto D hasta que golpea la superficie ∂D en cuyo momento el movimiento para. En este caso, el parámetro t esta limitado por el tiempo aleatorio τ que invierte la partícula en escapar, por primera vez de D. Respecto de este movimiento, que puede usarse para dar una definición más general del proceso de Markov de la que hemos dado, anteriormente se puede hablar de probabilidades de transición ($\tilde{P}_t(x,A) = P_x(X(\min(t \wedge \tau)) \in A)$) y, consecuentemente, de operador infinitesimal, operador característico, potencial. En particular su potencial $G_R g$, llamado potencial de Green de g respecto del conjunto R, está dado por la expresión $G_R g = E_x\left[\int_0^\tau g(X(t))dt\right]$.

Se demuestra que la representación dada en 4.4, toma la forma

$$h = E_x\left[f(X(t))\right] + E_x\left[\int_0^\tau g(X(t))dt\right]$$

<u>Conexiones entre la teoría del potencial y el movimiento Browniano.</u>

RESUMEN

<u>Potencial</u>. Versión clásica:

$$(Uf)(x) = \frac{1}{2\Pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|}\, dy$$

Versión probabilística:

$$(Gf)(x) = E_x\left[\int_0^{\infty} f(X(t))dt\right] = \int_0^{\infty} (P_t f)(x)dt$$

Laplaciano como operador global.

Versión clásica:

$$\frac{1}{2}\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Versión probabilística:

$$Af = \lim_{t\to o} \frac{P_t f - f}{t}$$

Laplaciano como operador local.

Versión clásica:

$$(\tfrac{1}{2}\Delta f)(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial z^2}$$

Versión probabilística:

$$(\Delta \circ f)(x) = \lim_{U(x)\to\{x\}} \frac{E_x[f(X(\tau))] - f(x)}{E_x[\tau]}$$

$$= \lim_{U(x)\to\{x\}} \frac{\int_{\partial U} f(y)\Pi(x,dy) - f(x)}{\int_0^{\infty} t\, dF_\tau(t)}$$

Problema de Dirichlet.

D dominio de Poincaré, f función definida sobre ∂D. Existe función continua h definida sobre D tal que $\Delta h = 0$ y $h = f$ sobre ∂D.

Versión clásica:

$$h(x) = \frac{1}{4\Pi\rho} \int_{\partial B_r} \frac{\rho^2 - |y-x|^2}{|z-x|} f(z)d\sigma(z)$$

(Fórmula de Poisson para una esfera B_r)

Versión probabilística:

$$h(x) = E_x\left[f(X(\tau(D))\right] \quad \text{(caso general)}$$

$$h(x) = E_x\left[f(X(\tau_r)\right] = \int_{\partial B_r} f(y)\Pi(x,dy)$$

(Para una esfera B_r).

Descomposición de Riesz.

Versión clásica:

$$h(x) = -\int_{\partial D} f(y)D_n G(x,y)d\sigma(y) - \int_D G(x,y)g(y)dy$$

Versión probabilística:

$$h(x) = E_x\left[f(X(\tau(D))\right] + E_x\left[\int_0^{\tau(D)} g(X(t))dt\right].$$

6. El problema de Dirichlet para una caminata al azar en el Espacio.

Apoyados en la formulación probabilística de la teoría del potencial, que hemos esbozado anteriormente, tiene sentido plantearse la posibilidad de una teoría potencial para cadenas de Markov. El problema que se plantea en este caso es el de encontrar versiones discretas, para el potencial y el operador infinitesimal u operador inverso del potencial, en términos de los cuales se puedan estudiar los problemas inherentes a la teoría clásica del potencial. La realidad es que existe una amplia literatura al respecto ([8]), que incluye tanto el caso de cadenas recurrentes como no recurrentes. A manera de ejemplo , y siguiendo los lineamientos de un problema propuesto por Dynkin en ([12]), ilustraremos parcialmente el caso para una cadena no recurrente definida por una caminata simétrica al azar sobre la red espacial $\mathbb{Z}^{\ell}$, que puede ser considerada como la versión discreta del movimiento Browniano. En efecto, se puede demostrar ([8],[12]), que el movimiento Browniano puede ser definido como el límite de caminatas simétricas al azar en redes espaciales y que la teoría potencial asociada con este tipo de cadenas de Markov, conserva fundamentalmente las propiedades enunciadas para la teoría clásica correspondiente al movimiento Browniano.

Sea $\{X(n), n = 0,1,2,\ldots\}$ la cadena de Markov definida por una caminata simétrica al azar en la red espacial $\mathbb{Z}^{\ell}$. Es decir, la cadena tiene como espacio de estados al conjunto constituído por vectores del tipo $x = x_1 e_1 + \ldots + x_{\ell} e_{\ell}$ donde $e_1, \ldots, e_{\ell}$ constituyen una base ortonormal de un espacio de dimensión ℓ y las coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_{\ell}$ son enteros arbitrarios. En cada paso, la partícula tiene igual probabilidad $1/2\ell$ de alcanzar uno de los estados vecinos $x \pm e_1$, $x \pm e_2$, $\ldots$, $x \pm e_{\ell}$, independientemente de la posición x que ocupe en el instante precedente.

Denotaremos con $p(n,x,y)$ las probabilidades de transición, o sea la probabilidad que tiene la partícula de alcanzar el punto "y" saliendo de "x" después de n pasos. En general, la probabilidad de algún evento A asociada con la caminata, depende del punto x en el cual ella se inicia. Designaremos con $P_x(A)$ esta probabilidad y con $E_x[\cdot]$ la esperanza matemática respecto de esta función de probabilidad.

Teniendo en cuenta que $p(n,x,\cdot)$ es la versión discreta de la probabilidad de transición $p(t,x,\cdot)$ del movimiento Browniano, resulta natural obtener las siguientes definiciones de P_n y G, que constituyen las versiones correspondientes del operador de transición y del potencial definidos para el movimiento Browniano.

$$(P_n f)(x) = E_x[f(X(n))] = \sum_{y\in\mathbb{Z}^\ell} f(y)p(n,x,y)$$

$$(Gf)(x) = E_x\left[\sum_{n=0}^{\infty} f(X(n))\right] = \sum_{n=o}^{\infty} (P_n f)(x)$$

donde f es una función definida sobre $\mathbb{Z}^\ell$.

Se demuestra ([12]) que cuando $|x-y| \to \infty$,

$$(Gf)(x) \to C_\ell \sum_y \frac{f(y)}{|x-y|^{\ell-2}}$$

La definición equivalente al operador infinitesimal, laplaciano en este caso, puede no ser tan obvia pues, en el caso del movimiento Browniano o procesos de difusión, su definición supone un paso al límite cuando el parámetro tiempo t, tiende a cero. Se observa, sin embargo, que el operador P_1, denotándolo simplemente como P, al aplicarlo a $(Gf)(x)$, permite obtener la siguiente igualdad

$$(PGf)(x) = (Gf)(x) - f(x)$$

$$[(P-I)G]f = - f \text{ (Ecuación de Poisson).}$$

Lo que lleva a identificar a $P-I$ como la versión discreta del operador $\frac{1}{2}\Delta$.

Es pertinente observar que si la base ortonormal, que genera la red sobre la cual se da la caminata al azar, fuera de la forma $he_1, he_2,\ldots,he_\ell$, para $h > 0$, $(Pf)(x)$ tomaría la forma

$$Pf(x) = \sum_{|y-x|=h} f(y)p(1,x,y) = \frac{1}{2\ell} \sum f(x+he_k) \ .$$

Asumiendo la diferenciabilidad del caso para f y suponiendo que f está definida en $\mathbb{R}^\ell$, se puede probar que

$$\lim_{h\to o} \frac{(\sum f(x+he_k)-2\ell f(x))}{h^2} = \lim_{h\to o} \frac{2\ell[(P-I)f(x)]}{h^2}$$

$$= \Delta f(x) \ .$$

Es decir, que el operador laplaciano puede ser obtenido a partir del operador $P-I$ pasando al límite cuando la abertura de la red tiende a cero. ([12]).

Estamos ahora en capacidad de completar las definiciones y conceptos necesarios para formular y resolver el problema de Dirichlet para una caminata simétrica al azar en el espacio $\mathbb{Z}^\ell$.

- Sea f una función definida sobre $\mathbb{Z}^\ell$. Diremos que f es armónica sobre un conjunto D si $(P-I)(f(x)) = 0$ para todo $x \in D$. Es importante observar que $(Pf)(x)$ promedia el valor de la función sobre los puntos que rodean x y que son accesibles, en la caminata, en un solo paso desde dicho punto. Por lo tanto, si f es armónica, según esta definición, como en el caso de la definición clásica, f es valorada en forma promedia.

- Sea B un subconjunto de $\mathbb{Z}^{\ell}$. Diremos que B es conexo en $\mathbb{Z}^{\ell}$, si para dos puntos arbitrarios x, y en B, existe una sucesión de puntos, $x_1 = x$, $x_2, \ldots, x_n = y$, que llamaremos cadena en B, tales que, para cada par consecutivo de ellos, la diferencia $x_i - x_{i-1}$ coincide con alguno de los vectores unitarios $\pm e_k$.

Definiremos, finalmente, como frontera de B, y la denotaremos con ∂B, al conjunto de puntos x tales que $x \notin B$ y para algún e_k, $x \pm e_k \in B$.

6.1 <u>Proposición 1</u>. (Principio del mínimo para funciones armónicas). Si B es un subconjunto conexo de $\mathbb{Z}^{\ell}$ y f es una función armónica sobre B que toma su valor mínimo sobre $B \cup \partial B$, en algún punto x de B, entonces f es constante sobre $B \cup \partial B$. La misma proposición es válida para su valor máximo.

<u>Demostración:</u> Sea f(x) el mínimo aludido en el teorema, se quiere probar que para z arbitrario en $B \cup \partial B$, $f(z) = f(x)$. Si $z \in B$, existirá una cadena $x = x_1, x_2, \ldots, x_n = z$ en B. Puesto que f es armónica sobre B, se puede escribir:

$$f(x) - Pf(x) = \sum_{y:|y-x|=1} p_1(x,y)(f(x)-f(y)) = 0$$

Puesto que $f(x)$ es valor mínimo, los términos en la sumatoria anterior serán no-positivos, por lo cual $f(x) - Pf(x) = 0$ sii $f(x) - f(y) = 0$ para todo y tal que $|y-x| = 1$. En particular x_2 satisface esta última condición y consecuentemente $f(x_2) = f(x)$.

Repitiendo el argumento n veces, se obtiene que $f(x) = f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(z)$.

Si $z \in \partial B$, existirá $y \in B$ en la vecindad de z, tal que $|y-z| = 1$. Puesto que f es armónica sobre B, $f(y) - Pf(y) = 0$ como además $f(y) = f(x)$ $\equiv$ mínimo de f sobre $B \cup \partial B$, la argumentación anterior puede repetirse para obtener que $f(x) = f(y) = f(v)$, para todo v tal que $|v-y| = 1$, que en particular, implica $f(x) = f(z)$.

6.2 <u>Corolario 1</u>: Una función Armónica en $\mathbb{Z}^{\ell}$ no tiene ni mínimo, ni máximo, a no ser que sea constante. En particular, una función armónica no-negativa en $\mathbb{Z}^{\ell}$, que se anula en algún punto, es idénticamente nula.

6.3 <u>Corolario 2</u>: Sea B un conjunto finito en $\mathbb{Z}^{\ell}$ y f y g dos funciones armónicas sobre B. Si f y g son iguales sobre ∂B, entonces también lo serán sobre B.

<u>Demostración</u>: Supongamos inicialmente que B es

conexo. Si f y g son armónicas sobre B, también lo será $f-g$ y por ser $B \cup \partial B$ finito tomará valor mínimo y máximo sobre $B \cup \partial B$.

Si $f-g$ toma su valor mínimo o máximo en B, $f-g$ será constante sobre $B \cup \partial B$ y puesto que $f-g = 0$ sobre ∂B dicha constante será 0. Consecuentemente $f = g$ sobre B.

Si $f-g$ toma su mínimo y su máximo en ∂B, puesto que $f-g = 0$ en este conjunto, ello conduce inmediatamente al resultado $f-g = 0$ sobre todo $B \cup \partial B$.

En el caso general, no es difícil ver que todo x en B es elemento de una componente conexa de B (máximo subconjunto conexo de B que contiene a x) cuya frontera está contenida en ∂B, lo cual permite extender inmediatamente el resultado anterior al caso cuando B es finito y no necesariamente conexo.

6.4 <u>Lema</u>: Sea B un subconjunto propio de $\mathbb{Z}^{\ell}$ y T el tiempo (aleatorio) del primer paso por ∂B. Sea φ una función definida sobre ∂B. Si la función $f(x) = E_x[\varphi(X(T)), \ T < \infty]$, existe para todo x en B, entonces f es armínica sobre B y coincide con φ sobre ∂B. En particular, este es el caso cuando φ es acotada sobre ∂B.

<u>Demostración</u>: Puesto que B es un subconjunto pro

pio de $\mathbb{Z}^{\ell}$, $B \neq \emptyset$. Sean x e y en ∂B. Si $x = y$ entonces $P_x(X(T) = y) = 1$. Si $x \neq y$ $P_x(X(T) = y) = 0$. Lo que permite concluír que $f(x) = \varphi(x)$ sobre ∂B.

Se quiere probar ahora que f es armónica en B. Se puede escribir

$$(Pf)(x) = \sum_{|x-y|=1} f(y)P(x,y) =$$

$$= \sum_{|x-y|=1} P(x,y) \sum_{z\in\partial B} \varphi(z)P_y(X(T) = z, T < \infty), \quad x \in B$$

$$= \sum_{z\in\partial B} (z) \sum_{|x-y|=1} P(x,y)P_y(X(T) = z, T < \infty), \quad x\in B$$

Reordenamientos que pueden hacerse gracias a la convergencia absoluta de las sumas involucradas. Utilizando la propiedad Markoviana del movimiento, la igualdad anterior se puede transformar de la siguiente manera:

$$(Pf)(x) = \sum_{z\in\partial B} \varphi(z)P_x(X(T) = z) =$$

$$= E_x[\varphi(X(T))] = f(x)$$

Lo que prueba la "armonicidad" de f sobre B.

Si $|\varphi|$ es acotada sobre ∂B por M,. $E_x[|\varphi(X(T))| \; ; T < \infty] \leqslant M$, para todo x en B.

por lo que f estará definida para todo x en B.

6.5 Teorema. (Solución del problema de Dirichlet). Sea B un subconjunto propio de $\mathbb{Z}^{\ell}$ y φ una función definida y acotada sobre ∂B. Sea T el tiempo aleatorio del primer paso por ∂B. La función $f(x) = E_x[\varphi(X(T))\ ;\ T < \infty]$ es solución al problema de Dirichlet respecto de B y φ. Esto es, f es armónica sobre B y es igual a φ sobre ∂B. Más aún, si B es finito o ∂B es recurrente, f es la única función acotada que cumple dichas condiciones.

Demostración: La existencia de la solución ha sido demostrada en el Lema. La unicidad para B finito se desprende del Corolario 2 a la Proposición 1.

Sólo basta demostrar la unicidad en el caso cuando ∂B es recurrente.

Sea g una función acotada armónica sobre B que es igual a φ sobre ∂B. Sea x un punto arbitrario de B. Se quiere probar que $f(x) = g(x)$.

Consideremos un cubo $C(\rho)$ en $\mathbb{Z}^{\ell}$, de lado ρ centrado en x. Denotemos con $T(\rho)$ el tiempo (aleatorio), del primer paso por $\partial(C(\rho) \cap B)$. Puesto que $C(\rho) \cap B$ es finito, de la parte ya demostrada de este teorema, se puede concluir que $g(x) = E_x[g(X(T(\rho)))]$, siendo la expresión válida para cualquier $0 < \rho < \infty$. Es importante observar que en el tiempo $T(\rho)$ la partícula que inicia su movimiento en x estará en puntos de $\partial C(\rho)$ ó de ∂B.

Debe ser claro que $\lim_{N\to\infty} P_x(T < N) = P_x(T < \infty)$, y como $P_x(T < \infty) = 1$, por ser ∂B recurrente, es posible seleccionar N dependiendo de ε, tal que $P_x(T < N) > 1 - \frac{\varepsilon}{2M}$, donde ε es un número positivo arbitrario y M es una cota superior para $|\varphi|$ y $|g|$.

Puesto que la caminata al azar que estudiamos es simétrica y debe proceder paso por paso, podemos escoger η, dependiendo de ε, de tal manera que iniciándose en x el movimiento de la partícula el tiempo (aleatorio) de su primer paso por $\partial C(\eta)$ sea siempre mayor que N. Consecuentemente para el evento $(T < N)$, la partícula que inicia su movimiento en x, en el tiempo $T(\eta)$ está, por definición, en puntos de $\partial(C(\eta) \cap B)$ que tienen que ser puntos de ∂B. Es decir que en estos casos $T(\eta) = T$ y por lo tanto $g(X(T(\eta))) = \varphi(X(T))$

$$|g(x) - f(x)| = |E_x[g(X(T(\eta)))] - E_x[\varphi(X(T))]|$$

$$< |E_x[g(X(T(\eta)) - \varphi(X(T)); T < N]|$$

$$+ |E_x[g(X(T(\eta)) - \varphi(X(T)); T \geq N]|$$

$$\leq 0 + 2M\, P_x(T \geq N) \leq \frac{2M\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

Puesto que ε es arbitrario, se puede concluir que $|g(x) - f(x)| = 0$. Esto es $g(x) = f(x)$.

***

BIBLIOGRAFIA

[1] Feller, William. Introducción a la Teoría de Propabilidades y sus Aplicaciones. Limusa-Wiley.

[2] Cramer, Harold. Elementos de la Teoría de Probabilidades. Aguilar.

[3] Gnedenko. Theory of Probability. Chelsea.

[4] Laplace. A Philosophical Essay on Probabilities. Dover.

[5] John Lamperti. Probability. Benjamín Press.

[6] Dynkin. Markov Processes. Vol. I Springer Verlag.

[7] Protter, Weinberger. Maximun Principles in Differentials Equations. Prentice-Hall

[8] Kemeny, Snell Knapp. Denumerable Markov Chains. Van Nostrand.

[9] E., Nelson. Dynamical Theories of Brownian Motion. Prentice-Hall.

[10] O.D., Kellog. Foundations of Potential Theory. Springer-Verlag.

[11] K. Ito. Stochastic Processes Aarhus Universitit. Lecture Notes Series N° 16.

[12] Dynkin, Yushkevich. Markov Processes Theorems and Problems. Plenum Press.

[13] Helms. Introduction to potential theory. Wiley.

***

Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle
Cali. COLOMBIA.