Boletín de Matemáticas
Vol. XIII, Nos 2,3,4 (1979), pags, 71 - 99

EL LENGUAJE CATEGORICO Y SUS APLICACIONES+

RAUL ROJAS

1. Introducción .

La teoría de categorías y funtores fué inventada en el año 1940 por los matemáticos norteamericanos Eilenberg y Mac Lane . El propósito original fué presentar un lenguaje con el cual se uniformizaban, generalizaban y relacionaban las distintas definiciones y teoremas importantes que existían en las Matemáticas .

Quizás lo más importante de este intento fué la definición de innumerables objetos algebráicos y topológicos en términos de propiedades universales en lugar de usar relaciones entre elementos de esos objetos de estudio . Así mismo el concepto de dualidad permitió simplificar muchas ideas , haciendo uso solamente de diagramas conmutativos.

Hoy en día la teoría de categorías está bastante bien formalizada , y cualquiera de los textos (1) ó

(2) es excelente para un estudio más o menos profundo. Existen muchas aplicaciones en casi toda la matemática, especialmente en el Algebra Homológica, Geometría Algebraica, Topología Algebraica, etc. Inclusive hay conceptos bastante sofisticados como límite de una función real, integral de Lebesque, que se pueden formular en términos de categorías, ver por ejemplo (3).

En el trabajo que presento daré una breve introducción al estudio de las categorías y funtores, así como aplicaciones sencillas y fundamentales, que inexplicablemente no aparecen en los textos más conocidos.

Una <u>categoría</u> será toda terna = (ObC, Hom_C, ϕ^C), donde ObC es una clase (objetos de C), Hom_C es una familia de conjuntos denotados por $Hom(X,Y)$, uno para cada pareja (X,Y) de ObC (los morfismos de C), y por último ϕ^C es una familia de aplicaciones de la forma $\phi^C_{X,Y,Z} : Hom_C(X,Y) \times Hom_C(Y,Z) \to Hom_C(X,Z)$, una para cada tripleta X,Y,Z de objetos de C.

Es costumbre denotar con una flecha $f : X \to Y$ un elemento del conjunto $Hom_C(X,Y)$. También, si $g: Y \to Z$ es otro morfismo $gf : X \to Z$ denotada a $\phi^C_{X,Y,Z}(f,g)$. Dicho lo anterior se imponen las siguientes condiciones:

1). este "producto" es asociativo, es decir, si además $h : Y \to Z$, entonces $h(gf) = (hg)f$. 2). Si $Y \in ObC$, existe un elemento $1_Y \in Hom_C(Y,Y)$ tal que para cada $f \in Hom_C(Y,Z)$ y cada $g \in Hom_C(X,Y)$, $f.1_Y = f$ y $1_Y.g = g$. Es decir existen "unidades" a izquierda y a derecha respecto del producto.

Para simplificar pondremos $Hom(X,Y) = Hom_C(X,Y)$, $\phi = \phi_{X,Y,Z}$. Es claro que si C es una categoría, entonces C° definida por $ObC^{\circ} = ObC$, $Hom_{C^{\circ}}(X,Y) = Hom_C(Y,X)$, $\phi^{C^{\circ}}(f,g) = \phi^{C}(g,f)$, es también una categoría, llamada la categoría dual de C. Se tiene $(C^{\circ})^{\circ} = C$.

También si C y C' son categorías, el producto $C \times C'$ se define por $Ob(C \times C') = ObC \times ObC'$, y si $X,Y \in ObC$, $X', Y' \in ObC'$ tenemos $Hom_{C \times C'}((X,X'), (Y, Y')) = Hom_C(X,Y) \times Hom_{C'}(X',Y')$.

Si además $(f,g) : (X,X') \to (Y,Y')$ y $(h,j) : (Y,Y') \to (Z,Z')$ entonces $(h,j) . (f,g) = (hf,jg)$.

Ejemplos de Categorías

1). Conj: La categoría cuyos objetos son los conjuntos y cuyos morfismos son las aplicaciones entre conjuntos.

2). Gr: La categoría en la que los grupos son los objetos y los homomorfismos hacen el papel de morfismos.

3). Top: La categoría en la que los espacios to pológicos son los objetos y las funciones contínuas son los morfismos .

4). Ano: La categoría en la que los anillos conmutativos unitarios son los objetos y los homomorfismos , que llevan elemento unitario en elemento unitario , son los morfismos .

5). Vec(K): La categoría formada por los espacios vectoriales sobre el cuerpo K como objetos , y , como morfismos , las aplicaciones lineales .

Un funtor $F : C \to C'$ de la categoría C en la categoría C' es un par (F_O, F_H) , donde $F_O: ObC \to ObC'$ es una aplicación y F_H es una familia de aplicaciones $F_{X,Y} : Hom_C(X,Y) \to Hom_{C'}(F(X) , F(Y))$, una por cada pareja X,Y de ObC , de tal manera que 1). si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ en C entonces $F_{X,Z}(gf) = F_{Y,Z}(g)F_{X,Y}(f)$. 2). Si $X \in ObC$ entonces $F_{X,X}(1_X) = 1_{F(X)}$. Pondremos $F = F_O$ y $F = F_{X,Y}$ sin riesgo a confusiones .

Si C,C',C'' son categorías y $F : C \to C'$, $F' : C' \to C''$ son funtores , entonces se define $F'F : C \to C''$ componiendo las aplicaciones que definen a F y F' . Así se obtiene una categoría Cat que tiene como objetos las categorías y como morfismos los funtores .

Si $F : C \to C'$ es un funtor , se denota $F^* :$

$C^{\bullet} \to C'^{\bullet}$ al funtor que coincide con F en los objetos, y en los morfismos se define por la fórmula $F^{\bullet}_{X,Y} = F_{Y,X}$. claramente $(F^{\bullet})^{\bullet} = F$.

Es evidente la definición del funtor producto en la forma $F \times F' : C \times C' \to D \times D'$; para funtores $F : C \to C'$, $F' : C' \to D'$.

Ejemplos de Funtores

1). Si C es una categoría, las aplicaciones idénticas de ObC y $Hom_C(X,Y)$ definen al funtor identidad $1_C : C \to C$;

2). Si C es una categoría tal que cada objeto es un conjunto con una estructura adicional y cada morfismo es una aplicación que cumple ciertas propiedades (por ejemplo C podría ser Gr, Anc, etc), entonces el funtor $O : C \to$ Conj. (funtor "olvido") hace corresponder a cada objeto su conjunto subyacente, y a cada morfismo su aplicación subyacente.

3). $F :$ Anc $\to$ Conj definido por $F(A) =$ conjunto de ideales de A; $F(f)(J) =$ ideal generado por $f(J)$ (se entiende que A es un anillo conmutativo y unitario, J un ideal de A).

4). Sea Vecf(K) la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita y $F :$ Vecf(K) $\to$ Vecf(K)$^{\bullet}$, definido como $F(V) = V^{+} = \mathrm{Hom}(V,K)$. Si $f : V \to W$, $F(f) = f^{+} : F(W) \to F(V)$ es tal que $F(f)(u) = uf$ para todo funcional lineal $u : W \to K$.

Sean C, C' categorías ; F, $F' : C \to C'$ funtores. Una <u>transformación natural o morfismo funtorial</u> $a : F \to F'$ de F en F' es una familia de morfismos $a_X : FX \to F'X$, uno para cada objeto X de C, tal que si $f : X \to Y$ es un morfismo de C, el diagrama siguiente es conmutativo :

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{Ff} & FY \\ {\scriptstyle a_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a_Y} \\ F'X & \xrightarrow{F'f} & F'Y \end{array}$$

Si $F'' : C \to C'$ es un tercer funtor, y $b : F' \to F''$ otra transformación natural, se define $b.a : F \to F''$ por la fórmula $(b.a)_X = b_X . a_X$, si $X \in \mathrm{Ob}C$.

De este modo se obtiene una nueva categoría $\mathrm{Hom}(C,C')$, cuyos objetos son los funtores de C en C' y cuyos morfismos las transformaciones naturales.

Un ejemplo de transformación natural. $\delta : O \to F$ entre el funtor olvido $O : \mathrm{Anc} \to \mathrm{Conj}$ y el funtor $F : \mathrm{Anc} \to \mathrm{Conj}$, del que se habló anteriormente, podría ser definido así : si A es un anillo y $a \in A$ entonces $\delta_A(a) = aA$.

En general un morfismo $f : X \to Y$ de la categoría C se dice que es un isomorfismo si existe un morfismo $g : Y \to X$ tal que $gf = 1_X$, $fg = 1_Y$.

Dos categorías C y C' se dicen equivalentes si existen funtores $F : C \to C'$ y $G : C' \to C$ e isomorfismos funtoriales $\delta : 1_C \xrightarrow{\sim} GF$, $\rho : 1_C \xrightarrow{\sim} FG$.

Si C es cualquier categoría y $A \in ObC$, entonces es claro que si se define $h^A : C \to Conj$, como $h^A(X) = Hom(A,X)$, sobre los objetos , y para $X \xrightarrow{f} Y$, $h^A(f) : h^A(X) \to h^A(Y)$, $h^A(f)(g) = fg$; h^A es un funtor , llamado funtor de representación covariante . Análogamente , se define $h_A : C^{\bullet} \to Conj$ como $h_A(X) = Hom\ (X,A)$, y para $f : X \to Y$, definimos $h_A(f) : h_A(Y) \to h_A(X)$, $h_A(f)(g) = gf$; h_A se llama funtor de representación contravariante .

Un funtor $C \xrightarrow{F} Conj$ (respectivamente $C^{\bullet} \xrightarrow{F} Conj$) es representable si existe un isomorfismo funtorial $\lambda : F \xrightarrow{\sim} h^A$ (respectivamente $\lambda : F \xrightarrow{\sim} h_A$) es decir si para todo $X \in ObC$ tenemos que λ_X es una biyección y si para cada flecha $f : X \to Y$ (respectivamente $f : Y \to X$) el siguiente diagrama es conmutativo (respectivamente)

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\lambda_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\lambda_Y"] \\ \mathrm{Hom}(A,X) \arrow[r, "h^A(f)"] & \mathrm{Hom}(A,Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\lambda_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\lambda_Y"] \\ \mathrm{Hom}(X,A) \arrow[r, "h_A(f)"] & \mathrm{Hom}(Y,A) \end{tikzcd}$$

(A,λ) se llama un <u>par de representación</u> de F .

Sea $F : C \to \mathrm{Conj}$ un funtor constante en el sentido de que para todo $X \in \mathrm{Ob}C$, $F(X)$ es un conjunto con un elemento . Si un tal funtor es representable y (A,λ) es su par de representación , decimos que A es un objeto inicial de C . En tal caso $\lambda : F \xrightarrow{\sim} h^A$; luego , para todo $X \in \mathrm{Ob}C$, tenemos una biyección $\lambda_X : F(X) \to h^A(X) = \mathrm{Hom}(A,X)$. Es decir para todo objeto X existe un único morfismo $A \to X$. Similarmente se define objeto <u>final</u> .

En lo que sigue daremos con todo detalle algunos ejemplos sencillos e importantes los cuales se ubican dentro del concepto de funtor representable .

1. LOS NUMEROS NATURALES

En la teoría no formal de conjuntos sabemos que "el" conjunto de los números naturales es cualquier conjunto N no vacío, el cual tiene asociada una función $s : N \to N$ tal que se cumple los siguientes axiomas de Peano.

i). Existe un elemento de N, denotado 0, tal que $0 \notin s(N)$;

ii). Axioma de Inducción : Si $M \subset N$ es tal que $0 \in M$ y $s(M) \subset M$ entonces $M = N$;

iii). La función s es inyectiva .

Es costumbre llamar a $s(x)$ el sucesor de x, y se puede identificar al elemento 0 con el cero usual de los enteros de tal forma que 0 sería el menor elemento de N, $s(x) = x+1$ y N el conjunto formado por 0, 1, 2 ...

De hecho hay infinidad de conjuntos N con una estructura definida por una función s que satisfaga estos axiomas, pero todos entre sí, son isomorfos.

En lo que sigue, demostraremos esta unicidad del conjunto N, a la vez que daremos una caracterización universal de N la cual a su turno permite dar una definición categórica del conjunto de los números naturales.

He aquí la propiedad universal que debe cumplir N .

Proposición 1

Sea N cualquier conjunto no vacío que satisface los axiomas de Peano enunciados anteriormente ; sean A cualquier conjunto no vacío y a un elemento de A . Entonces para cualquier función $f : A \to A$ existe una única función $g : N \to A$ tal que $g(0) = a$ y $gs = fg$ es decir que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{s} & N \\ g\downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

Demostración

a). Unicidad de g : Supongamos que haya otra función $h : N \to A$ que también cumpla $h(0)=a$ y $hs = fh$. Designemos por M el conjunto de los $x \in N$ para los cuales $g(x) = h(x)$. Y demostraremos que $M = N$, ésto equivale a que $g= h$. Como $g(0) = a = h(0)$ entonces $0 \in M$; supongamos que $x \in M$ luego $g(x) = h(x)$, y , por consiguiente , $g(s(x)) = f(g(x)) = f(g(x)) = f(h(x)) = h(s(x))$, ésto es $s(x) \in M$, así $s(M) \subset M$; por el axioma de inducción se concluye que

$M = N$.

b). Existencia de g : A una relación R de N en A la llamaremos regular si cumple : 1) Dominio de R es N , abreviadamente $D(R) = N$; 2) $(0, a) \in R$; 3) $(x, r) \in R \Longrightarrow (s(x), f(r)) \in R$.

El conjunto de las relaciones regulares de N en A no es vacío ya que $N \times A$ es una de éllas ; denotemos por F la intersección de todas esas relaciones , es claro que F es una relación regular de N en A , en efecto $(0,a) \in F$ porque $(0,a) \in R$ para todo R regular , así pues $0 \in D(F)$; si $x \in D(F)$, existe $r \in A$ tal que $(x,r) \in F$, luego $(x,r) \in R$, para todo R , lo cual implica que $(s(x), f(r)) \in R$ y así $(s(x), f(r)) \in F$, es decir $s(x) \in D(F)$. El axioma de inducción implica que $D(F) = N$.

Veamos ahora que en efecto F es una función . Supongamos que $(x,r) \in F$ y $(x,r') \in F$. Demostraremos que $r = r'$. Llamemos M al conjunto definido por los puntos x de N para los que se cumple

$$(x,r) \in F \text{ y } (x,r') \in F \Longrightarrow r = r'$$

Debemos probar que $M = N$. Lo hacemos usando el axioma de inducción : para ver que $0 \in N$ basta con probar que si $(0,r) \in F$ entonces $r = a$. Definamos R como la reunión de la relación $(N - 0) \times A$ y la relación puntual $(0,a)$. R es regular, ya que obviamente $(0,a) \in R$ y $D(R) = N$; ahora si $(x,r) \in R$, por el axioma i) se tiene que $s(x) \neq 0$, luego $(s(x), f(r)) \in (N - 0) \times A$ entonces $(s(x), f(r)) \in R$. Por definición de F debe suceder que $F \subset R$ y en consecuencia $(0,r) \in R$; pero como $(0,r) \notin (N - 0) \times A$ necesariamente $(0,r) = (0,a)$ y así $r = a$.

Supongamos finalmente que $x \in M$, luego existe un único $r \in A$ tal que $(x,r) \in F$. Para ver que $s(x) \in M$ basta con probar que si $(s(x), t) \in F$ entonces $t = f(r)$. A la relación $(N - s(x)) \times A$ se agrega la relación puntual $(s(x), f(r))$ y se traza entonces con F. Esta relación se nota R. Es claro que $(0,a) \in R$, luego $0 \in D(R)$. Supongamos que $x' \in D(R)$, luego existe $r' \in A$ tal que $(x', r') \in R$, hay dos posibilidades:

- Que $x' = x$, luego $(x,r') \in F$, entonces $r = r'$ así $(s(x'), f(r')) = (s(x), f(r)) \in F$ y $(s(x'), f(r')) \in R$, es decir $s(x') \in D(R)$.

- Que $x' \neq x$, luego por el axioma iii) tenemos $s(x') \neq s(x)$, entonces $(s(x'), f(r')) \in (M - s(x)) \times A$ y también $(x',r') \in F$, luego $(s(x'), f(r')) \in F$, es-decir $(s(x'), f(r')) \in R$, así $s(x') \in D(R)$.

Conclusión : $D(R) = N$ y R es regular. Por definición de F tendremos $F \subset R$, luego $(s(x),t) \in R$ y necesariamente $t = f(r)$. Hemos demostrado así que F es función . $g : N \to A$ estaría definida como $r = g(x)$ si y solo si $(x,r) \in F$. Así $(0,a) \in F \implies a = g(0)$, y para todo $x \in N$ se cumple $(x,g(x)) \in F$. De allí $(s(x), f(g(x))) \in F$ y $f(g(x)) = g(s(x))$. En conclusión $fg = gs$.

Ahora veremos cómo esta propiedad permite definir a los Naturales .

Proposición 2

Sea N un conjunto no vacío para el que existe un elemento $0 \in N$ y una función $s : N \to N$ tal que para todo conjunto no vacío A , todo $a \in A$ y toda función $f : A \to A$ existe una única $g : N \to A$ que cumple $g(0) = a$ y $fg = gs$. Entonces N cumple los axiomas de Peano i) ii) y iii) .

Demostración

i) $0 \notin s(N)$. Supongamos lo contrario: que $0 = s(x)$, para algún $x \in N$. Tomemos $A = N, f : A \to A$ la función constante de valor 0 y $a = x$; existe una función $g : N \to A$ tal que $g(0) = x$ y además $fg = gs$, en particular $0 = f(g(x)) = g(s(x)) = g(0) = x$, así pues $s(0) = 0$. Consideremos ahora $A = N$ y $f = s$; como la función $g = s$ cumple $g(0) = a$ y $fg = gs$ y también la función $g = 1_N$ cumple $1_N(0) = 0$ y $fg = gs$, entonces , por unicidad , debe ser $s = 1_N$.

Sea ahora $f : N \to N$ la función constante de valor 0 . Claramente $fs = sf$ y $f(0) = 0$. Por unicidad $f = 1_N$, luego $N = 1_N(N) = f(N) = 0$. Esto no puede ser porque tomemos A un conjunto con dos elementos $a \neq b$; sea $f : A \to A$ definida como $f(a) = b$ y $f(b) = a$, existe una función $g : N \to A$ tal que $g(0) = a$ y $fg = gs$, así $f(g(0)) = g(s(0))$ es decir $f(a) = g(0)$ es decir $b = a$.

ii) (Axioma de inducción) Si $M \subset N$ tal que $0 \in M$, $s(M) \subset M$ entonces $M = N$. Consideremos $A = M$, tomemos $f = s' = s|_M : M \to M$, existe una única función $g : N \to M$ tal que $g(0) = 0$ y $s'g = gs$. Si por otra parte $i : M \subset N$, denota la inclusión canónica , la función $g' = ig$ satisface $g'(0) = 0$ y $sg' = g's$ así como también 1_N satisface $1_N(0) = 0$ y $s1_N = 1_N s$. Por unicidad debe ser $ig = 1_N$, en particular $N =$

$1_N(N) = i(g(N)) \subset i(M) = M$ en consecuencia $M = N$.

iii) La función s es inyectiva . Probemos antes el siguiente :

Lema

El único elemento que no es sucesor de cualquier otro es 0 .

Demostración

Sea M el conjunto $s(N)$ agregado del punto 0 . Como evidentemente $s(M) \subset M$, por el axioma de inducción probado anteriormente se concluye que $M = N$.

Ahora probemos que s es inyectiva . Para éllo tomemos A infinito (en la teoría axiomática de conjuntos , se postula la existencia de un conjunto infinito en el Axioma del Infinito) , luego existe un subconjunto B de A tal que $B \neq A$ y una biyección $f : A \to B$. Componiendo f con la inclusión podemos suponer que f está definida de A en A y es inyectiva. Sea $a \in A - B$: por la hipótesis existe una función $g : N \to A$ tal que $g(0) = a$ y $gs = fg$. Si probamos que g es inyectiva se deduce facilmente que s es también inyectiva . Para éllo formemos el siguiente subconjunto M de N : x está en M si no existe en N otro punto z - distinto de x - tal que $g(x) = g(z)$. Si demostramos que $M = N$ habrá quedado probada la inyectividad de s . Para aplicar el axioma de inducción probemos que $0 \in M$. Si para algún $y \neq 0$ se cumple $g(y) = g(0) = a$, existe y_1 tal que $y = s(y_1)$, luego $a = g(s(y_1)) = f(g(y_1)) \in$ Imagen $(f) = B$, lo cual es absurdo.

Ahora , supongamos que $x \in M$, luego mostremos que $s(x) \in M$. Para el efecto supongamos que $g(s(x)) = g(z)$. El punto z no puede ser 0 porque , de serlo se tendría $s(x) = 0$ (recuérdese que $0 \in M$) pero 0 no está en la imagen de s . Por el lema $z = s(y)$, por lo tanto $f(g(x)) = g(s(x)) = g(s(y)) = f(g(y))$. Siendo f inyectiva , $g(x) = g(y)$, y como x está en M , se deduce que $x = y$. Luego $s(x) = s(y) = z$.

Por último damos la formulación categórica del conjunto de los naturales .

Proposición 3

Sea $\mathcal{A}$ la categoría de todos los tripletes (A,f,a) donde A es conjunto no vacío , $f : A \to A$ y $a \in A$. Los morfismos $(A,f,a) \to (B,h,b)$ son funciones $g : A \to B$ tales que $g(a) = b$ y $gf = hg$. Cualquier objeto inicial de $\mathcal{A}$ representa un conjunto que satisface los axiomas de Peano . Recíprocamente cualquier conjunto que satisfaga dichos axiomas es un objeto inicial en ésa categoría .

Demostración

Es claro que $\mathcal{A}$ es una categoría . Decir que $(N,s,0)$ es un objeto inicial equivale a la existencia , para cualquier otro objeto (A,F,a) , de uno y solo un morfismo $(N,s,0) \to (A,f,a)$. Es decir a la existencia de una única función $g : N \to A$ tal que $g(0) = a$ y $fg = gs$. Así , pues , la proposición 1 equivale a que cualquier conjunto que satisfaga los axiomas de Peano es un objeto inicial en $\mathcal{A}$, y la proposición 2 equivale a que un objeto inicial en $\mathcal{A}$, satisfaga los axiomas de Peano .

2. BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

Sea B un conjunto no vacío , vamos a construir un espacio vectorial U el cual tenga como base a B . Definamos el funtor $F : Vec(K) \to Conj$ haciendo que $F(V)$ sea el conjunto de las aplicaciones $g : B \to V$, y si $\phi : V \to W$ es una aplicación lineal , que $F(\phi) : F(V) \to F(W)$ esté dado por $F(\phi)(g) = \phi g$.

Proposición 4

Si F es representable, cualquier objeto V de representación es un espacio vectorial que tiene como base a $g(B)$, donde $g : B \to V$ es una función inyectiva. Más aún, para un conjunto B dado, siempre existe un espacio vectorial U tal que $B \subset U$ y B es una base de U. El funtor F siempre es representable.

Nota

Esta proposición también es cierta para módulos, es decir que como existe siempre un módulo libre sobre B, para un anillo fijo, ésto se puede traducir diciendo que un cierto funtor es representable.

Demostración

Si suponemos que F es representable, el siguiente diagrama conmuta :

$$\begin{array}{ccc} F(V) & \overset{\sim}{\underset{\rho_W}{\to}} & h^V(V) = \mathrm{Hom}(V,V) \\ F(\phi)\downarrow & & \downarrow h^V(\phi) \\ F(W) & \underset{\rho_V}{\overset{\sim}{\to}} & h^V(W) = \mathrm{Hom}(V,W) \end{array}$$

$g : B \to V$ es la imagen de 1_V, mediante la biyección

ρ_V^{-1} ; y para $f : B \to W$, ϕ es la imagen de f bajo la biyección ρ_W . Tenemos $h^V(\phi) = (1_V) = \phi$, y como el diagrama es conmutativo , necesariamente $f(\phi)(g) = f$ es decir $\phi g = f$; entonces existe una $g : B \to W$ tal que para todo espacio vectorial W y toda $f : B \to W$ existe una única aplicación lineal $\phi : V \to W$ que hace conmutativo el siguiente diagrama :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & V \arrow[d, "\phi"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Probemos que $g(B)$ es una base de V . a) $g(B)$ genera a V : sea $W = L(g(B))$ el subespacio lineal generado por $g(B)$, consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "g'"'] & V \arrow[d, "\phi"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Aquí $g' ; B \to W$ es la misma g restringida en su rango : existe ϕ que hace conmutativo el triángulo . Para la situación

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "g = ig'"'] & & V \\ & V \arrow[ur, "1_V"'] & \end{tikzcd}$$

donde $i : W \to V$ es la inclusión canónica , 1_V es la única aplicación lineal que hace conmutativo tal triángulo , pero $i\phi$ también lo hace , luego $i\phi = 1_V$. En particular $V = 1_V(V) = i(\phi(V)) \subset i(W) = W$.

b) $g(B)$ es linealmente independiente . Supongamos $\Sigma \lambda_i g(b_i) = 0$ y probemos que los λ_i son nulos para $i = 1 , \dots , n$. Sea u_i definida como

$$u_i(b) = \begin{cases} 1 & \text{si } b = b_i \\ 0 & \text{si } b \neq b_i \end{cases}$$

Existe una única ϕ_i lineal tal que el siguiente triángulo conmuta :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "u_i"'] & & V \arrow[dl, "\phi_i"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

Luego tenemos $0 = \phi_i(0) = \phi_i(\sum_j \lambda_j g(b_j)) =$ $\sum_j \lambda_j \phi_i(g_j)) = \sum_j \lambda_j u_i(b_j) = \lambda_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ahora veamos que ϕ es inyectiva , en efecto si $b_1 \neq b_2$ en B , tomemos una función $f : B \to K$ tal que $f(b_1) \neq f(b_2)$, luego existe una única $\phi : V \to K$ tal que $\phi g = f$, luego $\phi(g(b_1)) \neq \phi(g(b_2))$, en particular $g(b_1) \neq g(b_2)$.

Sea C cualquier conjunto tal que exista una biyección $h : C \to V - \phi(B)$ y tal que $C \cap B = \emptyset$. Definamos U como la reunión de B y C ; la función $K : U \to V$, definida por $K(x) = f(x)$, para $x \in C$ y $K(x) = g(x)$, para $x \in B$, es una biyección .

Las operaciones

$$x + y = h^{-1}(h(x) + h(y)) \qquad (x , y \in U)$$

$$\lambda x = h^{-1}(\lambda h(x)) \qquad (\lambda \in K)$$

convierten a U en un K- espacio vectorial isomorfo a V . Como además $g(B)$ es una base de V , B es una base de U .

Un par (V , ρ) que representa a F , puede ser caracterizado así : $u \in V$ si $u : B \to K$ es una aplicación nula salvo para un número finito de elementos b en B . Por otra parte $\rho_W : F(W) \to \mathrm{Hom}(V,W)$ estaría definida por $\rho_W(f)(u) = \sum_{b \in B} u(b)\, f(b)$ (la suma está bien definida ya que $u(b) = 0$ casi en todo x excepto un número finito de éllos) .

Es claro que $\rho_W(f)$ es lineal. También es inyectiva : porque si se supone que $\rho_W(f) = \rho_W(g)$ y se define

$$u_b(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = b \\ 0 & \text{si } x \neq b \end{cases}$$

se obtiene que $f(b) = \Sigma\, u_b(x) f(x) = \Sigma\, u_b(x) g(x) = g(b)$. Finalmente , ρ_W es sobreyectiva porque si $\phi : V \to W$ es cualquier aplicación lineal , definimos $f : B \to W$ por la fórmula $f(b) = \phi(u_b)$. Hecho lo cual se verifica la siguiente cadena de igualdades $\rho_W(f)(u) = \Sigma\, u(b) f(b) = \Sigma\, u(b)\phi(u_b) = \phi(\Sigma\, u(b) u_b) = \phi(u)$. Lo que se traduce en la igualdad $\rho_W(f) = \phi$.

Por último , veamos que $\rho : F \to h^V$ es una transformación natural . Porque si $f : B \to W$ es una aplicación conjuntista y $\phi : W \to Z$ es lineal , $h^V(\phi)(\rho_W(f))(u) = (\phi\rho_W(f))(u) = \phi(\Sigma\, u(b) f(b)) = \Sigma\, u(b)\phi(f(b))$. Por otra parte $\rho_Z(F(\phi))(f)(u) = \rho_Z(\phi f)(u) = \Sigma\, u(b)(\phi f)(b)$. Con lo cual se ha comprobado que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(W) & \xrightarrow{F(\phi)} & F(Z) \\ \rho_W \downarrow & & \downarrow \rho_Z \\ h^V(W) & \xrightarrow[h^V(\phi)]{} & h^V(Z) \end{array}$$

es conmutativo.

Veamos que, de manera dual, el hecho de que todo espacio vectorial tenga una base (lo cual puede ser demostrado haciendo uso del lema de Zorn) es consecuencia de la representabilidad de un funtor.

Sea V un espacio vectorial sobre K, y C la categoría cuyos objetos son los subconjuntos linealmente independientes de V. Un morfismo de B' en B es simplemente una aplicación conjuntista $\phi : B' \to B$. Definimos el funtor $F : C^{*} \to \mathrm{Conj}$ (a) sobre los objetos: $F(B)$ es el conjunto de las aplicaciones f de B en V, (b) sobre los morfismos: $F(\phi)(f) = f\phi$, para cada $\phi : B' \to B$ y $f \in F(B)$. En estas condiciones

Proposición 5

Si F es representable, y (B,ρ) es un par de representación, entonces B es una base de V.

Demostración

Tomemos como punto de partida el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F(B') & \overset{\rho_{B'}}{\tilde{\rightarrow}} & h_B(B') = \mathrm{Hom}\,(B',B) \\ F(\phi)\uparrow & & \uparrow h_B(\phi) \\ F(B) & \underset{\rho_B}{\tilde{\rightarrow}} & h_B(B) = \mathrm{Hom}(B,B) \end{array}$$

y denotemos por f en $F(B)$ al elemento $\rho_B^{-1}(1_B)$ y $g = F(\phi)(f) = \rho_{B'}^{-1}(\phi)$. Estas relaciones indican que existe una función $f : B \to V$ que establece una biyección entre las funciones $\phi : B' \to B$ y las funciones $g : B' \to V$ por medio de la relación $f\phi = g$.

Probemos que f es inyectiva . En efecto supongamos que $a = f(b_1) = f(b_2)$ y consideremos la función constante $g : B \to V$, $g(b) = a$, para todo $b \in V$. Existe una única función $\phi : B \to B$ tal que el triángulo siguiente conmuta

$$\begin{array}{ccc} B & \overset{f}{\rightarrow} & V \\ \phi\uparrow & \nearrow g & \\ B & & \end{array}$$

Las funciones constantes $\phi_i : B \to B$, $\phi_i(b) = b_i$, para todo $b \in B$ $(i = 1,2)$ satisfacen $f\phi_i = g$. Por la unicidad se concluye $\phi_1 = \phi_2$, en particular $b_1 = b_2$.

Para probar que B es una base de V , falta ver que $L(B) = V$. Supongamos que sucediera que $L(B) \neq V$, y tomemos un $x \in V - L(B)$. Sea B' el conjunto B agregado del punto x ; es claro que f no es sobre , luego tomemos $y \notin f(B)$, y definamos

$$g(u) = \begin{cases} f(u) & \text{si } u \neq x \\ y & \text{si } u = x . \end{cases}$$

Como sabemos que la función f es inyectiva , g también lo es . Por otra parte sabemos que existe una ϕ tal que $f\phi = g$; en particular ϕ es inyectiva . Pero para $f = gi$ existe una única función , que es 1_B, tal que

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] & V \\ B \arrow[u, "1_B"] \arrow[ur, "f = gi"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo . Por otro lado para la función ϕi : $B \to B$ se cumple $f(\phi i) = gi = f$, por consiguiente $\phi i = 1_B$, en particular $\phi(b) = b$ para todo $b \in B$; pero ahora $\phi(x) = b \in B$, luego $\phi(x) = \phi(b)$: como ϕ es inyectiva $x = b \in B$, lo cual contradice la elección de x .

3 PRODUCTO TOPOLOGICO

Sea Top la categoría de los espacios topológicos. Sea $F : \mathrm{Top} \to \mathrm{Conj}$ el funtor definido sobre los objetos por $F(R) = \mathrm{Hom}(R,X) \times \mathrm{Hom}(R,Y)$. Si $f : R \to S$ es una aplicación contínua se define $F(f) : F(S) \to F(R)$ en la forma $F(f)(f,v) = (uf,vf)$, cuando $u : S \to X$, $v : S \to Y$ son funciones contínuas .

Proposicion 6

Si el funtor F es representable y si (P,δ) es un par de representación entonces existen funciones contínuas $p_1 : P \to X$, $p_2 : P \to Y$ tales que la topología de P es la menor topología de P que hace que las funciones p_1 y p_2 sean contínuas . En otros términos P es el producto topológico de X y de V . Más aún , F siempre es representable .

Demostración

Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{array}{ccc}
(p_1,p_2) \in F(P) = \mathrm{Hom}(P,X) \times \mathrm{Hom}(P,Y) & \xrightarrow{\sim} h_p(0) = & \mathrm{Hom}(P,P) \\
\downarrow F(f) & & \downarrow h_p(f) \\
(u,v) \in F(R) = \mathrm{Hom}(R,X) \times \mathrm{Hom}(R,Y) & \underset{\delta_p}{\xrightarrow{\sim}} h_p(R) = & \mathrm{Hom}(R,P)
\end{array}
$$

Donde $(p_1,p_2) = \delta_p^{-1}(1_p)$, $f = \delta_R(u,v)$, por lo tanto $F(f)(p_1,p_2) = (u,v)$ o dicho de otra manera $p_1 . f = v$.

Se concluye que para todo par de funciones contínuas u , v existe una única función contínua f tal

(i) $p_2 f = v$ y (ii) $p_1 f = u$.

Sea t la topología de P , y supongamos que t' sea la menor topología sobre el conjunto P que hace que p_1 y p_2 sean contínuas (topología inicial en el léxico de Bourbaki),

Probemos que $t = t'$. Por la definición de t' es claro que $t' \subset t$, por consiguiente la función identidad $id : P \to P'$ es contínua : aquí hemos denotado por P' al mismo P pero con la topología t' .

Existe una función f contínua tal que la función $p' \xrightarrow{f} P \xrightarrow{p_2} Y$ es igual a p_2 y la función

$p' \xrightarrow{f} P \xrightarrow{p_1} X$ es igual a p_1

Como por otra parte los compuestos

$$P \xrightarrow{id} P' \xrightarrow{f} P \xrightarrow{p_2} Y$$

$$P \xrightarrow{id} P' \xrightarrow{f} P \xrightarrow{p_1} X$$

siguen siendo p_2 y p_1 respectivamente , la unicidad lleva a concluir que $f(id) = id$. Así pues $f = id :$ $P' \to P$ lo cual nos dice que las topologías t y t' están en la relación $t \subset t'$.

Por último , podemos tomar siempre como representante P al espacio topológico $X \times Y$ que tiene como subbase a conjuntos de la forma $p_1^{-1}(U)$ y $p_2^{-1}(V)$, donde U es abierto en X y V es abierto en Y , siendo $p_1 : X \times Y \to X, p_2 : X \times Y \to Y$, las dos proyecciones canónicas conocidas . Dicho lo cual $\lambda_R : Hom(R,X) \times Hom(R,Y) \to Hom(R,X \times Y)$ estaría definida por $\lambda_R(u,v)(r) = (u(r) , v(r))$, para todo $r \in R$. Es fácil ver que λ_R es una biyección y que λ es transformación natural .

BIBLIOGRAFIA

(1) Mitchell , B. , Theory of categories . Academic Press . New York and London , 1965 .

(2) Mac Lane , S. , Categories for the working mathematician . Springer Verlag , New York , 1971 .

(3) Cicogna , G. , "Examples of functor adjuntions in Elementary Analysis" . American Mathematical Monthly , Vol. 85 , 260-261 (1978) .

(4) Grothendieck , A. "Sur quelques points d'algèbre homologique" . Tohoku Math. J. 9 , 119-221 (1957)

Raul Rojas

Instituto Universitario Pedagógico

de Barquisimeto , Venezuela .