Boletín de Matemáticas
Nueva Serie Vol.I No.2 (1994) y Vol.II No.1 (1995) (1-16)

ARCO-CONEXION LOCAL EN LAS COMPACTACIONES POR FINITOS PUNTOS

JAIRO A. CHARRIS Y MARTHA P. DUSSAN
Universidad Nacional de Colombia

ABSTRACT. The local path-connectedness of finite-point compactifications of spaces admitting fundamental systems of closed path-connected neighborhoods is established. The result particularly applies to finite-point compactifications of topological manifolds.

1. INTRODUCCIÓN

Las compactaciones de espacios topológicos son útiles en análisis, debido al hecho de que los espacios compactos portan una estructura natural de espacio uniforme. Algunas veces también suministran un marco natural para ciertos conceptos. Por ejemplo, las funciones meromorfas en un dominio Ω del plano complejo $\mathbb{C}$ son las funciones analíticas de Ω en la esfera de Riemann, y ésta es la compactación de $\mathbb{C}$ por adición de un punto (compactación de Alexandroff).

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 54D35.Secondary 54D05.
Key words and phrases. Conexión, conexión local, arco-conexión, arco-conexión local, compacidad, compacidad local, σ-compacidad, paracompacidad, componente conexa, componente arco-conexa, variedad topológica..

El primer autor reconoce el apoyo parcial de la Facultad de Ciencias y del CINDEC. El segundo autor, el de la Fundación Mazda para el Arte y la Ciencia.

Las compactaciones por un punto son las más usadas. Sin embargo, pueden resultar inapropiadas para algunos propósitos. Por ejemplo, la compactación por un punto del cilindro $\{(x,y,z)/x^2+y^2=1,|z|<1\}$ no es una 2-variedad, mientras que la compactación por dos es una esfera. Esto hace interesante considerar compactaciones por más de un punto.

En lo que sigue, sólo consideraremos compactaciones por finitos puntos. En [15], [17], [18] el lector podrá encontrar un examen detallado de este concepto.

Un problema interesante es el de determinar qué tanto de la estructura del espacio se traslada a la compactación. En este trabajo demostraremos que bajo hipótesis no muy restrictivas (σ-compacidad, paracompacidad, arco-conexión local por cerrados) las compactaciones por n puntos de espacios localmente arco-conexos son espacios localmente arco-conexos. También estableceremos la conexión local de las compactaciones por n puntos de espacios localmente conexos. Aunque este último resultado es conocido, depende usualmente de argumentos y conceptos sin un interés muy evidente en otras partes de la matemática (v.[9]). Este último problema también ha sido considerado para otras compactaciones, incluida la de Stone-Cech ([10], [12]).

Aunque es de esperar que el problema de la arco-conexión local de las compactaciones por finitos puntos haya recibido atención, no hemos encontrado ninguna referencia significativa. Sólo en [11] y [14] hemos encontrado algunos resultados en esta dirección. En [6] hemos considerado el caso de las compactaciones por un punto.

Las demostraciones que daremos están basadas en ideas aparentemente introducidas por Malgrange [16]. Sin embargo, en lugar de [16] recurriremos a [19], donde se completan argumentos insuficientes de Malgrange ([19], pp. 85- 88).

Seguiremos la terminología de [4], [7], observando la equivalencia de la noción de σ-compacidad de [7] con la de enumerabilidad al infinito de [4]. Un espacio localmente compacto metrizable es paracompacto ([5], p.92; [7], p.186).

Si X es un espacio topológico y $L \subseteq X$, la ***envolvente llena*** $\check{L}$ de L es la reunión de L con las componentes conexas relativamente compactas en X de $X - L$. Si X es localmente compacto y localmente conexo, entonces:

1. $X - \check{L}$ no tiene componentes conexas relativamente compactas en X.
2. Si L es cerrado en X, $\check{L}$ es cerrado en X.
3. Si $L \subseteq L'$, entonces $\check{L} \subseteq \check{L}'$; también, $\check{\check{L}} = \check{L}$.
4. Si L es compacto y si X tiene sólo un número finito de componentes conexas compactas, $\check{L}$ también es compacto.

Las demostraciones pueden encontrarse en esencia en [19], p.85.

Si X es un espacio topológico, una ***curva*** de X es una aplicación continua $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$. Si $a, b \in X$ y $\alpha(0) = a, \alpha(1) = b$, se dice que α ***une*** *a* ***con*** *b*. Si $A \subseteq X$, y si dados arbitrariamente $a, b \in A$ existe una curva α de X contenida en A ($\alpha([0,1]) \subseteq A$) que une a con b, se dice que A es ***arco-conexo***. Si A es arco-conexo, A es conexo. Si $A \subseteq X$, un subconjunto arco-conexo y no vacio C de A, maximal en el sentido de que no está propiamente contenido en ningún otro subconjunto arco-conexo de A, se denomina una ***componente arco-conexa*** de A. Si $a \in C$, C es el conjunto de los puntos que pueden unirse con a mediante una curva de A. Si X mismo es un subconjunto arco-conexo de X, se dice que el espacio topológico X es ***arco-conexo***; y si todo punto de X tiene un sistema fundamental de vecindades arco-conexas, que X es ***localmente arco-conexo***. Si tal sistema fundamental puede además tomarse formado por vecindades cerradas, se dice que X es ***localmente arco-conexo por cerrados***. Un espacio localmente arco-conexo puede no ser localmente arco-conexo por cerrados (v. [8]). Si X es regular ([4], p.90) y localmente conexo, todo punto admite un sistema fundamental de vecindades cerradas conexas. No sabemos si un espacio regular (ó, más aún, localmente compacto), localmente arco- conexo, es necesariamente localmente arco-conexo por cerrados.

Nota 1.1. La definición de ***arco-conexión*** que hemos adoptado corresponde a la de ***path-connectedness*** y no a la de ***arc-connectedness*** de [11]. No se exige, en efecto, que $\alpha([0,1])$ sea homeomorfo a [0,1]. Quizá el apelativo ***conexo por curvas*** sería más apropiado, pero es poco usado en castellano. Un espacio localmente conexo puede no ser localmente arco-conexo (v. [13]).

Nota 1.2. Si X es localmente compacto y localmente arco-conexo por cerrados, todo punto admite un sistema fundamental de vecindades arco-conexas compactas.

Los resultados siguientes, bien conocidos, se usarán repetidas veces.

Lema 1.1. *Si X es localmente arco-conexo, toda componente arco-conexa de X es a la vez abierta y cerrada en X y todo punto admite un sistema fundamental de vecindades abiertas arco-conexas. Si Ω es un subconjunto abierto de X, toda componente arco-conexa de Ω es abierta en X, y Ω mismo es un espacio localmente arco-conexo.*

Lema 1.2. *Si Y es un subconjunto de X a la vez abierto y cerrado, y $a \in Y$, la componente arco-conexa C de a en X queda contenida en Y. Si X es localmente arco-conexo, la componente arco-conexa de todo punto x coincide con la componente conexa de x y es la intersección de los subconjuntos abiertos y cerrados de X que contienen a x.*

Análogamente a como se definió $\check{L}$, definimos ahora:

Definición 1.2. *Si X es un espacio topológico y L es un subconjunto de X, $\widehat{L}$, la* ***envolvente llena arco-conexa*** *de L, es el conjunto unión de L y de las componentes arco-conexas relativamente compactas en X de $X - L$.*

El siguiente teorema adapta a $\widehat{L}$ resultados establecidos en [19] para $\check{L}$. Su demostración es inmediata (v.[8] para los detalles).

Teorema 1.1. *Si X es un espacio topológico localmente compacto y L es un subconjunto de X, entonces:*

1. *$X - \widehat{L}$ no tiene componentes arco-conexas relativamente compactas en X.*

2. *Si X es localmente arco-conexo y L es cerrado en X, también lo es $\widehat{L}$.*

3. *Si $L \subseteq L'$, $\widehat{L} \subseteq \widehat{L}'$. También, $\widehat{\widehat{L}} = \widehat{L}$.*

En la sección 2 estableceremos un resultado básico: la existencia de estrellas con características especiales. En la sección 3 demostraremos los principales resultados.

Nota 1.3 En lo que sigue de este trabajo ***supondremos que todos los espacios topológicos involucrados son espacios de Hausdorff*** ([4], p. 84).

2. COMPACTACIONES POR n PUNTOS.

Una ***extensión por n puntos*** de un espacio topológico (X, τ) (τ denota la topología de X) es un espacio topológico (X^*, τ^*) tal que $X \subseteq X^*$, que $\tau^*|X = \tau$ (aquí $\tau^*|X$ denota la topología inducida por τ^* sobre X), que X es denso en X^* para τ^* y que $X^* - X = \{w_1, ..., w_n\}$ con $w_i \neq w_j$ para $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3, ..., n$. Como suponemos que X^* es de Hausdorff, X será también abierto en X^*. Si (X^*, τ^*) es compacto, diremos que (X^*, τ^*) es una ***compactación de* X *por* n *puntos*.**

Si (X^*, τ^*) es una extensión de X por n puntos, una ***estrella de* X *para*** τ^* es un conjunto $\{X_1, ..., X_n\}$ de n abiertos disyuntos de X tales que

$$M = M(X_1, ..., X_n) := X - \bigcup_{i=1}^{n} X_i,$$

el ***núcleo de la estrella***, es un subconjunto compacto de X, mientras que para todo $j = 1, 2, ..., n$,

$$\widetilde{X}_j := X - \bigcup_{i \neq j} X_i$$

no es compacto. Nótese que $\widetilde{X}_j = X_j \cup M$ es cerrado en X para τ. Se supone además que w_i está en la clausura de X_i pero no en la de X_j para $j \neq i$, y que $X_i \cup \{w_i\}$ es abierto en X^*.

Una estrella $\{X_1, ..., X_n\}$ de X define una topología $\tau(X_1,,,, X_n)$ sobre X^* tomando como sistema fundamental de vecindades de $x \in X$ para $\tau(X_1,,,, X_n)$ el sistema de vecindades de x en X para τ, y como sistema fundamental de vecindades de $w_k, k = 1, 2, ..., n$, los conjuntos $(X - L) \cup \{w_k\}$, donde L es cerrado en X para τ y $L \cap \widetilde{X}_k$ es compacto. Como $(X - L) \cup \{w_k\} \supseteq (\widetilde{X}_k - L) \cup \{w_k\} \supseteq X_k \cup \{w_k\} - L \cap \widetilde{X}_k, (X - L) \cup \{w_k\}$ es una vecindad de w_k para τ^*, así que $\tau(X_1, ..., X_n) \subseteq \tau^*$. Como además, si (X^*, τ^*) es compacto entonces $(X^*, \tau(X_1, ..., X_n))$ es de Hausdorff ([15], [17], [18]), $\tau(X_1, ..., X_n) = \tau^*$ ([4], p.99) en el caso de las compactaciones.

Teorema 2.1. *([15], [17], [18]) Si (X^*, τ^*) es una compactación de (X, τ) por n puntos $w_1, ..., w_n$, existe una estrella $\{X_1, ..., X_n\}$ de X tal que $\tau(X_1, ..., X_n) = \tau^*$.*

Demostración. Sean $U_1, ..., U_n$ vecindades abiertas respectivas de $w_1, ..., w_n$ para τ^* tales que $U_i \cap U_j = \emptyset$ para $i \neq j$, y sea $X_i = U_i - \{w_i\}, i = 1, 2, ..., n$.■

Nota 2.1. Un espacio compacto no admite compactaciones por adición de nuevos puntos. Si (X^*, τ^*) es una compactación de X por n puntos y $\{X_1, ..., X_n\}$ es una estrella de X para τ^*, los conjuntos $(X - F) \cup \{w_k\}, (\widetilde{X}_k - F) \cup \{w_k\}$ y $(X_k - F) \cup \{w_k\}$ son, cuando F recorre los subconjuntos cerrados de X tales que $\widetilde{X}_k \cap F$ es compacto, sistemas fundamentales de vecindades de w_k para τ^*.

Estableceremos ahora que la topología de una compactación por n puntos de un espacio localmente arco-conexo puede obtenerse a partir de una estrella con características especiales.

Lema 2.1. *Si X es localmente arco-conexo por cerrados y tiene sólo un número finito de componentes arco-conexas compactas, y si (X^*, τ^*) es una compactación de X por n puntos $w_1, ..., w_n$, existe una estrella $\{X_1, ..., X_n\}$ de X para τ^* tal que*

1. $M = X - \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ contiene todas las componentes arco-conexas compactas de X, y

2. $\widetilde{X}_i = X_i \cup M$ tiene sólo finitas componentes arco-conexas compactas.

Demostración. Sean $\{X_1', ..., X_n'\}$ una estrella de X, $M' = X - \bigcup_{i=1}^{n} X_i'$, su núcleo. Por la nota 1.2, existen finitos conjuntos arco-conexos compactos de $X, U_1, ..., U_m$, tales que $M' \subseteq U_1 \cup .... \cup U_m$. Sea $\widetilde{C}$ la reunión de las componentes arco-conexas compactas de X y sean $M = \widetilde{C} \cup U_1 \cup .... \cup U_m$, $X_i = X_i' - M, i = 1, 2, ...n$. Puesto que $X - \bigcup_{i=1}^{n} X_i = M$ es compacto mientras que $\widetilde{X}_i = M \cup X_i$ no lo es (pues $M \cup X_i \supseteq M' \cup X_i'$), $\{X_1, ..., X_n\}$ es una estrella de X cuyo núcleo, M, tiene sólo finitas componentes arco-conexas.
Sea C una componente arco-conexa compacta de $\widetilde{X}_i$. Si fuera $C \cap M = \emptyset$, C sería una componente arco-conexa de X_i; y siendo entonces un subconjunto abierto de X (pues X_i es abierto en X), sería también una componente arco-conexa compacta de X. Esto es absurdo, pues C estaría contenida en M. Entonces $C \cap M \neq \emptyset$, y C contendrá alguna componente arco-conexa de M. Puesto que M sólo tiene finitas componentes arco-conexas, sólo un número finito de las C pueden intersectar a M. Como todas lo hacen, deberán ser finitas en número. ∎

Nota 2.2. La hipótesis de que X tenga sólo un número finito de componentes arco-conexas compactas no es restrictiva si esperamos que X^* sea localmente arco-conexo. En efecto, si el número de tales componentes fuera infinito, su reunión C, la cual es cerrada en X, no podría ser compacta (pues cada una de las componentes es abierta en X), así que habrá al menos un w_i tal que toda vecindad U de w_i intersecta a C. Entonces existirá una componente arco-conexa C' de C tal que C'$\cap U \neq \emptyset$ y como C' es una componente arco-conexa de X^* (por ser un conjunto arco-conexo y a la vez abierto y cerrado en X^*), si U fuera arco-conexa se tendría que U$\subseteq$C', lo cual es absurdo, pues $w_i \notin$C'. Si X es localmente arco-conexo, las componentes arco-conexas compactas y las componentes conexas compactas de X son las mismas (lema 1.2), así que en el lema 2.1 basta suponer que X sólo tiene finitas componentes conexas compactas.

Nota 2.3. La hipótesis de que X sea localmente arco-conexo por cerrados es importante en la demostración del lema 2.1. Si $n \geq 2$, no hemos podido establecer la existencia de estrellas que satisfagan las condiciones del lema bajo la sola hipótesis de que X sea localmente arco-conexo. Si $n = 1$, la arco-conexión local de X es suficiente, pues podemos tomar $X_1' = X$, así que $M' = \emptyset$. En este caso M, en el lema 2.1, es simplemente la reunión de las componentes arco-conexas compactas de X, y $\widetilde{X}_1 = X$ sólo tiene finitas componentes arco-conexas compactas.

Lema 2.2. *Sea X localmente arco-conexo por cerrados, con sólo un número finito de componentes arco-conexas compactas, y sea $\{X_1, ... X_n\}$ una estrella de X con las características dadas por el lema 2.1. Sea $1 \leq k \leq n$ y sean K un subconjunto compacto de $\widetilde{X}_k = M \cup X_k$, $M = X - \bigcup_{i=1}^{n} X_i$, y M_k la reunión de M y de las componentes arco-conexas compactas de $\widetilde{X}_k$ (las cuales son finitas en número). Sea $\xi_k(K \cup M_k)$ la reunión de $K \cup M_k$ con las componentes arco-conexas relativamente compactas en $\widetilde{X}_k$ de $\widetilde{X}_k - K \cup M_k$. Entonces, $\xi_k(K \cup M_k)$ es un subconjunto compacto de $\widetilde{X}_k$.*

Demostración. Puesto que toda componente arco-conexa de $\widetilde{X}_k - K \cup M_k$ es una componente arco-conexa de un abierto de X_k, es entonces abierta en X_k (de hecho, en X). Por lo tanto, $\xi_k(K \cup M_k)$ es cerrado en $\widetilde{X}_k$, de lo cual, en X.

Sea V una vecindad compacta de $K \cup M_k$ en $\widetilde{X}_k$ y sea $F = \mathcal{F}_k(V) \cap \xi_k(K \cup M_k)$, donde $\mathcal{F}_k(V) = V \cap \overline{\widetilde{X}_k - V}$ ($\overline{A}$ es la clausura de A en X) es la frontera de V relativa a $\widetilde{X}_k$. Puesto que $F \subseteq \xi_k(K \cup M_k) - K \cup M_k$, las componentes relativamente compactas en $\widetilde{X}_k$ de $\widetilde{X}_k - K \cup M_k$ recubren a F; y siendo compacto, $F \subseteq B_1 \cup ... \cup B_p$ para un número finito p de ellas. Si B es otra de tales componentes, $B \neq B_i$, *para* $i = 1, 2, ..p$, necesariamente $B \cap F = \emptyset$. Veamos entonces que

$$\xi_k(K \cup M_k) \subseteq V \cup \overline{B}_1 \cup ... \cup \overline{B}_p, \tag{2.1}$$

lo cual demostrará el lema.

Sea $x \in \xi_k(K \cup M_k)$. Si $x \in K \cup M_k$ ó $x \in B_j, j = 1, ..., p$, no hay nada que demostrar. Supongamos entonces que x pertenece a una componente arco-conexa relativamente compacta B de $\widetilde{X}_k - K \cup M_k$ en $\widetilde{X}_k, B \neq B_i, i =$

$1, 2, ..., p$. Puesto que $B \cap F = \emptyset$, también $B \cap \mathcal{F}_k(V) = \emptyset$. Y como B es un conjunto conexo, $B \subseteq V$ ó $B \subseteq X - V$. Pero $\overline{B} \cap (K \cup M_k) \neq \emptyset$. Si no, $B = \overline{B} \subseteq X_k$, y B sería abierta y cerrada en $\widetilde{X}_k$, de lo cual, una componente arco-conexa compacta de $\widetilde{X}_k$. Entonces $B \subseteq M_k$, lo cual es absurdo. Por lo tanto $B \subseteq V$, asi que $x \in V \cup \overline{B}_1 \cup ... \cup \overline{B}_p$, y (2.1) es válida. ∎

Corolario 2.1. *Sea X localmente arco-conexo por cerrados con sólo finitas componentes arco-conexas compactas, y sea $\{X_1, ..., X_n\}$ una estrella como en el lema 2.1 y L un subconjunto cerrado de X tal que, para algún $k = 1, 2, ..., n, K = L \cap \widetilde{X}_k$ es compacto. Entonces, existe $L' \supseteq L$, cerrado en X y con $L' \cap \widetilde{X}_k$ compacto, tal que $\widetilde{X}_k - L'$ no tiene componentes arco-conexas relativamente compactas en $\widetilde{X}_k$. Además, $\widehat{L} \cap \widetilde{X}_k$ es un subconjunto compacto de $\widetilde{X}_k$.*

Demostración. Para establecer la primera afirmación, tómese $L' = L \cup \xi_k(K \cup M_k)$. En cuanto a la segunda, obsérvese que $\widehat{L}$ es cerrado en X (teorema 1.1). Por lo tanto $\widehat{L} \cap \widetilde{X}_k$ es cerrado, y será suficiente comprobar que $\widehat{L} \cap \widetilde{X}_k \subseteq \xi_k(K \cup M_k)$. Sea $x \in \widehat{L} \cap \widetilde{X}_k$. Podemos suponer que $x \notin K = L \cap \widetilde{X}_k$ y, también, que $x \notin M_k$, de lo cual x pertenecerá a una componente arco-conexa C' de $X - L$, relativamente compacta en X. Sea C la componente arco-conexa de x en $\widetilde{X}_k - (K \cup M_k)$. Puesto que $\overline{C} \subseteq \overline{C'} \cap \widetilde{X}_k$ y este último es un subconjunto compacto de $\widetilde{X}_k$, también $\overline{C}$ lo es. Por lo tanto, C es una componente arco-conexa relativamente compacta en $\widetilde{X}_k$ de $\widetilde{X}_k - (K \cup M_k)$, así que $x \in C \subseteq \xi_k(K \cup M_k)$. ∎

Corolario 2.2. *Si X es localmente compacto, localmente arco-conexo y sólo tiene finitas componentes arco-conexas compactas, y si L es un subconjunto compacto de $X, \widehat{L}$ es también compacto.*

Demostración. Si X es compacto, $\widehat{L} = X$. Si X no es compacto, podemos tomar $n = 1$ en el anterior corolario, circunstancia en la cual basta suponer que X es localmente arco-conexo. ∎

Nota 2.4. La arco-conexión local puede sustituirse por conexión local (la cual es siempre conexión local por cerrados) en todos los argumentos anteriores, demostrándose, en forma totalmente análoga, que si X es localmente conexo y sólo tiene finitas componentes conexas compactas, toda compactación por n puntos $X^* = X \cup \{w_1, ..., w_n\}$ admite una estrella $\{X_1, ..., X_n\}$ cuyo núcleo $M = X - \bigcup_{i=1}^n X_i$ sólo tiene finitas componentes conexas, contiene toda componente conexa compacta de X, y es además tal que $\widetilde{X}_i = M \cup X_i, i = 1, 2, ..., n$, sólo tiene finitas componentes conexas compactas (asi que la reunión C_k de éstas es compacta). En tales circunstancias se verifica inmediatamente que si L es cerrado en X, $L \cap \widetilde{X}_k$ es compacto, y $L_k = L \cup C_k \cup M$, entonces la reunión $\sigma_k(L_k \cap \widetilde{X}_k)$ de $L_k \cap \widetilde{X}_k$ y de las componentes conexas relativamente compactas en $\widetilde{X}_k$ de $\widetilde{X}_k - L_k$ es un subconjunto compacto de $\widetilde{X}_k$ tal que $\widetilde{X}_k - \sigma_k(L_k \cap \widetilde{X}_k)$ no tiene componentes conexas relativamente compactas en $\widetilde{X}_k$. Además, $\check{L} \cap \widetilde{X}_k$ es compacto, y si L es compacto, también $\check{L}$ lo es. Entonces

Teorema 2.2. *Si X es localmente conexo y sólo tiene un número finito de componentes conexas compactas, y si $X^* = X \cup \{w_1, ..., w_n\}$ es una compactación de X por n puntos, X^* es localmente conexo.*

Demostración. Sea $\{X_1, ..., X_n\}$ una estrella de X con las características previstas en la nota 2.4. Entonces, si L es cerrado en X y $L \cap \widetilde{X}_k$ es compacto y L_k es como arriba, $(\widetilde{X}_k - \sigma_k(L_k \cap \widetilde{X}_k)) \cup \{w_k\}$ es una vecindad conexa de w_k para $\tau(X_1, ...X_n) = \tau^*$, pues w_k está en la clausura de toda componente de $\widetilde{X}_k - \sigma_k(L_k \cap \widetilde{X}_k)$.■

Nota 2.5. El resultado anterior es falso si X tiene infinitas componentes conexas compactas. Tómese, por ejemplo, $X = \{\frac{1}{n}/n = 1, 2, ...\}$ con la topología discreta. Claramente $X^* = X \cup \{0\}$ es, con la topología de subespacio de la recta real $\mathbb{R}$, una compactación de X por un punto, y 0 no admite un sistema fundamental de vecindades conexas. Si X es conexo, es claro que X^* también lo es.

Nota 2.6. Si X no es conexo, X^* puede ser o no conexo. Por ejemplo, el subespacio $\{(x, y, z)/x^2+y^2 = 1, 0 < |z| < 1\}$ de $\mathbb{R}^3$ tiene una compactación por cuatro puntos formada por dos esferas disyuntas en $\mathbb{R}^3$, pero admite también compactaciones conexas por uno (dos toros tangentes en un punto de estrangulamiento de ambos), dos (un toro con dos estrangulamientos) y tres puntos (dos esferas tangentes).

3. Arco-conexión local de las compactaciones por n puntos.

Teorema 3.1. *Si X es localmente arco-conexo por cerrados y σ-compacto, si X tiene solamente un número finito de componentes arco-conexas compactas, y si (X^*, τ^*) es una compactación de X por finitos puntos $w_1, ..., w_n$, entonces X^* es localmente arco-conexo para τ^*.*

Demostración. Sea $\{X_1, ..., X_n\}$ una estrella de X con las características dadas por el lema 2.1. Se tiene que $\tau^* = \tau(X_1, ..., X_n)$. Sea $\{K_m / m \geq 0\}$ una sucesión de subconjunto compactos de X con $K_0 = \emptyset, K_m \subseteq K^0_{m+1}$ (A^0 es el interior de A relativamente a X) para todo $m \geq 1$ y $X = \bigcup_{m=0}^{\infty} K_m$ ([4], p.106; [7], p.240). Sean M_k la reunión de M con las componentes conexas compactas de $\widetilde{X}_k$ y L un subconjunto cerrado de X tal que $L \supseteq M_k$, que $L \cap \widetilde{X}_k$ sea compacto y que $\widetilde{X}_k - L$ no tenga componentes arco-conexas relativamente compactas (corolario 2.1), así que $L \cap \widetilde{X}_k = \xi_k(L \cap \widetilde{X}_k)$. Demostraremos que $(\widetilde{X}_k - L) \cup \{w_k\}$ es arco-conexa.

Sea $0 = t_0 < t_1 < .... < t_m < t_{m+1} < ... < 1$ una sucesión de números reales convergente a 1. Sea $a = a_0 \in \widetilde{X}_k - L$, y para cada $m \geq 1$, sea

$$(3.1)\quad a_m \in (\widetilde{X}_k - \xi_k((L \cup K_m) \cap \widetilde{X}_k)) \cap C(a_{m-1}, \widetilde{X}_k - \xi_k((L \cup K_{m-1}) \cap \widetilde{X}_k)),$$

donde $\xi_k((L \cup K_m) \cap \widetilde{X}_k)$ es la reunión de $(L \cup K_m) \cap \widetilde{X}_k$ con las componentes arco-conexas relativamente compactas de $\widetilde{X}_k - (L \cup K_m) \cap \widetilde{X}_k$ y $C_{m-1} := C(a_{m-1}, \widetilde{X}_k - \xi_k((L \cup K_{m-1}) \cap \widetilde{X}_k))$ es la componente arco-conexa de a_{m-1} en $\widetilde{X}_k - \xi_k((L \cup K_{m-1}) \cap \widetilde{X}_k)$. Puesto que $\xi_k((L \cup K_m) \cap \widetilde{X}_k)$ es compacto mientras que C_{m-1} no lo es, los conjuntos en (3.1) son no vacios. Obsérvese que los conjuntos $(\widetilde{X}_k - \xi_k((L \cup K_m) \cap \widetilde{X}_k)) \cup \{w_k\}$ son (con L fijo) un sistema fundamental de vecindades de w_k (lo cual implica que $a_m \to w_k$). Para cada $m \geq 1$, sea $\alpha_m : [t_{m-1}, t_m] \longrightarrow X$ una curva contenida en C_{m-1} tal que $\alpha_m(t_{m-1}) = a_{m-1}$ y $\alpha_m(t_m) = a_m$, y sea $\alpha : [0,1] \longrightarrow X^*$ definida por $\alpha(t) = \alpha_m(t)$ si $t_{m-1} \leq t \leq t_m, \alpha(1) = w_k$. Evidentemente α

es continua sobre [0,1). Es también continua en $t = 1$, ya que claramente $\alpha([t_l, 1]) \subseteq (\widetilde{X}_k - \xi_k((L \cup K_m) \cap \widetilde{X}_k)) \cup \{w_k\}$ para $l \geq m$. Por lo tanto, α es una curva de $(\widetilde{X}_k - L) \cup \{w_k\}$ que une a y w_k, así que $(\widetilde{X}_k - L) \cup \{w_k\}$ es arco-conexa. ■

Nota 3.1. Bajo las hipótesis del teorema, si X es conexo, también X^* lo es; y siendo X^* localmente arco-conexo, será arco-conexo (lema 1.2).

Supongamos ahora que (X, τ) es paracompacto (y, naturalmente, localmente arco-conexo por cerrados). Puesto que X es localmente compacto, existe una familia $\{Z_\alpha / \alpha \in A\}$ de subconjuntos abiertos no vacios de X, dos a dos disyuntos, tales que cada Z_α, necesariamente cerrado en X, es σ-compacto ([4], p.109; [7], p.241).

Sea (X^*, τ^*) una compactación de (X, τ) por n puntos $w_1, ..., w_n$, y sea $\{X_1, ..., X_n\}$ una estrella de X con las características dadas por el lema 2.1. Para cada $i = 1, 2, ..., n$, denotaremos con A'_i el conjunto de los α en A tales que $Z_\alpha \cap \widetilde{X}_i$ es compacto, y A_i será $A - A'_i$. Sea L un subconjunto cerrado de X tal que $L \cap \widetilde{X}_i$ es compacto, que $L \supseteq M_i$ y que $\widetilde{X}_i - L$ no tenga componentes conexas relativamente compactas (corolario 2.1). Demostraremos que $(\widetilde{X}_i - L) \cup \{w_i\}$ es también arco-conexa en este caso. Sean $\alpha \in A$ y $\{K_m / m \geq 0\}$ una sucesión de subconjuntos compactos de Z_α con $K_0 = \emptyset, K_m \subseteq K^0_{m+1}$ para $m = 0, 1, 2, ...,$ y $Z_\alpha = \bigcup_{m=0}^{\infty} K_m$. Sea $\xi_i((L \cup K_m) \cap \widetilde{X}_i)$ como antes, y sea, a su vez, $\xi_{\alpha,i}((L \cup K_m) \cap \widetilde{X}_i \cap Z_\alpha)$ la reunión de $(L \cup K_m) \cap \widetilde{X}_i \cap Z_\alpha$ y de las componentes arco-conexas relativamente compactas en $\widetilde{X}_i \cap Z_\alpha$ de $\widetilde{X}_i \cap Z_\alpha - (L \cup K_m) \cap \widetilde{X}_i \cap Z_\alpha$. Teniendo en cuenta que Z_α es a la vez abierto y cerrado en X se verifica sin mayor esfuerzo (v.[8] para los detalles) que

$$\text{(3.2)} \qquad \xi_i((L \cup K_m) \cap \widetilde{X}_i) \cap Z_\alpha = \xi_{\alpha,i}((L \cup K_m) \cap \widetilde{X}_i \cap Z_\alpha),$$

asi que $\xi_{\alpha,i}((L \cup K_m) \cap \widetilde{X}_i \cap Z_\alpha)$ es también un subconjunto compacto de $\widetilde{X}_i \cap Z_\alpha$. Ahora, (3.2) y el hecho de que X es reunión de los Z_α implican que

$$\text{(3.3)} \quad \widetilde{X}_i - \xi_i((L \cup K_m) \cap \widetilde{X}_i) = \bigcup_{\alpha \in A} \widetilde{X}_i \cap Z_\alpha - \xi_{\alpha,i}((L \cup K_m) \cap \widetilde{X}_i \cap Z_\alpha).$$

Escribamos $V_{i,m,\alpha} = \widetilde{X}_i \cap Z_\alpha - \xi_{\alpha,i}((L \cup K_m) \cap \widetilde{X}_i \cap Z_\alpha)$. Si $\alpha \in A'_i, V_{i,m,\alpha} = \emptyset$. Si $\alpha \in A_i, V_{i,m,\alpha} \cup \{w_i\} = [(\widetilde{X}_i - \xi_i(L \cup K_m \cap \widetilde{X}_i)) \cup \{w_i\}] \cap (Z_\alpha \cup \{w_i\})$, asi que $\{V_{i,m,\alpha} \cup \{w_i\}/m \geq 0\}$ es un sistema fundamental de vecindades de w_i en $Z_\alpha \cup \{w_i\}$. Como ninguna componente arco-conexa de $V_{i,m,\alpha}$ es relativamente compacta en $\widetilde{X}_i \cap Z_\alpha$, si $a_m \in V_{i,m,\alpha} \cap C(a_{m-1}, V_{i,m-1,\alpha})$, donde $a = a_0$ es arbitrario en $V_{i,\alpha} = V_{i,0,\alpha}$, se deduce, tal como en la demostración del teorema 3.1, que los $a_m, m \geq 0$, son puntos de una curva de $V_{i,\alpha} \cup \{w_i\}$ que une a con w_i. Entonces $V_{i,\alpha} \cup \{w_i\}$ es arco-conexa. Como

$$(\widetilde{X}_i - L) \cup \{w_i\} = \bigcup_{\alpha \in A_i} (V_{i,\alpha} \cup \{w_i\}), \tag{3.4}$$

también $(\widetilde{X}_i - L) \cup \{w_i\}$ es arco-conexa. Así

Teorema 3.2. *Si $X^* = X \cup \{w_1, ..., w_n\}$ es una compactación por n puntos del espacio paracompacto X, y si X es localmente arco-conexo por cerrados y tiene sólo un número finito de componentes arco-conexas compactas, X^* es localmente arco-conexa.*

Nota 3.2. No hemos podido establecer que X^* sea localmente conexo por cerrados, ni siquiera cuando $n = 1$, en cuyo caso la afirmación es equivalente al hecho de que si K es un subconjunto compacto de X existe un abierto relativamente compacto Ω de X con $\widehat{\Omega} = \Omega$ tal que $K \subseteq \Omega$. De hecho, no hemos podido establecer la existencia de subconjuntos abiertos de X con $\widehat{\Omega} = \Omega$ (v. la nota 3.5, abajo).

El resultado anterior se aplica en especial a las ***variedades topológicas***.

Definición 3.1. *Una **m-variedad topológica**, $m \geq 0$ un entero, es un espacio metrizable X tal que para todo punto $x \in X$ existen una vecindad abierta U_x de x en X y un homeomorfismo f_x de U_x sobre $\mathbb{R}^m$.*

Una m-variedad es un espacio paracompacto y localmente compacto, de lo cual localmente arco-conexo por cerrados. Por lo tanto, si X admite una compactación X^* por n puntos, X^* es localmente arco-conexa si y sólo si X tiene únicamente finitas componentes arco-conexas compactas.

Nota 3.3. La compactación de una variedad topológica conexa por un número infinito de puntos puede no ser localmente arco-conexa. Por ejemplo, el espacio $X = \{(x, sen\frac{1}{x})/0 < x < \frac{1}{2\pi}\}$ es una 1-variedad conexa para su topología de subespacio. Sea $X^* = \{(0, y)/|y| \leq 1\} \cup X \cup \{(\frac{1}{2\pi}, 0)\}$ con su topología de subespacio. Evidentemente X^* es una compactación de X por infinitos puntos, la cual no es localmente arco-conexa. De hecho, X^* no es localmente conexa.

Nota 3.4. La compactación por finitos puntos de una variedad puede no ser metrizable. Por ejemplo, si $X = \bigcup_{\theta\in I} L_\theta$, donde I es el conjunto de los números irracionales en $[0, 2\pi]$, y $L_\theta = \{re^{i\theta}/0 < r < 1\}$ está dotado de su topología τ_θ de subespacio de $\mathbb{R}^2$, y X de la topología generada por $\bigcup_{\theta\in I} \tau_\theta$, X es una 1-variedad, pues su topología está definida por la métrica

$$d(z, z') = \begin{cases} |z - z'|, & \text{si z, z' } \in L_\theta \text{ para algún } \theta \in I, \\ 1 & \text{si z , z' no están en el mismo } L_\theta. \end{cases}$$

La compactación de Alexandroff de X es $X^* = X \cup \{0\} = \bigcup_{\theta\in I} C_\theta$, donde C_θ es el círculo de centro y radio θ. Un sistema fundamental de vecindades de $w = 0$ para la topología de X^* es $\{U_F/F \subseteq I, F\, finito\}$, donde $U_F = \bigcup_{\theta\in I, \theta\notin F} C_\theta$. Como X no es σ-compacto, X^* no es metrizable ([5], p.43). En este caso, la arco-conexión local de X^* no puede deducirse, por ejemplo, de los resultados en [11], Chap.3.

Nota 3.5. Bajo las hipótesis del teorema 3.2, X puede tener un número no enumerable de componentes arco-conexas no compactas (nota 3.4). Sin embargo X^* sólo puede tener un número finito de componentes arco-conexas. En efecto, siendo X^* localmente arco-conexo, todas sus componentes arco-conexas son abiertas. Más aún, como toda componente arco-conexa de X^* que no sea la componente de alguno de los w_k es necesariamente una componente arco-conexa compacta de X (pues, siendo C cerrada en X^*, para cada k existe una vecindad abierta U_k de w_k tal que $U_k \cap C = \emptyset$, así que $C \subseteq X^* - \bigcup_{k=1}^{n} U_k$), se concluye que X^* tendrá a lo sumo $m + n$ componentes arco-conexas, siendo m el número de componentes arco-conexas compactas de X.

Nota 3.6. Si Ω es un subconjunto abierto de X y X es localmente compacto, la envolvente llena $\breve{\Omega}$ de Ω es aún abierta en X ([19], p.86). Este resultado se debe, con demostración insuficiente, a Malgrange [16]. La demostración completa aparece en [19] (v. también [8]). Por el contrario, puede suceder que $\widehat{\Omega}$ no sea abierto, aun si X es localmente arco-conexo por cerrados. Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}^2$ y

$$\Omega = X - \{(0,y)/ -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, sen\frac{1}{x})/0 < x < \infty\}$$

el cual es un subconjunto abierto de $X, \widehat{\Omega} = \mathbb{R}^2 - \{(x, sen\frac{1}{x})/0 < x < \infty\}$, que no es abierto en X.

Para examinar la utilidad de la noción de conexión en compactaciones el lector podrá consultar [2] y [3]. Sería interesante examinar las propiedades de conexión en extensiones n puntuales más generales que las compactaciones. Para este propósito, veanse [1] y las referencias mencionadas allí.

Agradecimientos. Los autores agradecen al profesor Felix H. Soriano por observaciones que fueron de gran ayuda, y al revisor de la primera versión del trabajo, por sus útiles consejos.

4. Referencias

1. V.S. Albis and S. Sabogal, *Separation properties of n-point topological extension*, Rev. Col. de Mat. **24** (1990), 65-79.
2. D. Baboolal, *On local connectedness*, Math. Japonicae **37** (1992), 865-869.
3. D. Baboolal, *Locally connected compactifications*, pre-print, to appear in Topology and its Applications.
4. N. Bourbaki, *Topologie Generale*, Chap. I, II, 3 eme edition, Hermann, Paris, 1961.
5. N. Bourbaki, *Topologie Generale*, Chap. IX, 2 eme edition, Hermann , Paris, 1958.
6. J. A. Charris y M. P. Dussán, *Arco-conexión local en las compactaciones de Alexandroff*, por aparecer, Revista Integración.

7. J. Dugungji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston,Mass., 1969.

8. M. P. Dussán, *Sobre la arco-conexión local en las compactaciones por finitos puntos*, Reporte Interno N. 41, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional, Bogotá., 1994.

9. J. de Groot and R. H. Mc. Dowell, *Locally connected spaces and their compactifications*, Illinois J. Math. **11** (1967), 353-364.

10. M. Henriksen and J.R. Isbell, *Local connectedness in the Stone-Cech compactifications*, Illinois J. Math. **1** (1957), 574-582.

11. J.G. Hocking and G.S. Young, *Topology*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1961.

12. N. Kemoto, *On the local connectedness of βX*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liege **50** (1981), 185-194.

13. B. Knaster and C. Kuratowski, *A connected and connected in Kleinen point set which contains no perfect set*, Bulletin Amer. Math. Soc. **33** (1927), 106-109.

14. L. Lavalle, *The one point countable compactifications of curve spaces and arc-spaces*, Portugaliae Mathematica **24** (1965), 105-114.

15. K. D. Magill, Jr., *N-point compactifications*, Amer. Math. Monthly **72** (1965), 1075-1081.

16. B. Malgrange, *Existence et approximation des solutions des equations aux derivées partielles et des equations de convolution*, Annales de l'Institut Fourier **6** (1955-1956), 271-355.

17. J.Margalaef, E. Outerelo y J. L. Pinilla, *Topología*, vol III, Alhambra, Madrid, 1980.

18. T. Nakassis and S. Papastavridis, *On compactifying a topological space by adding a finite number of points*, Bull. Soc. Math. Grece **17** (1976), 59-65.

19. L. Schwartz, *Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas*, Monografias Matemáticas 13, Soc. Col. de Mat. y Dpto. Mat. y Est. Univ. Nal., Bogotá, Col., 1973.

Departamento de Matematicas y Estadistica, Universidad Nacional, Bogotá, Colombia