Boletín de Matemáticas
Nueva Serie Vol.I No.2 (1994) y Vol.II No.1 (1995) (17-33)

REGLA DE L'HÔPITAL PARA SERIES

YU TAKEUCHI

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional Colombia

RESUMEN. Se establecen propiedades que pueden considerarse como versiones de reglas de L'Hôpital para series de números reales en algunos casos y de complejos en otros; en todos ellos se reduce el límite de un cociente de series al límite de un cociente de las sucesiones que generan a las series. Se aplican los resultados al análisis de la convergencia de la sucesión lineal definida mediante una fórmula de recurrencia de primer orden muy general.

§1. INTRODUCCION

Para el estudiante promedio no es difícil resolver una buena cantidad de problemas de cálculo que involucran funciones continuas y derivables. Por ejemplo, si se quiere hallar el límite del cociente de dos funciones, generalmente basta aplicar la regla de L'Hôpital. En cambio los problemas sobre sucesiones y series son más difíciles para ellos ya que no conocen métodos sencillos de solución. Parece que los matemáticos del siglo XIX o de comienzos del siglo XX, eran muy hábiles para resolver problemas de sucesiones y series, puesto que ellos contaban con herramientas de trabajo adecuadas, hoy en día ignoradas o desaparecidas.

En el conocido libro de Bromwich [1] publicado en 1907(1), que era posi-

(1) Thomas John I'Anson Bromwich, 1875-1929

blemente un texto para el estudio del cálculo a comienzos de este siglo, aparecen los temas del cálculo de hoy en día, en forma paralela a sus similares en teoría de series. Por ejemplo, además de la regla de L'Hôpital usual, se halla una versión discreta de la misma:

Primer Teorema sobre el límite del Cociente

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, y además la sucesión (b_n) es estrictamente *decreciente*, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}$$

suponiendo que el límite del segundo cociente exista.

Segundo Teorema sobre el límite del Cociente (Cauchy-Stolz)

Si (b_n) es estrictamente creciente y diverge a $+\infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n};$$

suponiendo que el límite del segundo cociente exista.

En las secciones que siguen se dará otra versión de la Regla de L'Hôpital, equivalente a los teoremas aquí mencionados, pero más comoda para ser aplicada en problemas de series. Los teoremas 2 y 4 son las fórmulas para calcular el *valor estimado de la cola* de una serie convergente y de la cabeza de una serie divergente.

§2. Regla de L'Hôpital para series del tipo $\frac{0}{0}$

Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ dos sucesiones tales que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Decimos en tal caso que "*$(a_n)_n$ es asintóticamente igual a $(b_n)_n$*". Es sencillo comprobar que esta relación es de equivalencia en el conjunto de todas las sucesiones de reales.

Además si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ son *convergentes* y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0$, entonces $a \approx Lb_n$. Esto significa que en este caso para k suficientemente grande, a_k

es casi igual a Lb_k. Se deduce que para n suficientemente grande,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \approx \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k.$$

Así se obtendrá la aproximación:

$$\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k}{\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k} \approx L \quad \text{para "}n\text{" suficientemente grande.}$$

En forma más precisa, se obtiene el siguiente teorema:

Teorema 1. *(Regla de L'Hôpital tipo 0/0)*
Sean $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *y* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *dos series convergentes y supongamos que la última satisface la condición adicional:*

(1)
$$\sup_n \frac{\sum_{k=n}^{\infty} |b_k|}{\left|\sum_{k=n}^{\infty} b_k\right|} < \infty \; ;$$

si existe el límite

(2)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

entonces:

(3)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k}{\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k} = L.$$

Demostración. . De la convergencia de $\sum b_k$ y de (1), se sigue que $\sum b_k$ converge absolutamente. Dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$|a_k/b_k - L| < \epsilon \quad \text{para todo } k \text{ con } \; k > N,$$

o sea $|a_k - L \cdot b_k| < \epsilon \cdot |b_k|$ para todo k con $k > N$. Así, para $n > N$ se tiene:

$$\left|\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k - L \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right| \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k - L \cdot b_k| < \epsilon \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k|.$$

Dividiendo la desigualdad anterior por $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right|$ se obtiene:

$$\left|\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k}{\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k} - L\right| < \epsilon \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k|}{\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right|} \tag{4}$$

De la condición (1), la desigualdad (4) garantiza la existencia del límite (3). □

Observación. . Si $b_k > 0$ para todo k, entonces la condición (1) se cumple *automáticamente* y en este caso el teorema 1 es "equivalente" al Primer Teorema sobre el límite del cociente", citado en la introducción.

Si en el teorema 1 se suprime la condición (1), el resultado no es válido, como se ve en el ejemplo que sigue

Ejemplo 1. Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ dadas mediante

$$a_{2n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad a_{2n} = -\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{y}$$
$$b_{2n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad b_{2n} = -\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

entonces se tiene evidentemente que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Sin embargo para n **par**, tenemos:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \neq 0,$$

por lo tanto el cociente $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \Big/ \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$ *no converge* cuando $n \to \infty$. □

Nótese que la sucesión (b_n) no satisface la condición (1), como puede verificarlo el lector.

Ejemplo 2. Si $X_n \approx C \cdot n$ y $B_n \approx B$ (siendo C una constante), entonces

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{B_k}{X_k \cdot X_{K+1}} \approx \frac{B}{C^2 \cdot n}.$$

En efecto, aplicando el teorema 1 se tiene:

$$\frac{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{B_k}{X_k \cdot X_{K+1}}}{\frac{1}{n}} = \frac{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{B_k}{X_k \cdot X_{K+1}}}{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}} \to \lim_{k\to\infty} \frac{B_k \cdot k(k+1)}{X_k X_{k+1}}$$

$$= \frac{B}{C^2}. \quad \square$$

Ejemplo 3. Si $a_k \approx \frac{1}{k^p}$ $(p > 1)$, entonces por el teorema 1,

(5) $$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \approx L \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^p}.$$

y por el criterio de la integral se tiene:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \int_1^n \frac{1}{x^p} dx + C + O\left(\frac{1}{n^p}\right) \quad (C \text{ es una constante})$$

$$= \frac{1}{p-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^{p-1}}\right) + C + O\left(\frac{1}{n^p}\right),$$

luego

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \frac{1}{p-1} + C$$

y por lo tanto

(6) $$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{n^{p-1}} + O\left(\frac{1}{n^p}\right).$$

De (5) y (6):

(7) $$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \approx \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{n^{p-1}}$$

Como un caso particular, cuando $p = 2$, tenemos:

(8) Si $a_n \approx \frac{L}{n^2}$ entonces $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \approx \frac{L}{n}$. $\square$

Ejemplo 4. Sea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k$ una serie convergente de términos positivos; si $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{X_{n+1}}{X_n}\right) = 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} X_k}{X_n} = \infty. \tag{9}$$

En efecto, por el teorema 1 se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{\sum_{k=n+1}^{\infty} X_k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty}(X_{k-1} - X_k)}{\sum_{k=n+1}^{\infty} X_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{X_{k-1} - X_k}{X_k} = 0.$$

Ejemplo 5. Sea (X_n) una sucesión de *números complejos no nulos* que satisface

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_{n+1}}{X_n} = r, \quad |r| < 1, \tag{10}$$

entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} |X_{k-1} - X_k|}{\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(X_{k-1} - X_k)\right|} = \frac{|1-r|}{1-|r|} \tag{11}$$

En efecto,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (X_{k-1} - X_k\right| = |X_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} (|X_{k-1}| - |X_k|). \quad \text{(Serie telescópica)}$$

Además:

$$|X_{k-1}| - |X_k| > 0 \quad \text{para “}k\text{” suficientemente grande y}$$

aplicando el teorema 1 se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} |X_{k-1} - X_k|}{\sum_{k=n+1}^{\infty}(|X_{k-1}| - |X_k|)} = \lim_{n\to\infty} \frac{|X_{k-1} - X_k|}{(|X_{k-1}| - |X_k|)} = \frac{|1-r|}{1-|r|}$$

Teorema 2. *(Valor estimado de la cola de una serie convergente)*
Sea (X_n) una sucesión de números complejos que satisface la condición (10); si $(b_n) \to b$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \cdot X_k}{X_n} = \frac{b \cdot r}{1-r} \tag{12}$$

o sea,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \cdot X_k \approx \frac{b \cdot r}{1-r} \cdot X_n.$$

Demostración. De (11) tenemos que

$$\sup_n \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} |X_{k-1} - X_k|}{\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (X_{k-1} - X_k)\right|} < +\infty,$$

por lo tanto la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (X_{k-1} - X_k)$ satisface la condición (1) del teorema 1. Aplicando el teorema 1 se obtiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \cdot X_k}{X_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \cdot X_k}{\sum_{k=n+1}^{\infty} (X_{k-1} - X_k)} \\
&= \lim_{k\to\infty} b_k \frac{X_k}{X_{k-1} - X_k} \\
&= \frac{b \cdot r}{1-r}.
\end{aligned}$$

Nótese que r puede ser 0. □

Ejemplo 6. El teorema 1 es también válido si la condición (1) para (b_n) es reemplazada por la siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = r \quad \text{con} \quad 0 < |r| < 1. \tag{13}$$

En efecto, del teorema 2 se tiene que

$$\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k|}{|b_n|} \to \frac{|r|}{1-|r|} \quad \text{y que}$$

$$\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k|}{|b_n|} \to \left|\frac{r}{1-r}\right| \ (\neq 0)$$

por lo tanto

$$\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty}|b_k|}{\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}b_k\right|}\to\frac{|1-r|}{1-|r|},$$

en consecuencia, la sucesión (b_n) satisface la condición (1).

Ejemplo 7.

(i) $$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 2^k}\approx\frac{1}{n\cdot 2^n}$$

(ii) $$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k(k+1)}{2^k}\approx\frac{n(n+1)}{2^n}$$

(iii) $$\sum_{k=n+1}^{\infty}ke^{-k}\approx\frac{1}{e-1}\cdot n\cdot e^{-n}$$

(iv) $$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2}\approx\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

(v) $$\sum_{k=n+1}^{\infty}k^a\cdot p^k\approx\frac{1}{1-p}\cdot n^a\cdot p^{n+1}\quad(|p|<1)\quad\square$$

§3 Regla de L'Hôpital para series del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Teorema 3. *(Regla de L'Hôpital del tipo ∞/∞. Jensen)*
Sean $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ series divergentes; supongamos además que

$$\sup_n\frac{\sum_{k=1}^{n}|b_k|}{\left|\sum_{k=1}^{n}b_k\right|}<+\infty; \tag{1}$$

si existe el límite

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=L \tag{2}$$

entonces también

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{\sum_{k=1}^{n}b_k}=L \tag{3}$$

Observación. Si $b_k > 0$ para todo k, entonces la condición (1) se cumple automáticamente y en este caso el teorema 3 es equivalente al "Segundo Teorema sobre el Límite del Cociente" citado en la introducción.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$\left|\frac{a_k}{b_k} - L\right| < \epsilon, \quad \text{o sea,} \quad |a_k - L \cdot b_k| < \epsilon \cdot |b_k| \quad (\text{para todo } k > N).$$

De la divergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, y la condición (1), se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| = +\infty,$$

entonces existe N_0 (depende del N ya escogido) tal que

$$\left|\sum_{k=1}^{N}(a_k - L \cdot b_k)\right| \Big/ \left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| < \epsilon \quad \text{para todo } n > N_0 \ (> N).$$

Para $n > N_0$ se tiene:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(a_k - L \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{N}(a_k - L \cdot b_k)\right| + \sum_{k=N+1}^{n} |a_k - L \cdot b_k|$$

$$< \epsilon \cdot \left|\sum_{k=1}^{N} b_k\right| + \sum_{k=N+1}^{n} \epsilon \cdot |b_k| < 2\epsilon \sum_{k=1}^{n} |b_k|.$$

Dividiendo la desigualdad anterior por $\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right|$ se obtiene:

$$(4) \qquad \left|\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} - L\right| < 2\epsilon \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n} |b_k|}{\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right|} \quad \text{para todo } n > N_0)$$

La condición (1) y la desigualdad (4) garantizan el límite en (3). $\square$

Ejemplo 8. (Primer teorema de Cauchy)

(5) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = S$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = S$.

En efecto, aplicando el teorema 3 se obtiene:

$$\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{\sum_{k=1}^n 1} \to \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{1} = S.$$

Ejemplo 9. Si $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = S$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = S$. En efecto, aplicando el teorema 3 se obtiene (considereando $a_0 = 0$):

$$\frac{a_n}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})}{\sum_{k=1}^n 1} \to \lim_{k\to\infty} \frac{a_k - a_{k-1}}{1} = S.$$

Corolario. *Segundo teorema de Cauchy*

Sea (a_n) *una sucesión de términos positivos; si* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$, *entonces:* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$.

Demostración. Tomando "$\log a_n$" en lugar de "a_n" en el ejemplo 9 se obtiene inmediatamente el segundo teorema de Cauchy.

Ejemplo 10. Sea $\sum_{k=1}^n X_k$ una serie divergente de términos positivos; si $X_{n+1}/X_n \to 1$ cuando $n \to \infty$, entonces:

(6) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{X_n} = \infty$$

En efecto, por el teorema 3 se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{\sum_{k=1}^n X_k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - X_{k-1})}{\sum_{k=1}^n X_k} = \lim_{n\to\infty} \frac{X_k - X_{k-1}}{X_k} = 0$$

(Considere: $X_0 = 0$.)

Ejemplo 11. Sea (X_n) una sucesión de números complejos que satisface:

$$\text{(7)} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{X_{n+1}}{X_n} = r \quad \text{con} \quad |r| > 1$$

entonces:

$$\text{(8)} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} |X_k - X_{k-1}|}{\left|\sum_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1})\right|} = \frac{|r-1|}{|r|-1}.$$

En efecto, considerando $X_0 = 0$ tenemos:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1})\right| = |X_n - X_0| = |X_n| = \sum_{k=1}^{n}(|X_k| - |X_{k-1}|).$$

Además, $|X_k| - |X_{k-1}| > 0$ para "k" suficientemente grande. Aplicando el teorema 3 se obtiene:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} |X_k - X_{k-1}|}{\left|\sum_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1})\right|} = \frac{\sum_{k=1}^{n} |X_k - X_{k-1}|}{\sum_{k=1}^{n} |X_k| - |X_{k-1}|)} \to \frac{|X_k - X_{k-1}|}{|X_k| - |X_{k-1}|}$$
$$= \frac{|r-1|}{|r|-1}. \quad \square$$

Teorema 4. *(Valor estimativo de la cabeza de una serie divergente)*

Sea (X_n) una sucesión de números complejos que satisfacen la condición 7; si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ entonces:

$$\text{(9)} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot X_k}{X_n} = \frac{b \cdot r}{r-1}.$$

Demostración. De acuerdo con el ejemplo 11, de la igualdad (8) se obtiene

$$\sup_n \frac{\sum_{k=1}^{n} |X_k - X_{k-1}|}{\left|\sum_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1})\right|} < +\infty.$$

Así la serie $\sum_{k=n}^{\infty}(X_k - X_{k-1})$ satisface la condición (1) del teorema 3 y siendo $\sum b_k X_k$ y $\sum(X_k - X_{k-1})$ divergentes, puede aplicarse el teorema 3 (considerando $X_0 = 0$):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k X_k}{X_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k X_k}{\sum_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1})} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b_k X_k}{X_k - X_{k-1}} = \frac{b \cdot r}{r-1}$$

Observación. La fórmula (9) es válida cuando $r = \infty$, o sea: si $\lim_{n\to\infty} \frac{X_{n+1}}{X_n} = \infty$ (esto es, $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{X_{n+1}} = 0$) entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k X_k}{X_n} = b\,. \quad \square$$

Ejemplo 12.

(i) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdot 2^k \approx n(n+1)\cdot 2^{n+1}$

(ii) $\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k(k+1)(k+2)} \cdot\cdot 2^k \approx \frac{2^{n+1}}{n(n+1)(n+2)}$

(iii) $\sum_{k=1}^{n} k^a \cdot p^k \approx \frac{1}{p-1}\cdot n^a \cdot p^{n+1} \quad (|p| > 1).$ $\square$

Ejemplo 13.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{k!} \approx \frac{2^{n+1}}{\sqrt{\pi n}}. \tag{10}$$

En efecto, aplicando el teorema 4 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{k!} \approx 2\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}$. Por la fórmula de Stirling:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!} = \frac{(2n)!}{2^n\cdot(n!)^2} \approx \frac{2^n}{\sqrt{\pi n}}$$

por lo tanto se obtiene la aproximación (10). $\square$

Ejemplo 14. El teorema 3 es también válido si la condición (1) para (b_n) es reemplazada por la siguiente:

$$(11) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = r \quad \text{con} \quad 1 < |r| < +\infty.$$

Su prueba es similar a la del ejemplo 6 de la §2. □

§4. Fórmula lineal de recurrencia de 1^{er} orden

Consideramos la fórmula lineal de recurrencia de primer orden

$$(1) \qquad X_{n+1} = a_n \cdot X_n - b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

donde $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ son sucesiones dadas.
Se sabe (ver [2]) que la solución general de la fórmula (1) está dada por

$$(2) \qquad X_{n+1} = (a_1 a_2 \cdots a_n) \cdot [X_1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{a_1 a_2 \cdots a_k}] \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Teorema 5. *En la fómula de recurrencia (1) supóngase que*

$$(a_n) \to a, \quad (b_n) \to b \quad (\textit{cuando } n \to \infty); \textit{ en tal caso}$$

(i) *Si* $|a| < 1$, *entonces toda solución* (X_n) *converge al límite* $\frac{b}{a-1}$.

(ii) *Si* $|a| > 1$, *entonces*

a) $(X_n) \to \infty$ *cuando* $X_1 \neq p = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{a_1 a_2 \cdots a_k}$

b) $(X_n) \to \frac{b}{a-1}$ *cuando* $X_1 = p$.

Nótese que al serie $p = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{a_1 a_2 \cdots a_k}$ *converge absolutamente.*

Demostración. Si

$$(3) \qquad A_n = \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

entonces al solución general (2) de la fórmula (1) puede escribirse como sigue:

$$(4) \qquad X_{n+1} = \frac{1}{A_n} \cdot [X_1 - \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot b_k] \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(i) Si $|a| < 1$, entonces:

$$A_{n+1}/A_n = \frac{1}{a_{n+1}} \to \frac{1}{a} \quad \text{con} \quad \left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|} > 1 \ ;$$

por lo tanto

$$A_n \to \infty \ , \quad \text{o sea,} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{A_n} = 0.$$

Aplicando el teorema 3 se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} X_{n+1} = -\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} A_k \cdot b_k}{A_n} = -\frac{b \cdot (\frac{1}{a})}{\frac{1}{a} - 1} = \frac{b}{a-1}.$$

(ii) Si $|a| > 1$, entonces:

$$A_{n+1}/A_n = \frac{1}{a_{n+1}} \to \frac{1}{a} \quad \text{con} \quad \left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|} < 1 \ ,$$

por lo tanto

$$A_n \to 0 \quad (\text{cuando } n \to \infty)$$

Como la serie $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot b_k$ converge absolutamente (por el criterio del cociente), entonces cuando $n \to \infty$,

$$[X_1 - \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot b_k] \to [X_1 - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot b_k] = X_1 - p \ .$$

Por lo tanto se tiene que

$$(X_n) \to \infty \quad \text{cuando} \quad X_1 \neq p.$$

Si $X_1 = p = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot b_k$, aplicando el teorema 2 se obtiene:

$$X_{n+1} = \frac{1}{A_n} \cdot [\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot b_k - \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot b_k] = \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k \cdot b_k}{A_n}$$

cociente que tiende a $\dfrac{b \cdot (\frac{1}{a})}{(1 - \frac{1}{a})} = \dfrac{b}{a-1}$. □

Corolario 1. *Sea (X_n) una sucesión de números complejos que satisface la desigualdad:*

$$|X_{n+1}| \leq a_n \cdot |X_n| + b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{4}$$

donde $a_n > 0$, $b_n > 0$, y

$$\overline{\lim}\, a_n < 1, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0\,, \tag{5}$$

entonces:

$$\lim_{n\to\infty} X_n = 0\,.$$

Demostración. Como $\overline{\lim}\, a_n < 1$, entonces existe una sucesión $(\widetilde{a}_n)$ tal que $a_n \leq \widetilde{a}_n$, y $\widetilde{a}_n \to a = \overline{\lim}\, a_n < 1$. Sea (Y_n) la sucesión determinada por:

$$Y_{n+1} = \widetilde{a}_n \cdot Y_n + b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots),\ Y_1 = |X_1|\,.$$

Por el teorema 5 se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = 0\,.$$

Por inducción, se obtiene inmediatamente la siguiente desigualdad:

$$|X_n| \leq Y_n \quad \text{para todo} \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} |X_n| = 0, \qquad \text{o sea} \quad \lim_{n\to\infty} X_n = 0. \quad \square$$

Ejemplo 15. Sea (X_n) una solución de la fórmula de recurrencia:

$$X_{n+1} = \frac{(X_n)^3}{(X_n)^2 + 1} + c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{6}$$

si $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < +\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$.

En efecto, se tiene:

$$|X_{n+1}| \leq |X_n| \cdot \frac{(X_n)^2}{(X_n)^2 + 1} + |c_n| \leq |X_n| + |c_n|\,.$$

Si la desigualdad anterior tomamos $n = 1, 2, 3, \ldots N$ y sumamos, obtenemos

$$|X_{n+1}| \leq |X_1| + \sum_{n=1}^{N} |c_n| \leq |X_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \; (= M),$$

por lo tanto la sucesión (X_n) es acotada. De

$$\frac{(X_n)^2}{(X_n)^2 + 1} \leq \frac{M^2}{M^2 + 1} < 1 \,,$$

deducimos que

$$|X_{n+1}| \leq \frac{M^2}{M^2 + 1} \cdot |X_n| + |c_n| \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

y por el corolario 1 del teorema 5 se concluye que $(X_n) \to 0$. $\square$

Ejemplo 16. Consideremos la sucesión

$$(7) \qquad X_{n+1} = a_n \cdot X_n + \frac{b_n}{X_n} \quad (a_n > 0,\ b_n > 0),\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

donde $a_n \to a$, $b_n \to b$ con $\frac{1}{6} < a < 1$, $b > 0$; entonces:

$$(X_n) \to L = \sqrt{\frac{b}{1-a}}, \quad \text{para cualquier } X_1 > 0.$$

Demostración. Primero observemos que

$$X_{n+1} = a_n \cdot X_n + \frac{b_n}{X_n} \geq 2 \cdot \sqrt{a_n b_n}, \text{ o sea, } \frac{1}{X_{n+1}} \leq \frac{1}{2 \cdot \sqrt{a_n b_n}},$$

por lo tanto:

$$\overline{\lim} \frac{1}{X_n} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2 \cdot \sqrt{a_n b_n}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{ab}},$$

o sea que la sucesión $(\frac{1}{X_n})$ es acotada superiormente. Como $L = \sqrt{\frac{b}{1-a}}$, entonces L satisface la ecuación:

$$L = a \cdot L + \frac{b}{L} \,.$$

De la fórmula de recurrencia (7) se tiene que

$$|X_{n+1} - L| = |a_n X_n - aL + \frac{b_n}{X_n} - \frac{b}{L}|$$

$$= |a_n(X_n - L) + (a_n - a)\cdot L - \frac{b\cdot(X_n - L)}{X_n\cdot L} + \frac{b_n - b}{X_n}|$$

$$\leq |a_n - \frac{b}{X_n\cdot L}|\cdot|X_n - L| + |(a_n - a)\cdot L| + |\frac{b_n - b}{X_n}|. \tag{8}$$

Como $|(a_n - a)\cdot L| \to 0$ y $|\frac{b_n - b}{X_n}| \to 0$ (cuando $n \to \infty$) y

$$\overline{\lim}\,|a_n - \frac{b}{X_n\cdot L}| \leq \max\{\overline{\lim}\, a_n, \overline{\lim}\,(\frac{b}{X_n\cdot L} - a_n)\}$$

$$\leq \max\{\overline{\lim}\, a_n, \overline{\lim}\,(\frac{b}{2\cdot\sqrt{a_n b_n}\cdot L} - a_n)\}$$

$$= \max\{a, \frac{\sqrt{1-a}}{2\sqrt{a}} - a\} < 1$$

(ver la nota que sigue).

De la desigualdad (8), aplicando el corolario del teorema 5, se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} |X_n - L| = 0, \quad \text{o sea,} \quad \lim_{n\to\infty} X_n = L. \quad \square$$

Nota. : $\frac{\sqrt{1-a}}{2\sqrt{a}} - a < 1$ si y sólo si $\sqrt{1-a} < 2\sqrt{a}(a+1)$, esto es,

$$a\cdot(a^2 + 2a + 1) > 1 - a, \quad \text{o sea,} \quad 4a^3 + 8a^2 + 5a - 1 > 0,$$

y esta última desigualdad se cumple para $a > \frac{1}{6}$.

Referencias

[1] T. J. Bromwich, *An Introduction to the Theory of Infinite Series, (first edition)*, Mac Millan, London, 1926.

[2] Yu Takeuchi, *Estudio sistemático de algunas sucesiones*, Matemática, Enseñanza Universitaria **No 20**, pp. 3-74.

[3] Yu Takeuchi, *Convergencia de sucesiones dadas por fórmulas de recurrencia de* 1^{er} *orden*, Revista Colombiana de Matemáticas **Vol XXVII** (1993), pp. 111-125.