Boletín de Matemáticas
Nueva Serie Vol.I No.2 (1994) y Vol.II No.1 (1995) (81-109)

EL CLAMOR DE LOS BEOCIOS Y EL PENSAMIENTO REVOLUCIONARIO DE GAUSS

RESUMEN. Se busca examinar las raíces de los procesos de creación que en el siglo XIX conllevaron un examen crítico de la intuición, una creciente exigencia de formalización y un cuestionamiento profundo de lo que puede significar las palabras 'verdad' y 'existir' en matemáticas, y trazar su desenvolvimiento, principalmente en el pensamiento de Gauss, hasta que llegaran a cimentarse algunas de las características fundamentales de la matemática contemporánea.

DOS DESCRIPCIONES DEL PAPEL DE LAS MATEMÁTICAS: JAMES Y RUSSELL

Los contrastes son potentes instrumentos de exploración. Iluminan el relieve del terreno intelectual, resaltan distinciones y divisiones, resumen grandes resquebrajamientos del pensamiento, exigen explicación. Hay un marcado contraste manifestado entre las dos descripciones de la matemática que consideramos a continuación, la primera hecha por William James quien habla de la actitud de los matemáticos hacia su ciencia a finales del siglo XVIII y la segunda de Bertrand Russell de 1903.

Dice James: "Cuando se descubrieron las primeras uniformidades matemáticas, lógicas y naturales, las primeras leyes, los hombres estaban tan trasportados por la claridad, la belleza y la simplificación resultantes que creyeron haber descifrado auténticamente los pensamientos eternos del

Todopoderoso. Su mente también tronaba y reverberaba en silogismos. El también pensaba en secciones cónicas, cuadrados, raíces y razones, y geometrizaba igual que Euclides. El creó las leyes de Kepler para que los planetas las obedecieran; él hizo que la velocidad de cuerpos en caída creciera proporcionalmente con el tiempo; él hizo la ley de los senos para que la luz refractada la obedeciera... El pensó los arquetipos de todas las cosas e inventó sus variaciones; y cuando redescubrimos una cualquiera de estas maravillosas instituciones, agarramos la mente de Dios en toda su intención literal."

Por cierto, hacia finales del siglo XVIII un creciente ateismo reemplazó esta visión por la de un universo-máquina cuyo diseño podía ser descrito con la matemática. En cuanto al diseñador, son famosas las palabras de Laplace: "No necesito esa hipótesis".

Sin embargo, es claro que para Laplace y sus contemporáneos, la matemática es vista como verdadera; es la clave de acceso a las verdades del mundo. De hecho, la obra de Kant (1724-1804) examina y refina la filosofía de la matemática que subyace a estas consideraciones. Para Kant las proposiciones de la matemática son juicios sintéticos *a priori;* en *La crítica de la razón pura*(1781), Kant afirma que "Necesidad y ... estricta universalidad son criterios seguros de conocimiento *a priori*,y son inseparables la una de la otra."[Kant. *Critique of Pure Reason*, p.3] Dos problemas fundamentales de su filosofía son los de garantizar la posibilidad de juicios sintéticos *a priori* y de explicar la aplicabilidad de la matemática a la experiencia.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) resume esta visión de las matemáticas con las palabras (de sus *Disquiticiones arithmeticae* (1801)): "La matemática es la reina de las ciencias".

En cambio, en *Misticismo y lógica* (1903), Russell nos dice: "Escogemos entonces cualquier hipótesis que parezca divertida y deducimos sus consecuencias. *Si* nuestra hipótesis trata de *cualquier cosa* y no de una o más cosas particulares, entonces nuestras deducciones constituyen matemáticas.

Por consiguiente, éstas últimas pueden definirse como la disciplina en que nunca sabemos de qué hablamos ni si lo que estamos diciendo es verdad."

¿Qué sucedió para que se diera una metamorfosis tan radical en la forma como los matemáticos conciben su ciencia? Buena parte de la transformación se refleja en la evolución del pensamiento del mismo Gauss y será nuestro tema central.

Para poder tomar el hilo del pensamiento de Gauss, enfocaremos nuestra atención en el postulado de las paralelas, el quinto postulado de la geometría euclidiana, cuyas deficiencias formaron el punto central de siglos, más bien milenios, de investigación matemática.

La historia del quinto postulado

En sus *Elementos*, escritos alrededor del año 300 a.C., Euclides reune esencialmente toda la matemática conocida hasta entonces en un sistema lógico-deductivo (ciencia demostrativa) siguiendo las pautas establecidas por Aristóteles. Entre éstas cabe destacar que, para evitar un proceso que se remonta hacia el infinito, se estipula que deben tomarse ciertas proposiciones como puntos de partida del proceso demostrativo (axiomas y postulados), proposiciones que son catalogadas como verdades autoevidentes.*[1]

Respecto de esta exigencia, Euclides toma ciertos axiomas generales y cinco postulados de la geometría. De estos cinco postulados, cuatro tienen enunciados claros y cortos; además, gozaban de amplia aceptación previa a la obra euclidiana. El quinto, en cambio, tiene un enunciado enredado, su verdad es cuestionada y es aparentemente original de Euclides. Veamos este conjunto de postulados (la redacción que usamos aquí difiere un poco de la original).

[1]En la delimitación aristotélica de los términos, 'axiomas' son 'verdades' comunes a todas las ciencias, mientras que 'postulados' son particulares a una ciencia y quizás menos conocidos pero no por ello menos verdaderos. Un tratamiento similar se da a los términos; unos son tomados como puntos de partida y su significado es supuesto claro. Otros son definidos empleando los términos primitivos o no definidos.

Postulado 1. Se puede trazar una línea recta de cualquier punto a cualquier punto.
Postulado 2. Se puede extender (prolongar) una línea recta continuamente en línea recta.
Postulado 3. Se puede trazar una circunferencia con cualquier centro y radio.
Postulado 4. Todos los ángulos rectos son iguales.
Postulado 5. Cuando una línea recta que incide sobre dos líneas rectas hace los ángulos interiores de un mismo lado menores que dos ángulos rectos, entonces las líneas rectas se cortarán al prolongarse en aquél lado donde están los dos ángulos menores que dos ángulos rectos.

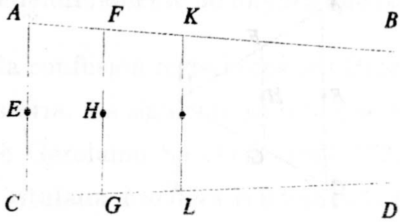
No toma mucho discernimiento observar la gran diferencia entre el quinto postulado y los anteriores. Además de hablar de lo que podría ocurrir a gran distancia, de no gozar de una claridad impactante, había ciertos ejemplos que inclusive hacían dudar de que fuera verdadero (la relación de la hipérbola con sus asíntotas). Por otra parte, el mismo Euclides parecía dudar de él puesto que demuestra las primeras 28 proposiciones de su obra sin emplear el postulado (aunque su uso permite llegar directamente a resultados más fuertes que los obtenidos, por ejemplo, en el caso del teorema del ángulo exterior).

Durante muchos y largos siglos, innumerables años de esfuerzo se dedicaron a remediar la situación del quinto postulado. Estos intentos se dividieron en dos grandes categorías:
(1) Reformular el postulado para que su verdad se hiciera evidente. (Un ejemplo de ello es el postulado de Playfair: Por un punto exterior a una recta pasa una única recta paralela a la recta dada.)
(2) Demostrar el postulado con base en los cuatro postulados anteriores y las 28 proposiciones euclidianas que se demuestran sin citarlo para garantizar que sea verdadera.

Vale la pena repasar algunos de estos intentos, ya que nos muestran la magnitud del problema que se enfrentaba y la lucha tan terrible que se entablaba con la intuición.

Proclo, comentarista de los *Elementos* que vivió en el siglo V d. C., presenta con asombro y confusión, antes de su propio intento por demostrar el postulado, el siguiente argumento que parece desmentir el postulado euclidiano.

Sean AB, CD tales que hacen con AC los ángulos BAC, ACD juntos menores que dos ángulos rectos. Biséquese AC en E y a lo largo de AB, CD respectivamente, mídanse AF, CG cada uno igual a AE.



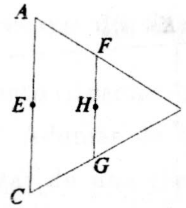
Ahora, biséquese FG en H y córtense FK, GL cada uno igual a FH; y así sucesivamente.

Entonces, AF, CG no se intersecarán (cortarán) en ningún punto de FG porque si lo hicieran, dos lados de un triángulo serían juntos iguales al tercero; lo cual es imposible.

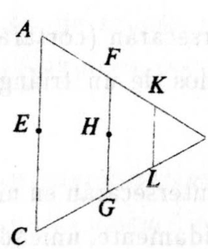
Similarmente, AB, CD no se intersecarán en ningún punto de KL, y procediendo de esta manera indefinidamente, uniendo los puntos no coincidentes, bisecando las líneas (segmentos) así trazadas, y cortando de las líneas rectas porciones iguales a la mitad de éstas, "dicen que de aquí se sigue que las líneas rectas AB, CD no se intersecarán en ninguna parte." [Heath, p. 207]

Proclo no puede exponer la falacia en este argumento, pero de todas maneras hace unos comentarios de importancia. Primero, dice que la demostración demuestra demasiado, ya que sólo es necesario unir A y G para ver que algunas líneas rectas, a saber AG, CG que hacen ángulos interiores menores que dos ángulos rectos en efecto se intersecarán. Comenta al respecto: "Por lo tanto, no es posible afirmar, sin alguna limitación definida, que las líneas rectas producidas de ángulos menores que dos ángulos rectos no se intersecarán." [Heath, p. 207]

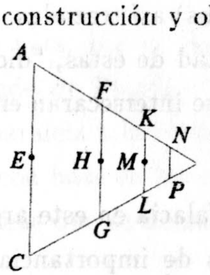
Analicemos el argumento que estaba molestando a Proclo. Para ello, consideremos AB, CD tales que $\angle BAC = \angle ACD = 60°$. Al bisecar AC en E y cortar AF, CG iguales a AE sobre AB, CD, respectivamente, y luego al unir F y G, tenemos en efecto parte del siguiente dibujo de un triángulo equilátero, la parte resaltada en negrilla.



Al realizar nuevamente la construcción descrita por Proclo, completamos otra parte del triángulo equilátero tal como se indica en la figura que se encuentra a continuación.



Una vez más efectuamos la construcción y obtenemos



Ahora bien, es claro que cada vez marcamos sobre las líneas rectas AB, CD un medio del segmento marcado con anterioridad; es decir, estamos construyendo la fatídica suma

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots,$$

la misma propuesta en la primera antinomia de Zenón de Elea y que había causado revuelo, consternación y crisis en la matemática clásica. De todas maneras, siguiendo argumentos modernos, es claro que esta suma infinita converge a 1 (y las rectas se intersecan a una distancia igual a la distancia entre A y C). Es decir, el hecho (observado por Proclo) de que el proceso descrito continúa indefinidamente no implica que las rectas no se intersecan.

Pero el asombro y la confusión registrados por Proclo son apenas un primer paso en nuestra historia. La siguiente parada que haremos en nuestro recorrido es la obra de Gerolamo Saccheri (1667-1733) publicada al final de su vida en 1733 y titulada *Euclides reivindicado de toda falla.* Viendo el fracaso de intentos anteriores por demostrar el quinto postulado, Saccheri decide intentar una demostración por contradicción. Para comprender las posibilidades que Saccheri abre a consideración y que son célebres puntos de distinción de las geometrías resultantes, tomemos la versión del postulado dado por Playfair: por un punto exterior a una recta pasa una única recta paralela a la recta dada. Si fuéramos a proceder por contradicción a demostrarlo, comenzaríamos por negar el postulado y luego mostraríamos que su negación implica contradicción. La negación de la proposición "pasa una única recta" es "pasa más de una recta o no pasa ninguna recta" paralela a la recta dada.

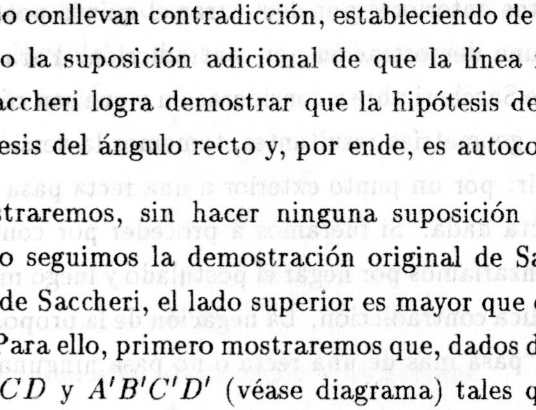
Saccheri desarrolla un tratamiento ligeramente distinto, pero equivalente a éste. Comienza asumiendo toda la geometría que se tiene sin tomar ninguna versión de un postulado referente a paralelas. En este contexto, considera un cuadrilátero $ABCD$ con las siguientes características. Los ángulos CAB, ABD son ambos ángulos rectos. Los lados AC, BD son iguales. (Hoy cuadriláteros con estas características se denominan cuadriláteros de Saccheri.)

Es consecuencia de esto que $\angle C = \angle D$, pues $\Delta CAB \cong \Delta DBA$ por LAL (Euclides, Libro I, Proposición 4). Se sigue que $CB = AD$. Luego, $\Delta DCA \cong \Delta CDB$ por LLL (Euclides, Libro I, Proposición 8). De allí se tiene $\angle C = \angle D$.

Sin introducir el postulado de las paralelas, no es posible determinar más acerca de este par de ángulos. En este punto, Saccheri admite tres posibilidades o hipótesis: la hipótesis del ángulo agudo, los ángulos iguales C y D son agudos; la hipótesis del ángulo recto, los ángulos iguales C y D son rectos; la hipótesis del ángulo obtuso, los ángulos iguales C y D son obtusos. Estas a su vez y respectivamente son equivalentes a las alternativas que por un punto exterior a una recta pasan: más de una recta paralela a la recta dada; una única recta paralela a la recta dada (Euclides); ninguna recta paralela a la recta dada.

El planteamiento de Saccheri es mostrar que las hipótesis del ángulo agudo y del ángulo obtuso conllevan contradicción, estableciendo de allí el postulado euclidiano. Bajo la suposición adicional de que la línea recta es infinita en extensión, Saccheri logra demostrar que la hipótesis del ángulo obtuso implica la hipótesis del ángulo recto y, por ende, es autocontradictorio.

Nosotros demostraremos, sin hacer ninguna suposición acerca de estos ángulos (aquí no seguimos la demostración original de Saccheri), que en un cuadrilátero de Saccheri, el lado superior es mayor que o igual a la base (lado inferior). Para ello, primero mostraremos que, dados dos cuadriláteros de Saccheri $ABCD$ y $A'B'C'D'$ (véase diagrama) tales que $\overline{AD} \cong \overline{A'D'}$ y $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, entonces $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, $\angle B \cong \angle B'$ y $\angle C \cong \angle C'$. La demostración utiliza elementos similares a los que presentamos anteriormente.

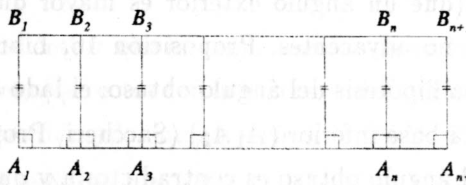


Ahora bien, para el resultado principal (que el lado superior es mayor o igual a la base inferior), consideramos un cuadrilátero de Saccheri $A_1B_1B_2A_2$ y construimos una sucesión de n cuadriláteros de Saccheri tales que

$$A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_nA_{n+1}$$

y

$$A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = \cdots = A_nB_n = A_{n+1}B_{n+1}.$$



El resultado inmediatamente anterior nos permite deducir que

$$B_1B_2 = B_2B_3 = \cdots = B_nB_{n+1}.$$

Hay que tener en cuenta que no podemos asegurar, sin embargo, que los puntos $B_1, B_2, \ldots, B_{n+1}$ son colineales. Pero, por la desigualdad triangular, se tiene que

$$B_1B_{n+1} \leq B_1B_2 + B_2B_3 + \cdots + B_nB_{n+1}.$$

Sin embargo, todos los sumandos de la derecha son iguales a B_1B_2, de donde,

$$B_1B_{n+1} \leq n \cdot B_1B_2.$$

La misma desigualdad nos permite concluir que

$$A_1A_{n+1} \leq A_1B_1 + B_1B_2 + \cdots + B_nB_{n+1} + B_{n+1}A_{n+1} \leq A_1B_1 + n \cdot B_1B_2 + A_1B_1.$$

Dado que $A_1A_{n+1} = n \cdot A_1A_2$, finalmente obtenemos

$$nA_1A_2 \leq nB_1B_2 + 2A_1B_1 \quad \text{o sea} \quad n(A_1A_2 - B_1B_2) \leq 2A_1B_1.$$

Además, esta última relación se tiene para cualquier n. Ahora bien, si la base superior no es mayor o igual a la inferior, entonces $A_1A_2 > B_1B_2$, lo cual implica que $A_1A_2 - B_1B_2$ es un número positivo. Claramente, $2A_1B_1$ es un número positivo. De allí se sigue que la relación que obtuvimos viola el principio arquimediano de los números. Esta contradicción nos permite concluir que $A_1A_2 \leq B_1B_2$.

Ahora bien, usando las desigualdades establecidas por Euclides sin recurrir al quinto postulado (que un ángulo exterior es mayor que cualquiera de os ángulos interiores no adyacentes, Proposición 16, Libro I), Puede demostrarse que, bajo la hipótesis del ángulo obtuso, el lado superior (B_1B_2) debe ser menor que la base inferior (A_1A_2) (Saccheri, Proposición III). Es decir, la hipótesis del ángulo obtuso es contradictoria y queda descartada.

Saccheri no logra ningún resultado que merezca nuestra inspección en el caso de la hipótesis del ángulo agudo, aunque fuerza una supuesta contradicción al deducir de ella una propiedad que es "repugnante a la naturaleza misma de la línea recta".

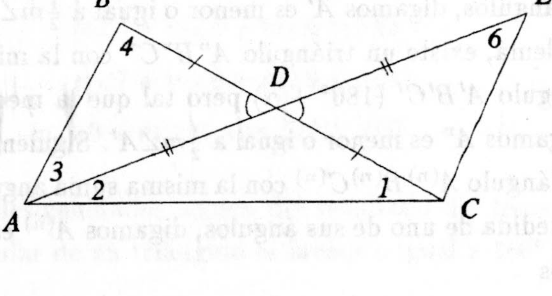
Desde el punto de vista histórico, el enfoque de Saccheri es de monumental importancia, ya que al poner en consideración alternativas al quinto postulado y al basarse en éstas para razonar, Saccheri en efecto abre la caja de Pandora. No fue difícil reconocer la ineficacia de la supuesta contradicción que había derivado de la hipótesis del ángulo agudo e importantes matemáticos posteriores se dedicaron a analizar esta alternativa. Central entre ellos es Lambert quien incluso llega a postular modelos para esa geometría improbable (anti-intuitiva). Hacia 1759 d'Alembert comenta que el problema del axioma de las paralelas es "el escándalo de los elementos de geometría". Culminan todas estas consideraciones en la mente de Gauss quien logra darse cuenta de que de la hipótesis del ángulo agudo no sigue contradicción alguna y así admitir la posibilidad de geometrías alternas a la euclidiana.

Pero lo difícil de este paso y los obstáculos que opuso la intuición (Gauss los llamará rocas en que se estrellaba) está fielmente ilustrado en el camino que recorrió el matemático francés Adrien Marie Legendre (1752-1833). Legendre publicó más de 30 ediciones de su *Geometría* . En cada una de ellas presentó nuevas 'demostraciones' del quinto postulado de Euclides. Cada una de estas demostraciones contiene un supuesto aparentemente inocuo. (O por lo menos para Legendre eran supuestos perfectamente razonables, provenientes del sentido común que no le permitió ver que las cosas podrían ser de otra forma.) Veamos algunos de ellas.

Legendre va a demostrar que la suma angular de un triángulo no puede ser menor que dos ángulos rectos (en la hipótesis del ángulo agudo por supuesto los ángulos de un triángulo suman menos de 180°). Para ello introduce un lema o resultado auxiliar.

Lema . Sea $\angle A$ un ángulo de un triángulo cualquiera ABC. Entonces existe un triángulo $A_1B_1C_1$ con la misma suma angular que el $\triangle ABC$ y tal que $m\angle A_1 \leq \frac{1}{2} m\angle A$.

Para su demostración Legendre considera una construcción reminiscente de la empleada por Euclides en la demostración del teorema del ángulo exterior. Biseca el lado BC del $\triangle ABC$ en el punto D. Traza el segmento AD y lo prolonga hasta un punto E de modo que $AD = DE$. Luego une E y C. Es claro que $\triangle ABD \cong \triangle EDC$ por LAL. En consecuencia, de acuerdo con la notación del diagrama a continuación, $\angle 3 \cong \angle 6$, $\angle 4 \cong \angle 5$.



Entonces,

$$m\angle 1 + (m\angle 2 + m\angle 3) + m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 5 + m\angle 6,$$

o sea, la suma de los ángulos del $\triangle ABC$ es igual a la suma de los ángulos del $\triangle ACE$. Pero, $\angle 1 \cong \angle C, \angle 4 \cong \angle B$, de donde,

$$(1) \qquad m\angle 2 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 6 = m\angle A.$$

De allí se sigue que los triángulos ABC y ACE tienen la misma suma angular, pero alguno de los ángulos del triángulo ACE es menor que $\frac{1}{2}\angle A$. Pues, si $m\angle 2 > \frac{1}{2}m\angle A$ y $m\angle 6 > \frac{1}{2}m\angle A$, entonces,

$$m\angle 2 + m\angle 6 > \frac{1}{2}m\angle A + \frac{1}{2}m\angle A = m\angle A,$$

que contradice la igualdad (1).

Ahora bien, armado con el lema, Legendre demuestra que la suma angular de un triángulo no puede ser mayor que 180°. (Esto es equivalente a la hipótesis del ángulo obtuso ya que los ángulos en el lado inferior de un cuadrilátero de Saccheri son rectos y si los ángulos superiores son obtusos, es claro que la suma de los ángulos del cuadrilátero sería mayor que 360° y la de los ángulos del triángulo mayor que 180°.)

Teorema 1. La suma angular de un triángulo es siempre menor o igual a 180°.

La demostración de Legendre procede por contradicción. Supone que la suma angular de un cierto triángulo ABC es mayor que 180°, digamos que es igual a $180° + \alpha$. Entonces, por el lema anterior, existe un triángulo $A'B'C'$ con la misma suma angular $(180° + \alpha)$ pero tal que la medida de uno de sus ángulos, digamos A' es menor o igual a $\frac{1}{2}m\angle A$. Aplicando nuevamente el lema, existe un triángulo $A"B"C"$ con la misma suma angular que el triángulo $A'B'C'$ $(180° + \alpha)$ pero tal que la medida de uno de sus ángulos, digamos $A"$ es menor o igual a $\frac{1}{2}m\angle A'$. Siguiendo de esta manera, existe un triángulo $A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}$ con la misma suma angular, $180°+\alpha$, pero tal que la medida de uno de sus ángulos, digamos $A^{(n)}$ es menor que α. En él tendremos

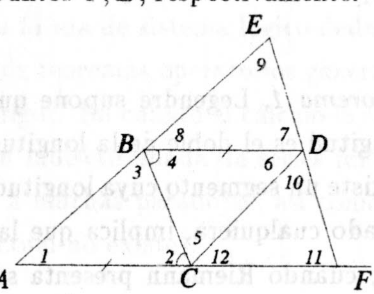
$$\alpha + 180 = m\angle A^{(n)} + m\angle B^{(n)} + m\angle C^{(n)} < \alpha + m\angle B^{(n)} + m\angle C^{(n)}.$$

Se sigue, restando α de ambos miembros de la desigualdad, que $180 < m\angle B^{(n)} + m\angle C^{(n)}$, es decir, que dos de los ángulos del triángulo suman más que 180°, lo cual contradice la Proposición 17 del Libro I de los *Elementos*, una proposición que se demuestra sin hacer uso del postulado de las paralelas.

Se ha establecido, entonces, que la suma angular de un triángulo es menor o igual a 180°. Legendre procede a demostrar el teorema siguiente.

Teorema 2. La suma angular de un triángulo no es menor que 180°.

Para ello considera que existe un triángulo ABC tal que su suma angular es menor que 180°, o sea, igual a $180-\alpha$. Sea A el menor ángulo del triángulo. Ahora bien, sobre el lado BC construimos el triángulo BCD congruente al triángulo ABC, haciendo $\angle CBD \cong \angle ACB$ y $BD = AC$. Entonces extendemos AC y AB y trazamos una recta por D que se interseca con estas extensiones en los puntos F, E, respectivamente.



Refiriéndonos a la figura anterior, tenemos que

$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180 - \alpha$$

$$m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6 = 180 - \alpha$$

$$m\angle 7 + m\angle 8 + m\angle 9 \leq 180$$

$$m\angle 10 + m\angle 11 + m\angle 12 \leq 180$$

Las dos últimas desigualdades siguen del resultado del teorema anterior (que la suma angular de un triángulo es menor o igual a 180°). Además

$$m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 8 = m\angle 6 + m\angle 7 + m\angle 10 = m\angle 2 + m\angle 5 + m\angle 12 = 180.$$

De allí, sustituyendo estos valores en las desigualdades anteriores, tenemos,

$$m\angle 1 + m\angle 9 + m\angle 11 + 3(180) \leq 4(180) - 2\alpha$$

o sea

$$m\angle 1 + m\angle 9 + m\angle 11 \leq 180 - 2\alpha.$$

Siguiendo este proceso se llega a un triángulo cuya suma angular es negativa, restando α de 180 un número suficiente de veces. (Nótese el empleo de la propiedad arquimediana.) De esta contradicción se sigue que la suma angular de un triángulo no es menor que 180.

Ahora, conjuntamente los teoremas 1 y 2 implican que la suma angular de un triángulo es igual a 180 (propiedad que claramente corresponde a la geometría euclidiana).

¿Cuáles son los supuestos indebidos que hace Legendre en sus demostraciones?

En el caso del *Teorema 1*, Legendre supone que es posible construir un segmento cuya longitud es el doble de la longitud del segmento AD. Esta posibilidad, que existe un segmento cuya longitud es el doble de la longitud de un segmento dado cualquiera, implica que la línea recta es infinita en extensión. Ahora, cuando Riemann presenta su geometría, la geometría elíptica, la línea recta es tomada como no acotada pero no infinita en extensión (un modelo de esta geometría identifica las rectas con las circunferencias máximas en la superficie de una esfera). La suposición de Legendre es la misma que hace Saccheri (y que hicimos nosotros anteriormente cuando construimos n cuadriláteros de Saccheri consecutivos) para llegar a una 'contradicción' en la hipótesis del ángulo obtuso.

En el caso del *Teorema 2*, Legendre supone que por cualquier punto en el interior de un ángulo siempre es posible trazar una recta que interseca ambos lados del ángulo, lo cual no es válido en la hipótesis del ángulo agudo.

EL PROBLEMA DE LA EXISTENCIA DE LOS ENTES MATEMÁTICOS

A pesar de las dudas suscitadas por el quinto postulado de Euclides, no hay antes de Gauss una sospecha que prospere de que podría haber una geometría distinta de la euclidiana. Los esfuerzos se centran en demostrar el postulado. Si se demuestra el quinto postulado con base en los otros cuatro, se habrá demostrado que Euclides no debía haberlo tomado como postulado, pero estaría firmemente establecido como verdad.

De hecho, antes de Gauss nadie duda de la verdad de la geometría euclidiana. Si los postulados son verdades autoevidentes, todas las proposiciones demostradas con base en esos postulados son también verdades. Esto significa, en efecto, que el espacio es necesariamente euclidiano.

Ahora bien, un vistazo a las demás ramas de las matemáticas hacia finales del siglo XVIII, muestra que ni el álgebra ni la aritmética habían sido axiomatizadas y puestas en forma de sistema lógico-deductivo fuerte. Estas constaban de colecciones de teoremas operatorios generalmente aceptados, pero no demostrados con rigor. En cuanto al cálculo la situación era mucho peor, pues la introducción indiscriminada de series infinitas y de infinitesimales había dado lugar a muchas paradojas, así como de ataques de los aristotélicos (el infinito actual no existe).

Por ejemplo, merced al álgebra, la aritmética había crecido hasta comprehender no sólo números racionales e irracionales, sino también números negativos e imaginarios. El mismo nombre de estos últimos indica que se dudaba de su existencia, de su realidad. Varios siglos de discusión dieron lugar a la aceptación de estos números como legítimos, dada la posibilidad de interpretarlos geométricamente como segmentos dirigidos en una recta (negativos) o en un plano (complejos). No cabe duda de que el criterio operante de existencia de los entes matemáticos, lo que les atribuía realidad (en oposición a ser apenas nominales), era la posibilidad de interpretarlos geométricamente, pues con una interpretación geométrica existen en el espacio, son reales. La situación de los 'entes' del cálculo descansaba sobre una base similar, pues la interpretación de la derivada de una función en un punto como pendiente de la tangente a la curva (gráfica de la función) en ese punto y de la integral definida de una función como área debajo de la respectiva curva en un intervalo, era suficiente para atribuir a éstas existencia, a pesar de la gran cantidad de contradicciones asociadas con su definición y manejo.

No cabe duda de que el problema de la existencia de los entes que la matemática estudia es crucial y fundamental. No hay experiencia directa con ninguno de ellos. Para los pitagóricos las leyes del universo son leyes matemáticas; la matemática se plasma en estas leyes que se aplican al comportamiento observado (armonía musical, estética, etc.). La física newtoniana y, en grado más agudo, la física de nuestro siglo, sigue esta tradición pitagórica y hasta el siglo XIX estas leyes eran de naturaleza fundamentalmente geométrica. Otros crearon un mundo aparte, eterno e inmóvil, donde existen los entes matemáticos; para Platón existen en el mundo de las ideas puras (que son imperfectamente reflejadas en el mundo del devenir en que nos movemos); para los neoplatónicos de la era moderna, como Kepler, existen en la mente de Dios quien los plasmó en este universo de su creación. Para Aristóteles existen de un 'modo especial', ni en las cosas ni independientes de la cosas. Estirando las palabras aristotélicas es posible entrever que los entes matemáticos existen en la mente del sujeto que los conoce. Sin embargo, al lado de esta visión más autónoma de la matemática se sentaron exigencias fuertes para evitar el nominalismo y la trivialidad. Si un matemático define algo está en la obligación de demostrar, a partir de sus axiomas y postulados, que ese algo existe.

Se puede afirmar categóricamente que hasta Gauss (a pesar de conocidas intromisiones del álgebra, por ejemplo, en los resultados de Leonardo de Pisa), tales demostraciones descansaban sobre la geometría como ciencia del espacio.

El camino recorrido por Gauss

Podemos trazar el camino recorrido por Gauss (1777-1855) en la correspondencia que mantuvo con amigos y colegas respecto de un problema central de su época: el *status* del quinto postulado de Euclides. Veamos primero una carta escrita por Gauss, cuando contaba apenas 15 años, a su amigo Schumacher.

1792. Gauss a Schumacher

"Si el sistema euclidiano no es la única geometría verdadera (es decir, la idealización correcta de las propiedades del espacio físico), yo puedo construir otra geometría lógicamente consistente." [Burton, p.549; Kline, p. 82]

Aquí Gauss identifica 'verdad' con correspondencia con una realidad física. Utiliza dos palabras 'verdadera' y 'consistente' que llegarán a emplearse para caracterizar el *status* de las proposiciones de la matemática antes y después de la crisis de las geometrías no euclidianas. Gauss evidentemente atribuye algún valor a un sistema lógicamente consistente. Parece estar abierto a la posibilidad de que ni la geometría euclidiana ni la geometría que él ha construido sean las idealizaciones correctas del espacio físico.

1804. Gauss a Wolfgang Bolyai

"Mis intentos por demostrar el axioma de las paralelas siempre se estrellan contra las rocas. Todavía guardo la esperanza de que estas rocas en algún momento, antes de mi muerte, permitirán el paso." [Burton, p.550]

Con estas palabras, Gauss está intentando decidir la cuestión de la verdad de la geometría euclidiana desde la matemática, demostrando el axioma de las paralelas. Comienza a ver las dificultades enormes que se presentan, pues en plena juventud a los 27 años ve tan difícil la cuestión que hace referencia a una eventualidad tan remota como es la de su muerte.

1813. Gauss a Bolyai

"En la teoría de las paralelas no hemos avanzado hoy más allá de Euclides. Esta es una parte vergonzosa de la matemática, que tarde o temprano debe recibir una forma totalmente nueva." [Burton, p. 550]

Aquí Gauss ya habla de una 'forma totalmente nueva'. Podemos de allí concluir que Gauss comprende que los dos enfoques tradicionales (de ofrecer un enunciado equivalente al postulado de Euclides, pero más claro y evidente o de demostrar el quinto postulado con base en las proposiciones de la geometría euclidiana que no dependen de él) se han desgastado por completo. La verdad del postulado euclidiano podría verse ya como inalcanzable desde la matemática. En el rechazo al trabajo tradicional se vislumbra la posible consideración de axiomas alternos.

1817. Gauss a Heinrich Olbers

"Me estoy convenciendo cada día más de que la verdad necesaria de nuestra geometría (euclidiana) no puede demostrarse, al menos no por el intelecto humano para el entendimiento humano. Quizás en otra vida...." [Burton, p.550]

Lo sugerido en la carta a Bolyai, se hace explícito en ésta y las implicaciones son profundas. Desde la crítica de los empiristas, la matemática se ha tenido como la única fuente o depósito de verdades necesarias. Gauss está admitiendo que tampoco se encuentran verdades necesarias en la matemática. Sin embargo, termina con una nota de humildad que parece sugerir que abriga la esperanza de que la necesidad de las verdades de la geometría podría ser conocida por un ser superior, un Dios. El proceso que vimos desarrollarse en la correspondencia anterior de Gauss parece haber llegado a un punto crucial, las limitaciones de la matemática 'humana' se identifican con la imposibilidad de garantizar la verdad de ella. La verdad de la matemática se hace provincia de un ser superior.

1824. Gauss a Franz Taurinus

"La suposición de que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que 180° conduce a una geometría curiosa, bien distinta de la nuestra (euclidiana), pero completamente consistente, que he desarrollado a mi satisfacción.... Los teoremas de esta geometría parecen ser paradójicos y, para los no iniciados, absurdos; pero una reflexión tranquila y sin vacilaciones revela que no contienen nada imposible.... De todas maneras, ésta es una comunicación privada de la que no debe hacerse uso público o algún uso que conlleve publicidad. Quizás yo mismo, si en el futuro tengo más tiempo disponible que en este momento, haré públicas mis investigaciones." [Burton, p.550; Kline, p. 82]

He aquí el destape definitivo y la interpretación final dados por Gauss en cuanto a lo ocurrido en la geometría. Y en estas palabras de Gauss se encuentran nuevas e importantes caracterizaciones de la matemática. En primer lugar, se permite tomar un nuevo axioma acerca de la suma de los ángulos de un triángulo. Ya no se exige que un axioma sea una verdad autoevidente. En segundo lugar, se enuncia el nuevo criterio de solidez para los sistemas matemáticos, que sean 'completamente consistentes'. La tercera afirmación de Gauss es una declaración de independencia del yugo de la intuición (parecen ser paradójicos y absurdos). Gauss concluye su valoración con las palabras 'no contienen nada imposible': esto augura la visión de la matemática como la ciencia de todo lo posible que se desarrollará brillantemente en la obra de matemáticos como Frege, Russell y otros. (Frege dirá que la matemática no sólo es la ciencia de todo lo posible sino la ciencia de todo lo pensable.) Es de notar que la palabra 'verdad' brilla por su ausencia. Se ha consumado la evolución del pensamiento de Gauss quien ha soltado del todo la noción milenaria que liga la matemática con la verdad, supeditada a la mente de un ser superior y plasmada en su creación.

1829. Gauss a Friedrich Bessel.

"Puede tomar mucho tiempo antes de que haga públicas mis investigaciones al respecto. De hecho, puede que no ocurra mientras sigo vivo, ya que temo

EL CLAMOR DE LOS BEOCIOS si llegase a expresar mis puntos de vista completamente." [Burton, p.551; Kline, p. 83]

De hecho, Gauss jamás publicó sus investigaciones en la geometría no euclidiana. Privadamente Gauss rompió con todos los supuestos mas caros de la ciencia y la matemática europea, tanto cristiana como clásica. Rompió con Platón, con Aristóteles, con Newton, con Kepler, con Kant y con la intuición. Gauss entendió todas las implicaciones de sus invesigaciones. La visión contemporánea de la matemática no sólo nació en la mente de Gauss, sino que allí maduró.

1854. Riemann (discípulo de Gauss) en su disertación doctoral. [Smith, p. 411]

"Sobre las hipótesis que subyacen a la geometría."

La palabra 'hipótesis' reemplaza a la palabra 'axioma' o verdad autoevidente y absoluta. La decisión acerca de la verdad de una hipótesis acerca del espacio no pertenece a la lógica ni a la matemática, sino a la física.

[Por medio del trabajo de Riemann, sabemos que Gauss inclusive llegó a repensar el caso del ángulo obtuso (la suma angular del triángulo mayor que 180°) y destapar el engaño perpetrado allí por la intuición, a saber: que poderse extender indefinidamente no es equivalente a ser infinito en extensión.]

Gauss había llegado a un convencimiento revolucionario en la historia del pensamiento, que puede haber conocimiento exacto que no es verdadero, que es totalmente autónomo y como tal no tiene porque corresponder a ninguna 'realidad' exterior.

KANT

Gauss jamás hizo públicas sus investigaciones en geometría no euclidiana. Temía, como se dijo, el **clamor de los beocios**. Se expecula que puede haber tres razones que explican sus temores. En primer lugar, está por medio (al menos a los comienzos de sus investigaciones) el respeto por los pensadores clásicos. En las primeras décadas del siglo XVIII, Leibniz dejó bajo llave en su escritorio unas investigaciones revolucionarias en la lógica simbólica porque su lógica entraba en conflicto con la aristotélica precisamente en cuestiones de carácter ontológico (de hablar de lo que *es* , del ser, de lo real, de verdad). Las investigaciones de Gauss de alguna forma contradecían a Euclides y era claro que la resistencia a ellas sería guerrida.

En segundo lugar, una de las obras más importantes de Gauss, las *Disquisitiones aritmeticae* escritas cuando tenía apenas veinticuatro años, había sido rechazada para su publicación por la gran Academia Francesa de Ciencias. Su propia precocidad afectaba su seguridad en sí mismo.

Y, más importante que todo, estaba por medio el sistema de Kant. En su *Crítica de la razón pura*, Kant había investigado la cuestión de la posibilidad de la ciencia matemática. En sus *Prolegoómenos (a cualquier metafísica futura que puede calificarse de ciencia)*, sus consideraciones claves acerca de la posibilidad de la matemática pura están bien representadas por los siguientes apartes:

"Aquí hay una gran y establecida rama del conocimiento...(que) lleva consigo una certeza apodíctica, es decir, necesidad absoluta, que por ende no descansa sobre bases empíricas. En consuencia es un producto puro del razonamiento y es, además, completamente sintética.

¿Cómo es posible que la razón humana puede producir una cognición de esta naturaleza enteramente *a priori*?

¿No presupone esta facultad (que produce la matemática), ya que ni es ni puede ser basada en la experiencia, algún fundamento de cognición *a priori*, que yace profundamente escondido, pero que podría revelarse en sus efectos, si sus primeros inicios se indagaran diligentemente?" [Kant, *Prolegomena*, p. 32, traducción del autor]

"... de una sola manera puede mi intuición anticipar la actualidad del objeto, y constituirse en una cognición *a priori*, a saber: si mi intuición no contiene mas que la forma de la sensibilidad, anterior en mi subjetividad a todas las impresiones por medio de las cuales los objetos me afectan. Pues puedo saber de antemano el que los objetos de los sentidos sólo pueden ser intuidos según esta forma de sensibilidad." [Kant, Prolegomena, p.35]

"La matemática pura, como cognición sintética *a priori*, es solamente posible no haciendo referencia a objeto alguno otro que los de los sentidos. En la base de su intuición empírica yace una intuición pura (de espacio y tiempo) que es *a priori*. Esto es posible por que ésta intuición no es mas que la mera forma de sensibilidad, que precede la aparición actual de los objetos, en que ella, de hecho, los hace posibles. Sin embargo esta facultad de intuir *a apriori*no afecta la materia del fenómeno (es decir, el elemento sensible en él ya que ello constituye lo que es empírico), sino su forma, a saber, espacio y tiempo." [Kant, Prolegomena, p. 36]

Por otra parte, quiso reconciliar su creencia en una armonía preestablecida del universo con la profusión de datos recogidos por observación experimental. Quizo además enfrentar teorías que consideraba peligrosas, tanto el empirismo británico (todo conocimiento surge de la experiencia, no hay verdades necesarias sino simplemente verdades de hecho) y el racionalismo dogmático del continente europeo (todo conocimiento surge del pensamiento autónomo). Kant estuvo de acuerdo con que todo conocimiento comienza con la experiencia externa, ya que alguna sensación debe preceder e impulsar las operaciones del pensamiento; pero la mente puede actuar sobre las impresiones de los sentidos solamente porque ya está dotada con 'intuiciones' de espacio y tiempo, que son independientes de la experiencia y dan forma a ella. Para Kant, la mente posee las formas de espacio y tiempo. Espacio y tiempo son intuiciones en términos de las cuales la mente asimila la experiencia. Percibimos, organizamos y extendemos la experiencia de acuerdo con estas formas mentales. Ya que la intuición del espacio tiene su origen en la mente, la mente automáticamente acepta ciertas propiedades de ese espacio. Principios tales como 'la línea recta es la trayectoria más corta entre dos puntos' es parte de nuestro equipo mental. Dice: "el concepto del espacio (euclidiano) no tiene origen empírico, sino que constituye la necesidad inevitable del pensamiento". En consecuencia, la experiencia necesariamente conformará a los principios básicos y los teoremas de la geometría euclidiana. Dice en los *Prolegómenos*

"... este espacio mental hace posible el espacio físico, es decir, la extensión de la materia; ... este espacio puro no es de ninguna manera una cualidad de las cosas en sí mismas, sino una forma de nuestra facultad sensible de representación; y ... todos los objetos en el espacio son meras apariencias, es decir, no cosas en sí sino representaciones de nuestra intuición sensible. ...tal es el caso, ya que el espacio del geómetra es exactamente la forma de la intuición sensible que encontramos *a priori*en nosotros, y contiene el fundamento de la posibilidad de toda apariencia externa (en cuanto a su forma), y ésta última debe, necesariamente y del modo mas rígido, estar de acuerdo con las proposiciones del geómetra, que éste extrae no de ningún concepto ficticio, sino de la base subjetiva de todos los fenómenos externos, que es la sensibilidad misma. De esta manera, y de ninguna otra, puede ser asegurada la geometría en cuanto a la realidad objetiva incuestionable de sus proposiciones frente a las intrigas de una metafísica superficial, que se sorprende ante ellas (las proposiciones geométricas), porque no las ha trazado hasta la fuente de sus conceptos." [Kant, Prolegomena, p.42]

Kant explica las leyes matemáticas de la naturaleza en los siguientes términos. Ya que toda experiencia se asimila en términos del marco mental de espacio y tiempo, la matemática debería ser aplicable a toda la experiencia. En *Los fundamentos metafísicos de las ciencias naturales* (1786), Kant afirmó haber deducido las leyes de movimiento de Newton de la razón pura y reclamó que ellas son las únicas suposiciones bajo las cuales la naturaleza es comprensible.

En el pensamiento de Kant, las sensaciones tienen su origen en un mundo real (de las cosas en sí) pero desafortunadamente este mundo no es conocible. En las palabras de Morris Kline (siempre irreverentes): "la filosofía de Kant glorificaba la razón, pero asignó a ella no el papel de explorar la naturaleza, sino los recovecos de la mente humana". [Kline, p. 77] Para Kant las leyes de la geometría euclidiana no son inherentes en el universo y el universo no fue diseñado así por Dios; las leyes son un mecanismo humano para organizar el racionalizar las sensaciones. Cuestionar la idea de que el postulado de las paralelas es inherente en la estructura de la mente como una intuición (quizás implantada por Dios) equivalía a cuestionar la filosofía Kantiana del conocimiento. Gauss no se sentía igual al reto.

Sin embargo es claro que en su pensamiento privado, Gauss dudó de esta visión en la que la mente nos obliga a mirar el mundo de una sola manera. [Burton, p. 552; Kline, p.87] Además, él creía que la determinación de la geometría del espacio es una cuestión empírica y como tal no dependía directamente de la matemática sino de la ciencia experimental.

Ahora bien, ¿puede pensarse que Kant era un precursor de la geometría no euclidiana y de la concepción de la matemática como creación de la mente en tanto sostenía que la geometría está en la mente, no es una única verdad plasmada en el mundo externo? No es aceptable esta interpretación del pensamiento kantiano ya que no toma en cuenta una posición claramente afirmada por Kant. El verdadero espíritu trás la concepción de la matemática como creación humana enfatiza que es creación *libre*; la mente kantiana es esclava de la geometría euclidiana.

La aritmetización

Si bien Gauss nunca hizo públicas sus investigaciones, otros jóvenes matemáticos sí lo hicieron. El matemático ruso Nicolai Lobachevsky y el jóven húngaro Janos Bolyai (hijo del amigo de Gauss, Wolfgang Bolyai) no dudaron del valor de sus resultados, aparentemente independientes, y los hicieron públicos. Cosa similar hizo el último alumno de Gauss, Bernhard Riemann. Lobachevsky y Bolyai desarrollaron la geometría hiperbólica, asociada con la hipótesis del ángulo agudo: por un punto exterior a una recta pasa más de una recta paralela a la recta dada. Riemann desarrolló la geometría elíptica, asociada con la hipótesis del ángulo obtuso: por un punto exterior a una recta no pasa ninguna recta paralela a la recta dada. (Recordamos que para llegar a ello, Riemann tuvo que vencer la milenaria costumbre mental, referente a la línea recta, de interpretar el no estar acotada como equivalente de ser infinita en extensión, supuesto que, como hemos visto aparece en el razonamiento de Euclides, Saccheri y Legendre.)

La existencia de geometrías alternas fue interpretada de varias maneras; se centró la discusión en la forma en que éstas pueden encajar en la ciencia matemática. Siendo mutuamente excluyentes, solo una de ellas podría ser verdadera. Pero las palabras de Gauss subrayan el punto crucial: las nuevas geometrías son "completamente consistentes" y "no contienen nada imposible". Es tarea de la física determinar la cuestión de cuál de las geometrías corresponde al espacio de la experiencia. Desde una perspectiva matemática, todas son igualmente válidas.

Una alternativa que se presentó de inmediato fue la de buscar la fundamentación de la matemática en la aritmética, como único depósito de verdades universales y necesarias. Al respecto tenemos el testimonio del mismo Gauss.

1830. Gauss a Bessel.

"De acuerdo con mi convicción más sincera, la teoría del espacio tiene un lugar totalmente diferente del que ocupa la matemática pura (la matemática construida con base en el número) en el conocimiento. Hace falta en todo nuestro conocimiento de ella el convencimiento completo de necesidad (también de verdad absoluta) que es común en la segunda; debemos añadir con toda humildad que si bien el número es exclusivamente producto de nuestra mente, el espacio tiene una realidad fuera de la mente y no podemos prescribir sus leyes totalmente." [Kline, p. 87]

De hecho se habían puesto en marcha sendos programas de aritmetización del análisis (cálculo) con el objetivo de desterrar las paradojas asociadas con vagas nociones geométricas (por ejemplo, la de continuidad). Se dieron urgentes esfuerzos por fundamentar toda la matemática sobre la base de la aritmética y posteriormente por fundamentar la aritmética misma. Estos condujeron a monumentales obras como la teoría de conjuntos de Cantor y desembocaron en nuevas y fundamentales crisis creadas por el encanto o el embrujo del infinito.

Unas nuevas consideraciones acerca de la naturaleza de la matemática y el modo de existir de los entes matemáticos

En oposición a las visiones de Kant y de Gauss en los primeros años de esta controversia, buena parte de los matemáticos y físicos sigue creyendo en un mundo externo sujeto a leyes (matemáticas) independientes de la mente humana. Ese mundo goza de un diseño racional y el hombre meramente descubre ese diseño y lo utiliza para predecir eventos futuros.

Una corriente de pensamiento que se maduró a lo largo del siglo XIX caracteriza la matemática como una ciencia de pura relación. La matemática no estudia lo que *es* sino todo lo posible.

La matemática kantiana era esclava de la intuición. La historia de la geometría no euclidiana es, entonces, también la historia de la crítica a la intuición y el surgimiento de una concepción de la matemática en que la lógica toma primacía sobre ella.

El fracaso de la fundamentación incondicional de la matemática sobre la base de la aritmética, conllevó la formalización de ella y su caracterización por algunos como la ciencia de manipulación de símbolos sin significado según reglas de transformación específicas.

Esta realización fue parte de la visión de Gauss, desde sus primeros encuentros con la necesidad de desarrollar una nueva concepción de la matemática (aunque posteriormente se alejó de esta posición tan radical). Entre su correspon dencia encontramos:

1811. Gauss a Bessel.

"Uno nunca debe olvidarse de que las funciones (de una variable compleja), como todas las construcciones matemáticas, son nuestras propias creaciones, y que cuando la definición con la cual uno comienza deja de tener sentido, uno no debe preguntarse *qué es* sino *qué es conveniente asumir que sea* para que siga siendo significativo." [Kline, p. 87]

Para los matemáticos estas cuestiones todavía no han encontrado una resolución definitiva. El matemático en ejercicio ha sido descrito recientemente como un platonista entre semana y un formalista dominical. Mientras investigue el matemático está convencido de que está estudiando una realidad objetiva cuyas propiedades procura determinar. Pero cuando se le exige que rinda cuentas filosóficas frente a esa realidad, encuentra mas fácil asumir la posición de no creer en ella.

Veamos la descripción de dos importantes matemáticos del siglo XX.

Jean Dieudonné, uno de los principales exponentes de la escuela Bourbaki escribió en 1970

"Sobre los fundamentos creemos en la realidad de la matemática, pero por supuesto cuando los filósofos nos atacan con sus paradojas, nos apuramos a escondernos tras el formalismo y decir, "La matemática no es mas que una combinación de símbolos sin significado" y sacamos a relucir Capítulos 1 y 2 sobre la teoría de conjuntos. Finalmente nos dejan en paz para volver a nuestra matemática y hacerla como siempre la hemos hecho, con ese sentimiento que tiene cada matemático de que está trabajando con algo real. Probablemente esta sensación es una ilusión, pero es muy conveniente. Esta es la actitud de los Bourbaki hacia los fundamentos." [Davis, p. 321]

Paul Cohen, uno de los lógicos más importantes del siglo XX , dijo en 1971

" Para el matemático promedio quien quiere saber meramente que su trabajo está basado con precisión, la alternativa mas atractiva es la de evitar dificultades por medio del programa de Hilbert. En él la matemática es vista como un juego formal y uno sólo se preocupa por la cuestión de consistencia. ... La posición realista (es decir, platonista) es probablemente la que la mayoría de los matemáticos preferirían asumir. No es hasta que se dé cuenta de algunas de las dificultades de la teoría de conjuntos que el (matemático) empezaría a cuestionarla. Si estas dificultades lo molestan particularmente, se correrá a la protección del formalismo, mientras que su posición usual estará en algún punto entre los dos, intentando gozar de lo mejor de los dos mundos." [Davis, p. 321-22]

ULTIMAS CONSIDERACIONES

Regresando a las palabras de Bertrand Russell, "Escogemos entonces cualquier hipótesis que parezca divertida y deducimos sus consecuencias. *Si* nuestra hipótesis trata de *cualquier cosa* y no de una o más cosas particulares, entonces nuestras deducciones constituyen matemáticas."

Mirando hacia futuras incursiones en la matemática del siglo XIX, para finalizar, vale la pena comentar que a pesar del consenso consolidado en torno a esta posición, se creó una gran controversia en torno a la difícil cuestión del modo de existir de los entes matemáticos; controversia que sigue marcando a las matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

Burton, David. *The History of Mathematics: An Introduction.*Wm. C Brown Publishers. Dubuque, Iowa. (1988)

Cohen, P. J. "Comments on the Foundations of Set Theory" en *Axiomatic Set Theory.* Dana Scott (Ed.) Providence (RI). American Mathematical Society. (1971). Citado en Davis, Phillip J. and Reuben Hersh. *The Mathematical Experience.*Birkhauser. Boston. (1981)

Dieudonné, J. "The Work of Nicholas Bourbaki" American Mathematical Monthly., 77, 134-145 (1970). Citado en Davis, Phillip J. and Reuben Hersh. *The Mathematical Experience.*Birkhauser. Boston. (1981)

Heath, Thomas. *The Thirteen Books of the Elements.* Vol. I. Dover. New York. 1956.

Kant, Immanuel. *Critique of Pure Reason.*Doubleday & Co. New York. (1966) Traducción al inglés de F. Max Müller.

Kant, Immanuel. *Prolegomena (to Any Future Metaphysics that Can Qualify as a Science.*Traducción al inglés de Paul Carus (1902). Open Court Publishing. LaSalle (IL). (1990)

Kline, Morris. *Mathematics: The Loss of Certainty.*Oxford University Press, 1980.

Moise, Edwin. *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint.*

Riemann, Bernhard. "On the Hypotheses which Lie at the Foundation of Geometry". en Smith, David E. *A Source Book in Mathematics.* Dover. New York. 1959.

Saccheri, G. "On Non-Euclidean Geometry" en Smith, David E. *A Source Book in Mathematics.* Dover. New York. 1959.