Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen VI No. 1 (1999), pp. 39–42

NOTAS DE SEMINARIO

ACERCA DE LOS ESPACIOS COMPACTOS Y T_0

NÉSTOR RAÚL PACHÓN RUBIANO(*)

Resúmen. En el artículo "On compactness of concordant topologies", L. Acosta[1] caracteriza la compacidad de ciertos espacios de importancia sobre conjuntos ordenados. En el camino que lo llevó a esa caracterización se encontró con un resultado interesante de la topología general que no aparece en la literatura y que tiene que ver con los espacios topológicos compactos y T_0. A ese resultado se le da una demostración completamente algebraica en [1] y [2].

Lo que se pretende en este artículo es dar una demostración topológica del resultado obtenido por L. Acosta, que tiene como herramienta fundamental la inducción transfinita.

Keywords: Compacidad, inducción trnasfinita

1. Introducción

Para empezar recordemos un par de definiciones de la topología general:

1) Un espacio topológico (X , β) es $\mathbf{T}_0$ si para cada par de puntos distintos $x, y \in$ X existe un conjunto U $\in \beta$ tal que $\{x, y\} \cap$ U $=\{x\}$, o, $\{x, y\} \cap$ U $=\{y\}$.

(*) Trabajo recibido 131/05/00, revisado 2/06/00. Néstor Raúl Pachón Rubiano, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia; Escuela Colombiana de Ingeniería

1 Profesor Asociado del departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia.

Esto es equivalente a decir que para todos $x, y \in$ X, si $x \neq y$ entonces $adh_\beta(x) \neq adh_\beta(y)$.

2) Un espacio topológico (X , β) es **compacto** si todo cubrimiento de X por elementos de β tiene un subcubrimiento finito.

Esto equivale a decir que toda colección de subconjuntos cerrados de X que tenga la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.

Ahora mencionaremos algunos conceptos propios de la teoría de los conjuntos ordenados, con el ánimo de dar un corto bosquejo de la demostración dada por L. Acosta del teorema que mencionaremos en breve.

Sea (A , $\preceq$) un conjunto parcialmente ordenado.

i) Si $a \in$ A, entonces $\downarrow a$ es el conjunto de elementos $b \in$ A tales que $b \preceq a$.
ii) Un elemento $a \in$ A es **minimal** si $\downarrow a = \{a\}$.
iii) **Min**(A , $\preceq$) es el conjunto de todos los elementos minimales de (A , $\preceq$).
iv) Si $a \in$ A, **min**(a) es el conjunto Min(A , $\preceq$)$\cap \downarrow a$.
v) (A , $\preceq$) **posee suficientes minimales** si para todo $a \in$ A, min(a) es no vacío.
vi) La **topología superior**, ϑ, para (A , $\preceq$) es la menor topología sobre A en la que todos los conjuntos $\downarrow a$, con $a \in$ A, son cerrados.

2. Resultado a demostrar

El resultado que nos interesa demostrar topológicamente es el siguiente:

Teorema 2.1. *Si (X , τ) es un espacio topológico compacto y T_0 entonces, para todo $x \in X$ existe $z \in adh_\tau(x)$ tal que $\{z\}$ es cerrado en (X , τ).*

Antes de presentar la prueba topológica, quisieramos mostrar muy brevemente la forma como el teorema es demostrado en [1].

3. Bosquejo de la prueba algebraica

La prueba se basa en el siguiente resultado, demostrado también en [1]:

Proposición 3.1. Si (X , $\preceq$) es un conjunto parcialmente ordenado y τ es una topología sobre X con $\vartheta \subseteq \tau$ entonces, si (X , τ) es compacto entonces (X , $\preceq$) posee suficientes minimales.

Consideremos ahora un espacio topológico T_0, (X , τ).

La relación $\alpha(\tau)$ definida en X mediante

$$x\alpha(\tau)\, y \text{ si y solo si } x \in adh_\tau(y)$$

resulta ser una relación de orden parcial que satisface:

i) Para cada $x \in X$, $\downarrow x = adh_\tau(x)$.
ii) $\mathrm{Min}(X\ ,\ \alpha(\tau)) = \{x \in X\colon \{x\}$ es cerrado en $(X\ ,\ \tau)\}$.

Si además $(X\ ,\ \tau)$ es compacto entonces, por la proposición anterior, en la adherencia de cada punto hay un punto cerrado. □

4. Una demostración topológica del teorema

Si $card\,(X) = 1$, no hay nada que probar.

Consideremos entonces el caso que $card\,(X) > 1$. Sea $x \in X$, arbitrario.

Si $\{x\}$ es cerrado en $(X\ ,\ \tau)$, ya está. Supongamos que $\{x\}$ no es cerrado.

Lo que se hace enseguida es definir, por inducción transfinita, para cada número ordinal u, un subconjunto cerrado X_u de $adh_\tau(x)$.

Sea $z_0 \in adh_\tau(x) \setminus \{x\}$. Como $(X\ ,\ \tau)$ es T_0, $adh_\tau(z_0) \subset adh_\tau(x)$ (inclusión estricta).

Definimos

$$X_0 = adh_\tau(z_0).$$

Sea u un número ordinal y supongamos definido un subconjunto cerrado, X_β, de $adh_\tau(x)$, para cada número ordinal $\beta < u$.

Definimos el conjunto X_u de la manera siguiente:

i) si $card(\bigcap\limits_{\beta<u} X_\beta) \leqslant 1$ entonces $X_u = \emptyset$.

ii) si $card(\bigcap\limits_{\beta<u} X_\beta) > 1$, existe $z_u \in \bigcap\limits_{\beta<u} X_\beta$ con $adh_\tau(z_u) \neq \bigcap\limits_{\beta<u} X_\beta$, pues $(X\ ,\ \tau)$ es un espacio T_0.

Definimos

$$X_u = adh_\tau(z_u).$$

Tenemos que:

a) Como la clase de los ordinales α que satisfacen que $X_\alpha = \emptyset$ es no vacía entonces existe un ordinal mínimo, θ, tal que $X_\theta = \emptyset$. Nótese que como $X_0 \neq \emptyset$ entonces $\theta > 0$.

b) Si α y β son números ordinales con $\alpha < \beta < \theta$ entonces $X_\beta \subset X_\alpha$ (inclusión estricta).

En efecto: $X_\beta = adh_\tau(z_\beta)$, para algún $z_\beta \in \bigcap\limits_{\lambda<\beta} X_\lambda$, y así $z_\beta \in X_\alpha$.

c) $\bigcap\limits_{\lambda<\theta} X_\lambda$ es no vacío pues la colección de cerrados $\{X_\lambda : \lambda < \theta\}$ tiene la propiedad de la intersección finita y $(X\ ,\ \tau)$ es un espacio compacto.

d) $\bigcap\limits_{\lambda<\theta} X_\lambda$ es unitario, pues de lo contrario tendríamos que $X_\theta \neq \emptyset$ y esto iría en contra de la propiedad del número θ dada en la parte (a).

e) Si hacemos $\bigcap\limits_{\lambda<\theta} X_\lambda = \{z\}$ entonces z es el elemento buscado. □

El recíproco de este teorema no se tiene, como lo muestra L. Acosta en el artículo en mención. Sinembargo, un recíproco parcial se obtiene cuando se considera la hipótesis adicional de que el espacio (X , τ) tenga un número finito de puntos cerrados. La demostración algebraica de este resultado es dada en [1], aunque es muy sencillo obtener una prueba topológica.

Referencias

[1] L. Acosta, *On compactness of concordant topologies*, Preprint. Univ. Nal. 1999.

[2] L. Acosta, E. Lozano, *Compactificaciones por un punto de un espacio topológico*, Memorias del XVI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, 1999.