*Boletín de Matemáticas*
Nueva Serie, Volumen XII No. 2 (2005), pp. 81–97

# UNA MIRADA AL PROBLEMA DE LOS CONECTIVOS NUEVOS

ARNOLD OOSTRA (*)

*Dedicado al Maestro*
***Xavier Caicedo**,*
*Premio Nacional de Matemáticas 2005*

Resumen. El problema de los conectivos nuevos constituye una línea de investigación en la que ha trabajado con éxito el profesor Xavier Caicedo. En esta revisión de sus aportes se plantean diversas variantes del problema, se discuten los avances logrados en las mismas, se establecen conexiones con otros problemas similares y se indican posibles líneas de avance futuro.

Palabras claves. Conectivos, haces, lógicas algebrizables.

Abstract. The problem of new connectives constitutes a line of research in which Professor Xavier Caicedo has worked successfully. In this revision of his contributions different variants of the problem are proposed. The advances achieved up to now are discussed. Connections with similar problems are established and promising lines of investigation are pointed out.

Key words and phrases. Connectives, sheaves, algebraizable logics.

(*) Arnold Oostra. Profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad del Tolima.
E-mail: oostra@telecom.com.co
AA 546 Ibagué, COLOMBIA.

## 1. El problema de los conectivos nuevos

David Hilbert comenzó su discurso de 1900 subrayando la importancia de los problemas matemáticos.

> *The deep significance of certain problems for the advance of mathematical science in general and the important role which they play in the work of the individual investigator are not to be denied. (...) Just as every human undertaking pursues certain objects, so also mathematical research requires its problems. It is by the solution of problems that the investigator tests the temper of his steel; he finds new methods and new outlooks, and gains a wider and freer horizon.*

Algunos problemas matemáticos, como la mayoría de los planteados por Hilbert, son puntuales o concretos en la medida en que tienen una única respuesta posible. Aunque con seguridad admiten generalizaciones y variantes, en esencia terminan en el momento en que se resuelven. Hay otros problemas de índole más conceptual que al ser planteados en general aparecen —deben aparecer— vagos, pero cuya mayor riqueza radica en su carácter proteico pues dan lugar a diversos problemas puntuales al ser leídos en contextos específicos. La solución puntual de una de estas versiones locales del problema, aunque puede dar luces, no resuelve el problema general que sigue vigente.

De ese carácter general, conceptual, proteico es el problema de los conectivos nuevos estudiado desde hace varios lustros por el profesor Xavier Caicedo. Una primera versión del problema lo describe él mismo de la manera siguiente.

> En contraste con el caso de la lógica clásica, cuyos conectivos proposicionales fundamentales $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ forman un sistema funcionalmente completo, en la lógica intuicionista pueden darse nuevos conectivos no reducibles a los tradicionales [ICI].

Esto es, en la lógica clásica cualquier conectivo proposicional —cualquier función $\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ o cualquier operación $n$-aria de subconjuntos— puede expresarse como combinación de los conectivos "corrientes", más aun, como combinación de algunos de ellos [6]. Pero esto no sucede en todas las lógicas, ni siquiera en las que contienen los conectivos corrientes. Es el caso de la lógica intuicionista de Heyting, donde no solo es imposible expresar unos conectivos corrientes en términos de otros como se hace en la lógica clásica sino que pueden definirse conectivos nuevos que no son combinación de esos corrientes.

Dada una lógica con los conectivos corrientes, la pregunta que se plantea entonces es la siguiente. ¿Existen en esta lógica conectivos nuevos, esto es, conectivos que no son combinación de los corrientes? Por supuesto la pregunta también puede formularse de otra manera. ¿Cuáles son las lógicas en las que, como en la clásica, todos los conectivos posibles son combinación de los corrientes?

Si de cierta lógica se sabe que posee conectivos nuevos entonces puede plantearse otra pregunta. ¿Cuáles conectivos deben añadirse al conjunto de los conectivos corrientes para obtener un sistema completo, esto es, tal que cualquier conectivo posible de la lógica es combinación de conectivos del sistema? Por supuesto tal sistema siempre existe, por ejemplo la colección de todos los conectivos, luego la pregunta puede refinarse. ¿Cuáles conectivos basta añadir al conjunto de los conectivos corrientes para obtener un sistema completo? Una pregunta relacionada que puede ser interesante en muchos casos es: ¿Cómo caracterizar los conectivos que son combinación de los conectivos corrientes?

En el caso particular de la lógica intuicionista los interrogantes adquieren otro matiz por la siguiente pregunta subyacente. ¿Qué es, exactamente, un conectivo intuicionista? Más lejos aún: ¿Cuál es la auténtica lógica intuicionista?

## 2. Conectivos nuevos en haces

Una primera línea de trabajo de Caicedo sobre el problema de los conectivos nuevos, línea en la que hay un claro ingrediente categórico, consiste en la búsqueda de conjuntos completos de conectivos para la lógica intuicionista de Heyting.

El primer trabajo en esta dirección es el artículo *Investigaciones acerca de los conectivos intuicionistas* [ICI], si bien su publicación final fue posterior a la de otros escritos sobre el tema. En [ICI] Caicedo escoge para la lógica intuicionista la semántica de los modelos de Kripke [7], contexto en el cual propone una definición de conectivo intuicionista. Da una gama amplia de ejemplos y presenta en cada caso un estudio bastante completo que incluye, en la mayoría de ellos, una axiomatización y una prueba de que el conectivo no es definible en términos de los conectivos corrientes. También contrasta su definición con ejemplos propuestos por Gabbay [9].

Un modelo de Kripke puede verse como un haz sobre cierto espacio topológico ordenado. En el escrito *Equivalência elementar entre feixes* [EEF], Sette y Caicedo adoptan el contexto más amplio de los haces de estructuras sobre un espacio topológico arbitrario [23]. Allí la equivalencia de haces tiene expresión categórica precisa, un conectivo es un subhaz de una potencia del clasificador de subobjetos y la semántica de Kripke-Joyal [22] puede extenderse de manera natural. El resultado central del artículo es una generalización del teorema de Fraïssé [8] pero en el camino se obtiene un hecho notable: cualquier conectivo puede definirse a partir de la familia $\{\wedge, \vee, \bigwedge, \Box_S \ (S \in \Omega(X))\}$ donde $\Box_S$ es cierto conectivo unario definido a partir del abierto $S$.

Los haces sobre un espacio topológico constituyen un topos [13]. En el importante artículo *Conectivos intuicionistas sobre espacios topológicos* [CET] —véase una descripción más detallada abajo— Caicedo discute la noción general de conectivo en el contexto de los topos, aunque enseguida la especializa a los topos de haces sobre un espacio topológico. Da una prueba mucho más concisa de que en estos haces los conectivos corrientes junto con los constantes generan todos los conectivos y estudia de manera completa los conectivos sobre espacios linealmente ordenados. En particular sobre el espacio de Sierpiński basta añadir cierto conectivo unario para obtener un sistema completo, y el autor da una axiomatización del correspondiente cálculo proposicional enriquecido. El artículo culmina con una notable conjetura sobre la posible caracterización topológica en los haces sobre espacios topológicos de los conectivos que son combinación de los corrientes.

Una pequeña extensión de esta línea de estudio se encuentra en la tesis de maestría de Oostra [18], dirigida por el mismo Xavier Caicedo. Además de una introducción completa a los conectivos en topos arbitrarios y de una semántica alternativa a la de Kripke-Joyal, en esa tesis se muestra que el resultado de [CET] en realidad es válido para topos de Grothendieck sobre conjuntos ordenados arbitrarios. El aporte consiste en estudiar los conectivos en uno de los topos de Grothendieck no ordenados más sencillos, a saber, en el topos de grafos dirigidos. Allí no bastan los conectivos constantes pero en la tesis se discriminan dos conectivos unarios que, añadidos a los conectivos corrientes, generan todos los conectivos [17].

**Descripción de** [CET]**.** En este apartado se expone con más detalle el contenido del artículo principal en esta línea, *Conectivos intuicionistas sobre espacios topológicos* [CET].

En la primera sección, partiendo de las operaciones usuales entre subconjuntos, Caicedo muestra la noción de conectivo en el contexto amplio de un topos arbitrario. Además de otras presentaciones, allí este concepto puede verse como una transformación natural de una potencia del funtor de subobjetos en el mismo funtor o bien como un simple morfismo de una potencia del clasificador de subobjetos en el clasificador.

Las tres secciones siguientes de [CET] se especializan al topos de haces sobre un espacio topológico y además de dar ejemplos abundantes e interesantes, el autor multiplica las presentaciones para los conectivos. En este caso un conectivo también puede verse como una operación de abiertos del espacio, como una propiedad local de esos abiertos o mediante una extensión adecuada de la semántica de Kripke-Joyal. Se destaca la observación siguiente, donde $X$ es un espacio topológico, $\Omega(X)$ la colección de sus abiertos y $\mathbb{S}h(X)$ el topos de haces sobre $X$.

**Lema.** *Los conectivos $n$-arios de $\mathbb{S}h(X)$ están en correspondencia biunívoca con las funciones $c : \Omega(X)^n \to \Omega(X)$ que satisfacen para todo $V \in \Omega(X)$ y $\boldsymbol{S} = (S_1, \ldots, S_n) \in \Omega(X)^n$:*

$$c(\boldsymbol{S} \cap V) \cap V = c(\boldsymbol{S}) \cap V. \tag{1}$$

La sección central, la quinta, contiene el resultado principal del artículo: "Una demostración más directa y sencilla que en [EEF] de que sobre cualquier espacio topológico los conectivos monádicos, en combinación con la conjunción y la disyunción posiblemente infinitaria, generan todos los conectivos sobre $X$". En el siguiente enunciado, $\square^W$ es la función unaria constante igual al abierto $W$.

**Teorema.** *Si $c : \Omega(X)^n \to \Omega(X)$ determina un conectivo sobre $X$ entonces* [*en la semántica de Kripke-Joyal extendida*] *$C(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ es equivalente en todos* *los haces sobre $X$ a la fórmula*

$$\bigvee_{\boldsymbol{S}\in\Omega(X)^n} \left\{\Box^{c(\boldsymbol{S})}\varphi_1 \wedge \left[\bigwedge_{i=1}^{n}(\varphi_i \leftrightarrow \Box^{S_i}\varphi_i)\right]\right\}. \tag{2}$$

De aquí se desprende que la familia $\{\wedge, \rightarrow, \neg, \bigvee^{\infty}, \Box^{W}\ (W \neq X, \varnothing)\}$ es funcionalmente completa para los conectivos del topos de haces sobre el espacio $X$.

En la siguiente sección de [CET], Caicedo caracteriza los conectivos en espacios topológicos linealmente ordenados y describe conjuntos de generadores para el caso finito y para un caso infinito enumerable, los números naturales. En la sección 7 estudia de manera completa la lógica de los haces sobre el espacio de Sierpiński, cuyo segmento dado por los conectivos corrientes es la lógica intuicionista trivalente. El autor exhibe todos los posibles conectivos, muestra que ellos se obtienen de los corrientes añadiendo solo un conectivo $N$ y luego da una axiomatización de la lógica trivalente enriquecida con $N$, es decir, de la lógica del espacio de Sierpiński. El conectivo $N$ en cuestión puede describirse mediante la siguiente tabla de verdad trivalente.

| $x$ | $Nx$ |
|---|---|
| $1$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{1}{2}$ | $1$ |
| $0$ | $1$ |

En las dos últimas secciones Caicedo introduce los conectivos invariantes y los globales. Estudia los primeros en los espacios ordenados usuales sobre los naturales y los reales mientras que con los segundos formula una interesante conjetura que permitiría caracterizar en términos topológicos los conectivos corrientes en esta lógica de haces.

## 3. Lógica de haces de estructuras

Como una digresión del problema de los conectivos nuevos, en esta sección se presenta la lógica de los haces como la desarrolla Caicedo en el magnífico artículo *Lógica de los haces de estructura* [LHE] —véase una descripción más detallada abajo—. Quizás este estudio no debe verse como un resultado directo de los trabajos discutidos en la sección anterior, pero sí es un trabajo paralelo que desarrolla más a fondo diversas ideas sugeridas en ellos.

El documento [LHE] inicia con una muy interesante reflexión de Caicedo sobre los fenómenos puntuales o instantáneos, razonamiento que conduce de manera inevitable a la conclusión siguiente: las descripciones de la lógica clásica y el análisis clásico no son de manera alguna satisfactorios. Su cavilación acerca de la frontera de las subregiones de una región cerrada en la que algunos puntos son blancos y otros negros, fue planteada cerca de cien años antes por el científico y filósofo norteamericano Charles S. Peirce [21, §4.127], en lo que constituye un caso asombroso e infrecuente de pasajes paralelos. De hecho Peirce propuso ideas muy generales acerca del continuo, entendiendo el continuo como concepto general y no como el modelo particular elaborado por Cantor. Aunque las concepciones peirceanas no han sido desarrolladas en detalle, ellas encuentran eco —seguro inconsciente— en varios notables trabajos de la lógica matemática del siglo XX [19, 24], entre ellas la lógica de los haces de Caicedo. Es muy posible que esta lógica juegue un papel importante en el desarrollo futuro de modelos alternativos para el continuo que también sean coherentes con el vasto ideario peirceano [25].

Entrando en materia Caicedo presenta la noción de un haz de estructuras de primer orden sobre un espacio topológico y luego desarrolla en detalle su lógica. En esencia se trata de la lógica inherente a cualquier topos, pero en la presentación el autor elude la maquinaria abstracta de la teoría de categorías y hace aparecer los conceptos de manera fluida y natural. Esta posición intermedia entre lo concreto y lo abstracto le trae importantes dividendos, por ejemplo además de la semántica de Kripke-Joyal —semántica local— el autor encuentra sin esfuerzo una semántica puntual con la siguiente característica fundamental: una fórmula vale en un punto del espacio si y solo si vale en toda una vecindad del mismo. La lógica de los haces sobre un espacio topológico fijo resulta ser una lógica intermedia entre la clásica y la lógica intuicionista de Heyting e incluye como casos particulares las lógicas estudiadas en [CET].

En el contexto de la lógica de los haces Caicedo introduce la noción de filtro genérico para un haz de estructuras, muestra que hay suficientes de tales filtros y con su ayuda construye un haz genérico a partir del haz dado. Ahora sin mayores dificultades se deriva el teorema del modelo genérico: una fórmula vale en el haz genérico si y solo si su interpretación de Gödel vale en la semántica local del haz original. Con justicia, el autor considera este resultado como el

*Teorema Fundamental de la Teoría de Modelos*, pues "tiene como corolarios inmediatos los teoremas fundamentales de la teoría de modelos clásica". Entre otros: el teorema de ultraproductos de Łoś [4]; la completitud de la lógica de primer orden [8]; el universo cumulativo de los conjuntos variables [15]; la omisión de tipos para segmentos de ciertas lógicas infinitarias [15].

El artículo [LHE] por supuesto abre muchas vías hacia investigaciones nuevas. Aquí vale la pena mencionar el trabajo de grado de Martínez [16] —dirigido por el profesor Fernando Zalamea— quien, empleando la semántica introducida en la tesis de Oostra [18], generaliza a ciertos topos de Grothendieck las nociones requeridas y el teorema del modelo genérico.

**Descripción de** [LHE]**.** Sigue una descripción más detallada del contenido del importante artículo *Lógica de los haces de estructuras* [LHE].

La primera sección consiste en una reflexión filosófica seria acerca de la inconveniencia de la lógica y el análisis clásicos para estudiar los objetos y acontecimientos, en la medida en que estos no son puntuales sino que aparecen extendidos en el espacio-tiempo. En la segunda sección el autor introduce como alternativa los haces: después de una revisión histórica, da la definición de haz como un homeomorfismo local cuyas fibras son estructuras de primer orden pegadas por las secciones. Por supuesto también recorre el camino para mostrar los haces como funtores.

En la tercera sección el autor presenta en propiedad la lógica de los haces. Tras una introducción histórica a la lógica de los topos sigue el desarrollo de la semántica puntual, definida de manera recurrente por una relación de forzamiento en un punto del espacio base y siendo las secciones los sujetos de las proposiciones. La validez de una fórmula en un punto equivale a su validez en todos los puntos de una vecindad del mismo, lo cual entraña la invalidez de las leyes clásicas del tercio excluso y de la doble negación. De manera muy natural, el forzamiento en puntos permite definir el forzamiento en abiertos, una semántica local que corresponde a la citada semántica de Kripke-Joyal. Además de una caracterización de la validez de fórmulas existenciales —validez en un abierto denso— el autor discute la validez de las fórmulas de la forma $\forall \boldsymbol{v}(\varphi \vee \neg\varphi)$.

En la cuarta sección de [LHE] Caicedo establece la conexión de la lógica de los haces con la lógica intuicionista. Para comenzar, además del recorrido histórico Brouwer-Heyting-Kripke el autor menciona la interpretación de Gödel y el teorema de Glivenko y da una presentación sucinta de los modelos de Kripke. En seguida observa que un modelo de estos puede verse como un haz de estructuras y establece la correspondencia precisa entre la semántica de Kripke y la semántica puntual de haces. Los dividendos son múltiples: por un lado, esto entraña que la lógica de los haces sobre un espacio fijo es intermedia entre la intuicionista y la clásica; por otra parte, esta conexión permite incluir el forzamiento de Robinson en la lógica de los haces. Luego Caicedo introduce la extensión veritativa de una fórmula, que determina una valuación topológica de las fórmulas en la álgebra de Heyting de los abiertos y a su vez le permite hacer referencia a sus trabajos anteriores [EEF] y [CET].

La quinta sección contiene el aporte más significativo del artículo [LHE]. Aunque el autor indica algunos antecedentes en la literatura, allí no hay un desarrollo unificado como el que hace aquí. Un filtro $\mathcal{F}$ del retículo de abiertos de un espacio topológico $X$ es *genérico* para un haz de estructuras $\mathfrak{A}$ si para cualquier fórmula de primer orden $\varphi$ y cualesquier secciones $\sigma_i$ definidas en un abierto $U \in \mathcal{F}$ se tiene lo siguiente.

(1) Existe $W \in \mathcal{F}$ con $\mathfrak{A} \underset{W}{\Vdash} \varphi[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ o $\mathfrak{A} \underset{W}{\Vdash} \neg\varphi[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$.

(2) Si $\mathfrak{A} \underset{U}{\Vdash} \exists x \varphi(x, \sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ entonces existe un abierto $W \in \mathcal{F}$ $(W \subseteq U)$ y existe una sección $\sigma$ definida en $W$ tales que $\mathfrak{A} \underset{W}{\Vdash} \varphi[\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_n]$.

Se observa a continuación que entre filtros de abiertos todos los maximales —para el orden de contenencia— son genéricos para cualquier haz de estructuras sobre el espacio base.

Si $\mathcal{F}$ es un filtro de abiertos sobre un espacio y $\mathfrak{A}$ un haz de estructuras sobre el mismo, se define la estructura $\mathfrak{A}[\mathcal{F}]$ como el límite directo de la familia $\{\mathfrak{A}(U)\}_{U \in \mathcal{F}}$ —considerando el haz $\mathfrak{A}$ como un funtor de secciones—. El siguiente es el resultado central de [LHE].

**Teorema** (Teorema del modelo genérico). *Si $\mathcal{F}$ es un filtro de abiertos sobre $X$ genérico para el haz $\mathfrak{A}$ entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) $\mathfrak{A}[\mathcal{F}] \models \varphi([\sigma_1], \ldots, [\sigma_n])$

b) *Existe* $U \in \mathcal{F}$ *tal que* $\mathfrak{A} \underset{U}{\Vdash} \varphi^G[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$

c) $\Big\{x \in X \;\Big|\; \mathfrak{A} \underset{x}{\Vdash} \varphi^G[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]\Big\} \in \mathcal{F}$

Entre las consecuencias derivadas de este teorema Caicedo cita los siguientes ejemplos.

(1) El teorema de Łoś para ultraproductos.
(2) La completitud de la lógica de primer orden.
(3) El universo cumulativo de los conjuntos variables.

En la última sección de [LHE] el autor indica que la semántica puntual de haces puede extenderse a $L_{\infty\omega}$ [4], lo cual permite probar completitud y omisión de tipos para fragmentos enumerables de esta lógica.

## 4. Conectivos nuevos en lógicas algebrizables

Volviendo al problema de los conectivos, recuérdese que en la lógica de los haces sobre un espacio topológico un conectivo puede verse como una operación en el conjunto de los abiertos del espacio. Resulta bastante natural generalizar esta idea y considerar, desde un punto de vista algebraico, operaciones nuevas en álgebras de Heyting. De hecho esta observación inició en el problema de los conectivos nuevos una segunda línea de trabajo, más dirigida al Álgebra Universal y en la cual los conectivos nuevos se definen implícitamente.

El primer trabajo en esta nueva etapa es el artículo *An algebraic approach to intuitionistic connectives* [AIC], de Caicedo y Cignoli. Este escrito se inicia con la siguiente caracterización de las operaciones en álgebras de Heyting que son compatibles con todas las congruencias.

**Lema.** *Las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier función* $f : H^n \to H$ *en una álgebra de Heyting* $H$*.*

a) *Para todo* $\boldsymbol{x} \in H^n$*,* $a \in H$

$$f(\boldsymbol{x}) \wedge a = f(\boldsymbol{x} \wedge a) \wedge a. \tag{3}$$

b) *Para todo* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H^n$

$$\bigwedge(\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y}) \leq f(\boldsymbol{x}) \leftrightarrow f(\boldsymbol{y})$$

c) $f$ *es una función compatible en* $H$

Esta propiedad permite expresar cualquier operación compatible en términos de las operaciones fundamentales de álgebra de Heyting. Nótese que esto generaliza varios hechos establecidos en [CET]: la ecuación (3) de arriba es la misma ecuación (1) —citada en la página 85— y la expresión (4) abajo es la misma expresión (2) —página 86—.

**Teorema.** *Sea $f : H^n \to H$ una función compatible en una álgebra de Heyting. Para cualquier subconjunto $S \subseteq H$ y cada $\boldsymbol{x} \in S^n$:*

$$f(\boldsymbol{x}) = \bigvee_{\boldsymbol{a} \in S^n} \left\{ f(\boldsymbol{a}) \wedge \left[ \bigwedge_{i=1}^{n} (x_i \leftrightarrow a_i) \right] \right\}. \tag{4}$$

Este hecho implica que las álgebras de Heyting constituyen una variedad localmente afín completa [11].

En seguida los autores definen que un conjunto de ecuaciones en el lenguaje de las álgebras de Heyting enriquecido con un símbolo $f$ define implícitamente una operación $f$ si en cada álgebra de Heyting $H$ existe a lo más una función $f_H$ que satisface las ecuaciones. Por el teorema de Beth [4] tal función es una fórmula de primer orden con términos en el lenguaje de las álgebras de Heyting, pero no necesariamente es un término como se ilustra con ejemplos interesantes. El siguiente es un resultado central de este escrito, enunciado allí como corolario.

**Teorema.** *Una operación compatible definida implícitamente por ecuaciones en álgebras de Heyting es definible explícitamente mediante un término de álgebras de Heyting si y solo si la clase de todas las álgebras donde existe es cerrada bajo subálgebras.*

Luego los autores exploran la definición implícita de conectivos desde el punto de vista sintáctico, como extensión del cálculo proposicional intuicionista añadiendo axiomas, y obtienen un teorema fuerte de completitud con la variedad generada por las ecuaciones correspondientes a los axiomas adicionales. Proponen una nueva definición de conectivo intuicionista nuevo y la confrontan con la de Gabbay [9], además estudian una gama de ejemplos que incluye los conectivos implícitos para la lógica intuicionista $n$-valuada, generalizando así el estudio de la lógica trivalente realizado en [CET].

En el trabajo *Implicit connectives of algebraizable logics* [ICA] Caicedo extiende las nociones y los resultados anteriores al contexto de las lógicas algebrizables en el sentido de Blok y Pigozzi [5]. La extensión de un sistema deductivo algebrizable mediante axiomas y reglas nuevas también es algebrizable, pero no puede decirse lo mismo de extensiones mediante conectivos nuevos: el autor muestra un ejemplo en el cual la lógica extendida no es algebrizable en manera alguna y otro en el cual la nueva lógica es algebrizable pero mediante sistemas de fórmulas de equivalencia y de ecuaciones definitorias esencialmente distintos a los originales.

Dado un sistema deductivo algebrizable $\mathcal{L}$, una extensión $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{L}$ mediante axiomas y reglas define implícitamente la familia $\mathcal{C}$ de conectivos nuevos si para cada $\nabla \in \mathcal{C}$ se tiene

$$\vdash_{\mathcal{L}(\mathcal{C})\cup\mathcal{L}(\mathcal{C}')} \nabla(\mathbf{p}) \leftrightarrow \nabla'(\mathbf{p}),$$

donde $\mathcal{C}'$ es una copia disyunta de $\mathcal{C}$. En primer lugar se tiene el siguiente hecho.

**Teorema.** *Una extensión $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ de un sistema deductivo algebrizable $\mathcal{L}$ que define implícitamente la familia de conectivos $\mathcal{C}$ es algebrizable mediante los mismos sistemas de fórmulas de equivalencia y de ecuaciones definitorias.*

La cuasivariedad correspondiente al sistema deductivo extendido consiste en las álgebras con operaciones añadidas que satisfacen las cuasiecuaciones correspondientes a las reglas adicionales. Estas operaciones no necesariamente existen en todas las álgebras pero, cuando existen, están determinadas de manera única. Cuando la extensión se hace solo por axiomas entonces las operaciones, cuando existen, son compatibles con todas las congruencias de la cuasivariedad original.

Dado un sistema deductivo algebrizable $\mathcal{L}$, un conectivo $\nabla$ definido implícitamente por una extensión $\mathcal{L}(\nabla)$ de $\mathcal{L}$ es definible explícitamente por una fórmula $\theta$ de $\mathcal{L}$ si

$$\vdash_{\mathcal{L}(\nabla)} \nabla(\mathbf{p}) \leftrightarrow \theta(\mathbf{p}), \qquad \text{es decir,} \qquad \models_{\mathsf{K}_{\mathcal{L}(\nabla)}} \nabla(\mathbf{p}) \approx \theta(\mathbf{p}).$$

Esto implica, claro, que el conectivo $\nabla$ es compatible. Caicedo precisa más:

**Teorema.** *Sea $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ una extensión esencialmente axiomática de un sistema deductivo algebrizable $\mathcal{L}$ que define implícitamente la familia de conectivos $\mathcal{C}$. Todos los conectivos $\nabla \in \mathcal{C}$ son definibles explícitamente por fórmulas de $\mathcal{L}$ si y solo si la clase de todas las álgebras de $\mathsf{K}_{\mathcal{L}}$ donde existen es cerrada bajo subálgebras.*

El artículo de Caicedo remata con un teorema que establece un par de condiciones suficientes sobre un sistema deductivo algebrizable $\mathcal{L}$ para que todo conectivo definido implícitamente por extensiones axiomáticas sea explícitamente definible. Este resultado generaliza conclusiones de [AIC] pues algunos casos estudiados allí satisfacen las condiciones requeridas.

## 5. Conectivos nuevos en variedades

Los trabajos reseñados en la sección anterior sugieren una cada vez mayor algebrización del problema de los conectivos nuevos. En un contexto algebraico puro —el del Álgebra Universal, por ejemplo— los conectivos son operaciones y la definición implícita de una operación nueva toma la forma siguiente. Aquí $\mathsf{K}$ es una clase de álgebras de tipo $\tau$ y $\nabla$ es un símbolo funcional de aridad $n$ que no aparece en $\tau$.

**Convención.** Sea $\mathcal{E}$ un conjunto de ecuaciones en $\tau \cup \{\nabla\}$. Se dice que $\mathcal{E}$ *define implícitamente* la operación $\nabla$ en $\mathsf{K}$ si en cada álgebra $\mathbf{A} \in \mathsf{K}$ existe a lo más una operación $\nabla^{\mathbf{A}} : A^n \longrightarrow A$ que satisface las ecuaciones de $\mathcal{E}$.

Obsérvese que *no* se exige que en todas las álgebras de $\mathsf{K}$ exista alguna operación que satisfaga $\mathcal{E}$.

En el contexto del Álgebra Universal, un conectivo es combinación de los conectivos corrientes —no es nuevo— cuando coincide con un término del lenguaje original. En la convención siguiente de nuevo no se exige que $\nabla$ esté interpretado en todas las álgebras de $\mathsf{K}$.

**Convención.** Sea $t$ un término en $\tau$. Se dice que $t$ *define explícitamente* la operación $\nabla$ si para cada álgebra $\mathbf{A} \in \mathsf{K}$ donde existe una operación $\nabla^{\mathbf{A}}$, ésta es igual a $t^{\mathbf{A}}$.

En estos términos, el problema de los conectivos nuevos consiste en establecer si todas las operaciones implícitas son explícitas, es decir, toma el aspecto de un *teorema de Beth algebraico*. Claro que pueden hacerse algunas precisiones. Por ejemplo, una operación definida explícitamente por un término es compatible con todas las congruencias de las álgebras donde se la considere, cosa que no siempre sucede con una operación implícita. Así, la versión algebraica del problema de los conectivos nuevos puede plantearse de la manera siguiente [20].

> *¿En cuáles variedades toda operación compatible definida implícitamente por ecuaciones está definida explícitamente por un término?*

El teorema cuyas versiones anteriores aparecen en [AIC] y en [ICA] es válido en este contexto donde toma la siguiente forma.

**Teorema.** *Una operación definida implícitamente por ecuaciones en una variedad está definida explícitamente por un término si y solo si es compatible y la clase de todas las álgebras donde existe es cerrada para subálgebras.*

El avance más reciente sobre el tema consiste en el estudio de variedades particulares. Se ha podido establecer una familia considerable de variedades en las que toda operación compatible implícita es explícita, es decir, variedades en las que no existen conectivos nuevos. En la búsqueda de caracterizaciones de las variedades o cuasivariedades con esta propiedad, es posible que de nuevo la teoría de categorías juegue un papel importante.

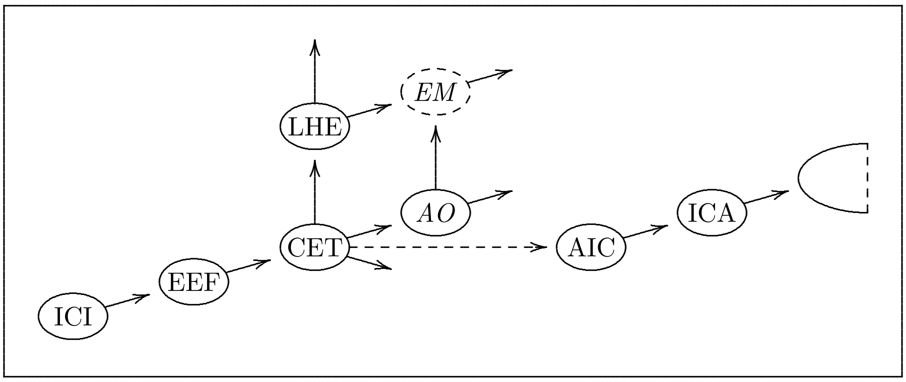
Por una parte, una variedad puede verse como una categoría. Las caracterizaciones categóricas de las variedades se remontan a la tesis de Lawvere [12], posteriormente se las ha presentado como mónadas o triplas [3, 14] y como las menos restrictivas categorías algebraicas [1]. En un artículo muy reciente de Adámek las variedades son categorías con colímites y cierto generador regular [2]. En cualquier caracterización que se escoja, una operación definida implícitamente por ecuaciones determina una subcategoría que —de acuerdo con el teorema enunciado— es cerrada para subobjetos según el conectivo es o no un término.

Por otro lado, a partir de sugerencias de István Németi se han encontrado caracterizaciones categóricas para la definición implícita y explícita de variables proposicionales nuevas. Un resultado en esta línea establece, por ejemplo, que una lógica algebrizable tiene la propiedad de definibilidad de Beth —todo conjunto de constantes definido implícitamente está definido explícitamente—

si y solo si en la correspondiente clase de álgebras todo epimorfismo es sobre [10]. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que este enfoque es del todo distinto al de Caicedo, pues por ejemplo el cálculo proposicional intuicionista tiene la propiedad de definibilidad de Beth en el sentido de Németi pero en este sistema deductivo no todo conectivo compatible implícito es un término.

## 6. Conclusión

El diagrama siguiente ilustra las relaciones entre los documentos revisados en este artículo así como los principales problemas abiertos. Los rótulos $AO$ y *EM* se refieren a los trabajos de Oostra [18] y Martínez [16]. Obsérvese la manera en que este diagrama pone en evidencia el potencial y la importancia del artículo [CET].




Se cierra esta revisión del problema de los conectivos nuevos con las palabras finales de Hilbert en su discurso de 1900, deseándole al profesor Xavier Caicedo que en el futuro encuentre muchos discípulos aplicados y entusiastas.

> *The organic unity of mathematics is inherent in the nature of this science, for mathematics is the foundation of all exact knowledge of natural phenomena. That it may completely fulfill this high mission, may the new century bring it gifted masters and many zealous and enthusiastic disciples!*

## Bibliografía

[EEF] Antonio Mario Sette e Xavier Caicedo, *Equivalência elementar entre feixes.* Memorias del IX SLALM (Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca). Notas de Lógica Matemática **38** (1993) 129–141.

[LHE] Xavier Caicedo, *Lógica de los haces de estructuras.* Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales **XIX**, 74 (1995) 569–585.

[ICI] Xavier Caicedo, *Investigaciones acerca de los conectivos intuicionistas.* Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales **XIX**, 75 (1995) 705–716.

[CET] Xavier Caicedo, *Conectivos intuicionistas sobre espacios topológicos.* Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales **XXI**, 81 (1997) 521–534.

[AIC] Xavier Caicedo and Roberto Cignoli, *An algebraic approach to intuitionistic connectives.* Journal of Symbolic Logic **66** (2001) 1620–1636.

[ICA] Xavier Caicedo, *Implicit connectives of algebraizable logics.* Studia Logica **78** (2004) 155–170.

[1] Jiří Adámek, Horst Herrlich and George E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories.* John Wiley & Sons, New York, 1990.

[2] Jiří Adámek, *On quasivarieties and varieties as categories.* Studia Logica **78** (2004) 7–33.

[3] Michael Barr and Charles Wells, *Toposes, Triples and Theories.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 278. Springer-Verlag, New York, 1985.

[4] John L. Bell and Alan B. Slomson, *Models and Ultraproducts: An introduction.* North-Holland, Amsterdam, 1971.

[5] Willem J. Blok and Don Pigozzi, *Algebraizable Logics.* Memoirs of the American Mathematical Society 396. AMS, Providence (Rhode Island), 1989.

[6] Xavier Caicedo, *Elementos de Lógica y Calculabilidad* (Segunda edición). Una Empresa Docente, Bogotá, 1990.

[7] Dirk van Dalen, *Logic and Structure* (Second edition). Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[8] Heinz-Dieter Ebbinghaus, Jörg Flum and Wolfgang Thomas, *Mathematical Logic* (Second edition). Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1994.

[9] Dov M. Gabbay, *Semantical Investigations in Heyting Intuitionistic Logic.* Reidel, Dordrecht, 1981.

[10] Eva Hoogland, *Algebraic characterizations of various Beth definability properties.* Preprint. Universiteit van Amsterdam, 1999.

[11] Kalle Kaarli and Alden F. Pixley, *Polynomial Completeness in Algebraic Systems.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2001.

[12] F. William Lawvere, *Functorial Semantics of Algebraic Theories.* Ph. D. Dissertation. Columbia University, 1963.

[13] Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic.* Springer-Verlag, New York, 1992.

[14] Ernest G. Manes, *Algebraic Theories.* Graduate texts in mathematics 26. Springer-Verlag, New York, 1976.

[15] David Marker, *Model Theory: An introduction.* Springer-Verlag, New York, 2002.

[16] Eyder Martínez, *Genericidad en Topos de Grothendieck.* Trabajo de Grado (Matemático). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2003.

[17] Arnold Oostra, *Conectivos en el topos de grafos dirigidos.* Boletín de Matemáticas - Nueva Serie **III** (1996) 55–62.

[18] Arnold Oostra, *Conectivos en Topos.* Tesis (Maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1997.

[19] Arnold Oostra, *Peirce y el Análisis: Una primera lectura de 'El Continuo Peirceano'.* Boletín de Matemáticas - Nueva Serie **XI** (2004) 19–30.

[20] Arnold Oostra, *Operaciones implícitas en variedades ecuacionales.* Proyecto de Tesis (Doctorado). Universidad Nacional, Bogotá, 2004.

[21] Charles S. Peirce, *Collected Papers of Charles Sanders Peirce.* Charles Hartshorne and Paul Weiss (Eds.), vols. 1–6. Harvard University Press, 1931–1934.

[22] Gonzalo E. Reyes, *Theorie des modèles et faisceaux.* Rapport No. 63. Institut de Mathématique Pure et Appliquée, Université Catholique de Louvain, Juin 1976.

[23] Barry R. Tennison, *Sheaf Theory.* London Mathematical Society Lecture Note Series 20. Cambridge University Press, Cambridge, 1975.

[24] Fernando Zalamea, *El Continuo Peirceano. Aspectos globales y locales de genericidad, reflexividad y modalidad: Una visión del continuo y la arquitectónica pragmática peirceana desde la lógica matemática del siglo XX.* Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Bogotá, 2001.

[25] Fernando Zalamea, *Peirce's logic of continuity: Existential graphs and non-cantorian continuum.* The Review of Modern Logic **9** (2003), 115–162.

Recibido: Septiembre de 2005. Aceptado para publicación: Noviembre de 2005