Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen XII No. 2 (2005), pp. 98–113

FUNCIONES CONTINUAS, ÓRBITAS Y CAOS EL TEOREMA DE SARKOVSKII

JUAN E. NÁPOLES VALDÉS (∗)

RESUMEN. En este trabajo se presentan algunas precisiones históricas de un tópico muy actual: El Caos, vía el Teorema de Sarkovskii. Al final del trabajo, se presentan algunas aplicaciones a la matemática escolar.

PALABRAS CLAVES. Caos, Teorema de Sarkovskii.

2000 MSC. Primary: 76F20, Secondary: 39B72.

ABSTRACT. In this work we present some historical precisions of a very present topic: The Chaos, via the Theorem of Sarkovski. At the end of the work, some applications to the scholar mathematical are displayed.

KEY WORDS AND PHRASES. Chaos, Theorem of Sarkovskii.

"Y después de leerlo lo he vuelto a doblar simétricamente.
No lo he tirado al suelo como acaba de hacer usted,
con una lamentable falta de orden y de método"

*Hércules Poirot a su amigo Hastings en **"El Rey de Trébol"***

1. PRELIMINARES.

En el estudio de un fenómeno, científicamente hablando, éste es observado, sus detalles son minuciosamente descritos con el auxilio de las Matemáticas y se buscan ecuaciones que lo representen. Pasamos entonces, de lo real a un modelo matemático.

(∗) Juan E. Nápoles Valdés. Universidad de la Cuenca del Plata. Lavalle 50, (3400) Corrientes, Argentina. E-mail: idic@ucp.edu.ar jnapoles@frre.utn.edu.ar
UTN-FRR, French 414, (3500) Resistencia, Chaco, Argentina.

Este modelo, en el cual se expresa la evolución del fenómeno en el tiempo, es un Sistema Dinámico. Podemos decir también, que un Sistema Dinámico es un sistema físico que varía con el tiempo. Se puede pensar en un sistema dinámico, como una forma de describir la evolución temporal de todos los puntos de un espacio E. Este espacio E puede ser, por ejemplo, el espacio de los estados de un sistema físico o biológico.

Una manera simple de crear un sistema dinámico en Matemática, consiste en "permitir" que una función continua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, se retroalimente en el tiempo, es decir, cuando la función f es vista como la evolución de los puntos de $\mathbb{R}$ en una unidad de tiempo discreto. Podemos decirlo también, cuando componemos la función consigo misma de manera iterada. Si denotamos por $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$ la n-ésima iterada, a la sucesión de sus iteradas, la llamaremos *la órbita* de x, denotada por

$$O(x) = \{x, f^1(x),\ f^2(x), ...,\ f^n(x), ...\}.$$

Estudiar la dinámica del sistema es, entre otras cosas, estudiar el comportamiento final -asintótico- de las órbitas.

En particular puede suceder, que la órbita del punto $x = a$ sea *periódica*, o sea, que consista de los mismos puntos repetidos periódicamente; en otros términos, existe k tal que $f^k(a) = a$, para $k \in \mathbb{N}$ y $f^i(a) \neq a$ para todo $0 < i < k$. En este caso, diremos que a es un punto periódico con período k y que $\{a,\ f^1(a),\ f^2(a), ...,\ f^n(a), ...\}$ es su órbita periódica. Diremos entonces que a es un punto periódico con período k y órbita $\{a,\ f^1(a),\ f^2(a), ...,\ f^{k-1}(a)\}$.

Una pregunta natural es *si f tiene un punto con período k, ¿ puede esperarse que f tenga otros puntos con períodos m para $k \neq m$?, ¿Puede tenerse alguna relación entre los períodos, que implique su existencia?*

Las respuestas a estas preguntas no son triviales, ya que si f tiene un punto a con período $k > 1$, entonces se puede garantizar que f tiene por lo menos un punto fijo, es decir, un punto de período 1. Ahora bien, para los demás períodos, ¿qué podemos concluir?

En 1975, fue publicado un artículo de los matemáticos norteamericanos Tien-Yien Li y James A. Yorke (ver [8]) donde apareció la "primera" respuesta a estas interrogantes y la respuesta involucraba un nuevo término matemático *el caos*. En nuestro trabajo, consideraremos caos, en el sentido de sistema caótico definido más adelante[1]. Volviendo al trabajo de Li y Yorke, podemos resumirlo diciendo que ellos demostraron que si una función continua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un punto de período 3, entonces tenía puntos periódicos para cada uno de los períodos n, siendo $n \in \mathbb{N}$. Claramente, el comportamiento de f era complejo, algo caótico, pues todo se podía esperar de sus órbitas. El título de este artículo **"Period Three Implies Chaos"** es, sin embargo, un engaño,

[1]Es útil consultar la referencia [10] para distintas precisiones del término y sus repercusiones en la matemática universitaria.

por ejemplo, en la Aplicación Logística (ver ecuación (3) más adelante) con parámetro en el rango $1 + \sqrt{8} \approx 3.8284 < a < 3.8415...$ existe una órbita de período tres atractiva, cada una de las otras órbitas que garantiza el Teorema de Sarkovskii son repulsivas y consecuentemente, y por lo tanto no visto, a menos que comencemos exactamente en él o un punto preperiódico a él, un acontecimiento inverosímil. Muchos puntos (muchos, en términos técnicos) son asintóticos a la órbita de período tres. No sería apropiado (o debemos corregir entonces nuestra definición del caos) llamar el mapa logístico en estos valores de parámetro "caótico", pues las órbitas periódicas no son densas en el intervalo. Straffin demostró más adelante, y de una manera elegante en [18], que si una función f tiene un punto periódico con período impar $k > 1$, entonces debe tener puntos periódicos para todos los períodos mayores o iguales a $k - 1$. La elegancia de este trabajo radica en la relación que estableció el autor entre la teoría de grafos dirigidos -digrafos- con la dinámica de la órbita. A cada punto periódico le asoció un digrafo cuyos vértices eran los puntos de la órbita, de tal manera, que el grafo organizaba la información que conllevaba la órbita; sin embargo, no todo digrafo puede ser el grafo asociado de un punto periódico. Es más, todavía no se ha determinado bajo qué condiciones, esto es cierto.
Sin embargo, poco después se descubrió que estos resultados eran casos particulares de un resultado de 1964 del matemático soviético A. N. Sarkovskii (cf. [15]), que había permanecido ignorado para la comunidad matemática durante más de 15 años y en el cual se da una respuesta completa a las interrogantes arriba enunciadas. Existen innumerables trabajos dedicados al resultado de Li y Yorke (o resultados relacionados con éste, ver [12]), incluso el título del mismo *"Período tres implica caos"*, se convirtió en una de las frases más usadas en los estudios del caos. Sin embargo, el aún no traducido trabajo de Sarkovskii, sigue desconocido para muchos matemáticos (ver [13] y [14] para trabajos introductorios al tema), en particular debido a los métodos de demostración empleados. En nuestro trabajo, queremos presentar un bosquejo de la demostración original de Sarkovskii, las técnicas que usó (otra demostración breve y elegante, fue dada por Ho y Morris [6], siguiendo las ideas de Straffin), profundizar sobre la relación de este teorema (que como veremos, es la conclusión de varios trabajos anteriores) y el caos, y mostrar algunas aplicaciones de este resultado a la resolución de ecuaciones funcionales, un tópico que es más escaso aún en la literatura. Todo esto, con un enfoque histórico.

2. El Teorema de Sarkovskii.

El trabajo de Sarkovskii, que tiene sus antecedentes en dos trabajos del mismo autor (Uspeiji Matematicheskii Nauk, T.XII, No.4, 1960 y Doklady Akad. Nauk URSS, T.189, No.5, 1961), es uno de una serie de artículos relacionados con funciones que transforman un intervalo en sí mismo y cómo podemos caracterizar esa transformación por un conjunto de puntos bien determinados.

Sabemos que toda función continua de variable real $f(x)$, $-\infty < x < +\infty$, genera una transformación continua T de la recta en sí misma: $x \longmapsto f(x)$. Resulta, que las propiedades de la transformación T (y, por tanto, de la función f) quedan definidas por la estructura básica del conjunto de puntos fijos de la transformación T. Recordemos, que el punto a se llama *punto fijo de orden* k de la transformación T, si $T^k a = a$ y $T^j a \neq a$ $(i \leq j < k)$. Los puntos Ta, $T^2 a, ...,$ $T^{k-1}a$ resultan también puntos fijos de orden k y junto al punto a, conforman un *ciclo de orden* k (que no es más que la órbita de a, según mencionamos al inicio).

En el trabajo de Sarkovskii se investiga el problema acerca de la dependencia entre la existencia de ciclos de diferentes órdenes y sus principales resultados son enunciados con ayuda del siguiente hecho. Consideremos el conjunto de los números naturales en el que se introduce la relación n_1 *precede a* n_2 $(n_1 < n_2)$, si para cualquier transformación continua de la recta en sí misma, la existencia de un ciclo de orden n_1 implica la existencia de un ciclo de orden n_2.

Los enteros positivos, se enumeran usualmente en orden creciente 1, 2, 3, 4,... Sin embargo, consideremos una enumeración alternativa, que refleje el orden en el cual una sucesión de órbitas de período n se crea. Por ejemplo, podemos listar la sucesión de enteros de la forma 2^n como

$$2^n < ... < 2^4 \quad < 2^3 < 2^2 \quad < 2^1 \quad < 2^0,$$

donde el símbolo $<$ significa *"implique"*. En la aplicación logística que veremos más adelante, este ordenamiento dice que la existencia de una órbita de período 2^n implica la existencia de todas las órbitas de período 2^i (para $i < n$ en el orden usual), así una órbita de período 8, implica la existencia de órbitas de período 4 y 2. Lamentablemente, este ordenamiento no dice nada con respecto a la estabilidad de dichas órbitas, ni nos dice de un período dado, cuántas órbitas periódicas existen.

Volvamos a la relación general, $n_1 < n_2$ presentada más arriba. No es difícil probar que tal relación cumple con las propiedades reflexiva y transitiva, y por tanto, el conjunto $\mathbb{N}$ con esta relación representa un conjunto ordenado de la manera siguiente (en realidad, Sarkovskii usa el término *cuasiordenado*, siguiendo la terminología de G. Birkhoff en su *"Theory of Structures"*):

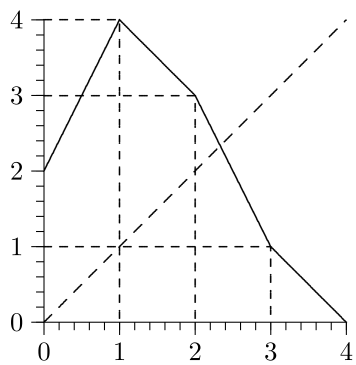
$$\begin{aligned} 3 < 5 < 7 < 9 < 11 < ... < 3.2 < 5.2 < ... < 3.2^2 < \\ 5.2^2 < ... < 2^3 < 2^2 < 2 < 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Sobre esta base concluyó:

Teorema. Si una función continua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un punto periódico con período k, entonces también tiene un punto con período n, para cada $k < n$ (en (1)).

Notemos que el teorema es un resultado unidimensional en el sentido que no hay un resultado análogo para dimensiones mayores, ni siquiera en el mismo círculo (ver [10] y [16] para comentarios y observaciones de este resultado). Algunas generalizaciones de este resultado son las de Schirmer [15], quien demostró una versión del teorema para espacios topológicos linealmente ordenados y conexos. Los espacios que satisfacen el teorema, se conocen como *Espacios de Sarkovskii*, según [1].

Este teorema es *óptimo* (el mejor posible) en el sentido que para cada n, existe una aplicación continua f de un intervalo compacto en sí mismo, que tiene un punto periódico de período n pero que no tiene puntos periódicos de período m, para cualquier $m > n$ en el orden (1). Se puede agregar también que existe una aplicación continua f con puntos periódicos de período 2^d para cada $d \geq 0$, pero no tiene puntos periódicos con otros períodos. De aquí que, en particular, una función que presenta un punto x periódico de orden tres, es decir, tal que $f \circ f \circ f(x) = f^3(x) = x$, donde $\circ$ es la composición de las funciones, entonces presentará puntos periódicos de cualquier orden $f^{\,n}(y) = f \circ f \circ f ... \circ f(y) = y$. Se dice entonces, que *el período tres implica el caos*, y esta propiedad es fundamental en la teoría de los sistemas dinámicos. Como dijimos, este corolario recibe el nombre de Teorema de Li y Yorke, quienes redescubrieron parte del teorema de Sarkovskii[2].



Por ejemplo, la función de la gráfica, tiene un 5-período formado por los puntos {0, 1, 2, 3, 4}. Por otra parte, analizando la imagen de los 4 intervalos [0,1], [1,2], [2,3] y [3,4] por f^3 se puede ver que de existir un 3-período habría de estar contenido en [2,3], pero f^3 es decreciente en este intervalo y sólo podría haber un único punto 3-periódico (pero son necesarios 3).

El resultado de Sarkovskii, se apoya en el hecho que $\mathbb{R}$ es totalmente ordenado y unidimensional, así no se aplica a los números complejos, la función $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^{2i\pi/3}z$ es tal que todos los puntos del plano son periódicos de orden 3, pero de ningún otro orden (excepto 0 que es de orden 1) - f es una rotación de ángulo 120 grados o $2\pi/3$ radianes y no existen equivalentes de las rotaciones en una dimensión. Por otra parte, este teorema es notable por su *"falta"* de hipótesis (sólo asume que f es continua).

En el Teorema de Sarkovskii, si una función tiene un punto con período k, donde k no es una potencia de 2, entonces posee infinitos puntos periódicos

[2]En muchas referencias se habla del ruso Sarkovskii, cuando en realidad él es ucraniano. Por la fecha de sus trabajos, sería más preciso decir, soviético.

con infinitos períodos distintos. A una función con esta propiedad, Block y Coppel [3] siguiendo a Devaney [4], la llaman *función caótica*. La aplicación $F : M \longrightarrow M$, donde M es un espacio métrico, se llama *caótica* si se cumplen las siguientes condiciones:

(1) F depende de las condiciones iniciales.
(2) F es topológicamente transitiva.
(3) Los puntos periódicos de F son densos en M.

Ejemplo 1.
La función $f_{-2}(x) = x^2 - 2$ es caótica (usemos f por comodidad).
Sean $h(x) = 2x,\ q(x) = 2x^2 - 1$, así tenemos que $f \circ h(x) = h \circ q(x)$. Tomemos ahora a $g(\theta) = \cos\theta$ y $p(\theta) = 2\theta$, es claro que $q \circ g(\theta) = g \circ p(\theta)$. Luego, tenemos el gráfico de la derecha y vemos que f posee un número denso de repulsores periódicos en [-2, 2]

$$\begin{tikzcd}
[-2,2] \arrow[r, "f"] & [-2,2] \\
[-1,1] \arrow[u, "k"] \arrow[r, "q"] & [-1,1] \arrow[u, "k"'] \\
S^1 \arrow[u, "g"] \arrow[r, "p"'] & S^1 \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

Un buen ejemplo de un sistema caótico[3], es el de la *ecuación logística* (Pierre F. Verhulst, 1804-1849), sobre la que hablaremos más adelante. De más está decir, que existen varias definiciones de caos, desde las que utilizan la *entropía positiva de Kolmogorov-Sinaj*, hasta la dada por Devaney en [4].
Es necesario añadir, con respecto a las condiciones de caoticidad antes expuestas, que Banks y otros (ver [2]) probaron que las propiedades (2) y (3), implican la propiedad (1). Además, Vellekoop y Benglund (ver [19]), demostraron más adelante que, si f es continua y $X \subset \mathbb{R}$ es un intervalo (no necesariamente finito), entonces (2) implica (1) y (3).
Por otra parte, debemos decir que Lasota y Jorke (en [7]) sugirieron la noción de *turbulencia*, para caracterizar con más detalles las órbitas periódicas y no periódicas. Así, una función $f : I \longrightarrow I$, siendo I un intervalo real no degenerado, se dice turbulenta, si existen subintervalos compactos, J y K, con a lo sumo un punto en común, tales que $J \cup K \subseteq f(J) \cap f(K)$.
De más está decir, que los siguientes resultados no eran tan obvios:

(1) Si f es turbulenta, f tiene puntos periódicos de todos los períodos.
(2) f es caótica (para n distinto de 2^k), si y sólo si, f^n es turbulenta.

[3]Bajo este nombre, se engloban aquellos sistemas que químicos, biólogos, matemáticos, físicos, etc. han encontrado que tienen un comportamiento inusual y patrones de evolución inesperados y que son así considerados, bajo un amplio techo común.

En nuestra exposición, necesitamos los siguientes resultados obtenidos por Sarkovskii, que serán presentados, manteniendo la notación de éste.

Teorema 1. *Si la transformación T posee un ciclo de orden $k > 2$, entonces T también admite un ciclo de segundo orden*[4].

Demostración. Sean α_1, α_2, ..., α_k los puntos del ciclo, teniéndose que $T\alpha_i = \alpha_{i+1}$, $i = 1, 2, ..., k-1$, $T\alpha_k = \alpha_1$. Sean $\alpha_1 < \alpha_i$ $(i \neq 1)$, $\alpha_r > \alpha_i$ $(i \neq r)$. Consideremos el intervalo (α_1, α_{r-1}) (suponemos que $r > 2$; si $r = 2$, hay que tomar el intervalo $(\alpha_k,\ \alpha_r)$). Dependiendo de si existen o no en $(\alpha_1,\ \alpha_{r-1})$ puntos fijos de primer orden; denotaremos mediante β ya sea al punto fijo de primer orden más cercano a α_{r-1}, o bien al punto α_1 (si en $(\alpha_1,\ \alpha_{r-1})$ hay puntos fijos de primer orden, el punto fijo más cercano a α_{r-1}, existe debido a la continuidad de T). Puesto que $T\alpha_{r-1} = \alpha_r > \alpha_{r-1}$, entonces $Tx > x$, para $x \in (\beta,\ \alpha_{r-1}]$. Si β es un punto fijo de primer orden, entonces, como no es difícil ver, para cualquier entero $j > 0$ existe una vecindad del punto β, tal que para cualquier $x > \beta$, de esta vecindad, se tiene que $T^j x > x$. Si $\beta = \alpha_1$ tendremos para las $0 < j < k$ que $T^j\beta = \alpha_{j+1} > \alpha_1 = \beta$. Por otro lado, $T^{k-r+2}\alpha_{r-1} = \alpha_1 < \alpha_{r-1}$. Por lo tanto, sobre el intervalo $(\beta,\ \alpha_{r-1})$ existirá un γ, debido a la continuidad de T, tal que $T^{k-r+2}\gamma = \gamma$. Puesto que $T\gamma \neq \gamma$, entonces γ es un punto fijo de orden l, donde $1 < l \leq k - r + 2 < k$, pero mayor que 1, también siempre existirá un punto fijo de segundo orden. $\square$

Los siguientes resultados, serán utilizados más adelante.

Lema 1. *Si $T^p\alpha = \alpha$ y el punto α es un punto fijo de orden k de la transformación T, entonces p es múltiplo de k.*

En efecto, si α es un punto fijo de orden k, tendremos que $T^k\alpha = \alpha$, $T^j\alpha = \alpha$ $(j < k)$. Sea $p = ks + r$ $(r < k)$. Si suponemos que $r \neq 0$, entonces $T^r\alpha = \alpha$, y

$$T^p\alpha = T^r \underbrace{T^k ... T^k}_{s\ veces} \alpha \neq \alpha.$$

Lema 2. *Si la transformación T tiene a α como un punto fijo de orden $k = 2^n l$, donde l es impar, entonces la transformación $S = T^{2^m}$ tiene al punto α como*

[4]Este resultado se remonta al trabajo de 1960, pero en [12] se da una demostración más precisa.

punto fijo de orden

$$q = \begin{cases} 2^{n-m}l, & si\ n \geq m \\ l, & si\ n < m \end{cases}$$

Demostración. Por el Lema 1., $T^p\alpha = \alpha$, sólo para $p = ki$ $(i = 1, 2, ...)$. Suponiendo que α es un punto fijo de la transformación S, hallamos su orden q. En este caso $S^q\alpha = \alpha$, $S^j\alpha \neq \alpha$ $(1 \leq j < q)$.
Dado que $S^q = T^{2^m q}$, tendremos que $S^q\alpha = \alpha$ si y solo si $2^m q = ki$, donde i es un número natural. De aquí que $q = \frac{k}{2^m}i$. El valor buscado de q corresponde al menor valor de i para el cual el segundo término de la última expresión sea un entero. Así, no es difícil obtener que, para $n \geq m$, $i = 1$ y, por tanto, $q = 2^{n-m}l$, $n < m$, $i = 2^{m-n}$, esto es, $q = l$. □

Corolario 1. *Bajo las hipótesis del Lema 2, si $l > 1$, el punto fijo α, de la transformación S, tiene orden mayor que dos.*

Lema 3. *El punto α resulta ser un punto fijo de orden 2^m de la transformación T si y sólo si $T^{2^m}\alpha = \alpha$ y $T^{2^{m-1}}\alpha \neq \alpha$.*

Demostración. Siendo la necesidad evidente, la suficiencia se obtiene del siguiente modo. Si $T^{2^m}\alpha = \alpha$, α puede ser un punto fijo de orden 2^j $(j = 0, 1, ..., m)$, por el Lema 1. Dado que $T^{2^{m-1}}\alpha \neq \alpha$, entonces también $T^{2^j}\alpha \neq \alpha$ para cualquier $j < m - 1$, ya que

$$T^{2^{m-1}} = T^{2^j}\underbrace{(T^{2^j}...T^{2^j})}_{2^{m-j-1}\ veces}...$$

Es así que α resulta ser un punto fijo de orden 2^m. □

Teorema 2. *Si la transformación T tiene un ciclo de orden 2^n $(n > 1)$ entonces la transformación T tiene ciclos de orden 2^i $(i = 1, 2, ..., n-1)$*[5].

Demostración. Supongamos que la transformación T tiene un punto fijo α de orden $2^m l$. Demostremos que T posee un punto fijo de orden $2^m (1 \leq m < n)$. Hagamos $T^{2^{m-1}} = S$.
Por el Lema 1, el punto α de la transformación S es un punto fijo de orden $q = 2^{n-m+1}$, o sea, mayor que dos. Por el Teorema 1, la transformación S

[5]Resultado de 1961.

tiene un punto fijo de segundo orden, o sea, $S^2\beta = \beta$, $S\beta \neq \beta$. Por lo tanto, en virtud del Lema 2 tenemos

$$T^{2^m}\beta = \beta \qquad y \qquad T^{2^{m-j}}\beta \neq \beta.$$

□

De la misma forma, se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 3. *Si la transformación T tiene un ciclo de orden k, siendo k distinta de las potencias de 2, entonces la transformación T posee ciclos de orden* 2^i $(i = 1, 2, ...)$[6].

Demostración. Sea un punto fijo de orden k. Debemos demostrar que la transformación T admite un punto fijo β de orden 2^m, donde $m \geq 1$. Hagamos $T^{2^{m-1}} = S$. Por el Corolario del Lema 2, el punto α es un punto fijo de orden mayor que 2 para la transformación S. Del Teorema 1, para la transformación S existe un punto fijo β de segundo orden. Es así que $S^2\beta = \beta$, y $S\beta \neq \beta$, esto es $T^{2^m}\beta = \beta$, y $T^{2^{m-1}}\beta \neq \beta$. □

De este resultado se sigue que existen transformaciones con ciclos de orden arbitrariamente grandes, puesto que una transformación que tenga un ciclo de determinado orden, en particular distinto de las potencias de 2, siempre es fácil de construir. El Teorema 3 también muestra que es suficiente con fijar el valor de la función $f(x)$, definida por la transformación T en un número finito de puntos (generadores del ciclo), por ejemplo en 3 puntos y entonces existirán infinitos ciclos independientes de cómo variemos (continuamente) el valor de $f(x)$ en el resto de los puntos de la recta.
Consideremos el conjunto de puntos fijos que generan un ciclo. Sean los puntos α_1, $\alpha_2 = T\alpha_1$, $\ldots$, $\alpha_k = T\alpha_{k-1}$ que forman un ciclo de orden k. Dividamos a los puntos del ciclo en dos conjuntos M_1 y M_2, tales que $\alpha_i \in M_1$ si $\alpha_i < T\alpha_i$ y $\alpha_i \in M_2$, si $\alpha_i > T\alpha_i$. Definamos $\alpha^{M_1} = \max_{\alpha_i \in M_1} \alpha$ y $\alpha_{M_2} = \min_{\alpha_i \in M_2} \alpha$.
Los siguientes resultados son cruciales más adelante.

Lema 4. *Si $\alpha^{M_1} > \alpha_{M_2}$ entonces la transformación T posee ciclos de cualquier orden.*

Lema 5. *Si $\alpha^{M_1} < \alpha_{M_2}$ y existe un punto $\alpha \in M_1$ tal que $T\alpha \in M_1$, entonces la transformación T admite ciclos de órdenes impares, mayores que k y de todos los órdenes pares.*

[6] Éste también es un resultado de 1961.

Este resultado sigue siendo válido si $\alpha \in M_1$ y $T\alpha \in M_2$.

Lema 6. *Si la transformación T tiene un ciclo de orden impar, entonces también posee ciclos de cualquier orden par.*

Debido a estos resultados, se tiene el siguiente:

Teorema 4. *Si la transformación T tiene un ciclo de orden impar k, también tendrá ciclos de orden impar mayor que k y de todos los órdenes pares.*

Este resultado no puede mejorarse en el sentido que existen transformaciones T, que tienen un ciclo de orden $(2m+1)$, pero que no tienen ciclos de orden $2j-1$ $(j = 2, 3, ..., m)$.
Por otro lado, este teorema puede generalizarse al caso cuando existan, para la transformación T, ciclos de todos los órdenes distintos de las potencias de 2.

Teorema 5. *Si la transformación T tiene un ciclo de orden $k = 2^n l$, con $l > 1$ impar, entonces T admite ciclos de orden $2^n r$, con $r > l$ cualquier número impar, y también ciclos de orden $2^{n+1}s$, donde s es un número natural arbitrario.*

Procedamos por inducción sobre la transformación T. Si $n = 0$, obtenemos el Teorema 4. Supongamos cierta la afirmación del teorema para $n = m-1$ y demostrémoslo para $n = m$. Supongamos que la transformación T tiene un punto fijo de orden $2^m l$. Demostremos, por ejemplo, que en este caso T tiene también un punto fijo de orden $2^m r_0$, con $r_0 > l$ impar. Para la transformación $S = T^2$ el punto α es un punto fijo de orden $2^{m-1}l$ (Lema 1) así, de acuerdo con la suposición hecha, la transformación T debe tener un punto fijo β de orden $2^{m-1}r_0$. Esto significa que $T^{2^{m-1}r_0}\beta = \beta$, $S^j\beta \neq \beta$ $(j = 1, 2, 3, ..., 2^{m-1}r_0 - 1)$, es decir $T^{2^m r_0}\beta = \beta$ y $T^i\beta \neq \beta$ para cualquier i par, menor que $2^m r_0$; $T\beta \neq \beta$ ya que en caso contrario sería $S\beta = \beta$. Es así que el punto β es un punto fijo de orden $2^m r_0$ para T. En forma completamente análoga, se demuestra que T también admite puntos fijos de orden $2^{m+1}s$, donde s es un número natural cualquiera. En consecuencia, la afirmación del Teorema 5 es cierta para cualquier n.
Los Teoremas 2, 3 y 5 y el hecho que siempre existe un punto fijo de primer orden, si se tienen puntos fijos de orden mayor que 1, pueden ser unidos en un solo teorema.

Teorema 6. *Si la transformación T tiene ciclos de orden* 2^n, $(n > 0)$, *entonces T admite también ciclos de orden2^i $(i = 0, \ldots, n-1)$. Si la transformación T admite ciclos de orden $2^n(2m+1)$ con $n \geq 0$ y $m > 0$, entonces T*

tiene también ciclos de orden 2^i $(i = 0, \ldots, n)$ *y* $2^n(2r+1)$, *para* $r = m+1$, $m+2, ..., 2s$ *con* $s = 1, 2, 3, ...$

Este teorema resuelve completamente el problema de existencia de ciclos de ciertos órdenes, en función de la existencia de ciclos de otros órdenes. Por tanto, este resultado demuestra el teorema enunciado al principio de esta sección.
Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \ \alpha_k$ los puntos de un ciclo dado de orden k y sean $\alpha = \min\limits_i \ \alpha_i$ y $b = \max\limits_i \ \alpha_i$. Debemos observar el Teorema 6 se refiere sólo a los puntos del intervalo $[a, b]$, fuera de éste, es posible que la transformación no tenga ningún punto del ciclo.
Un teorema similar a los teoremas 1-6, es el siguiente.

Teorema 7. *Entre cualesquiera dos puntos, del ciclo de orden* $k > 1$, *se encuentra al menos un punto del ciclo de orden* $l < k$.

Demostración. Supongamos que $\alpha > \beta$ son puntos del ciclo de orden k y sean n_α, n_β las cantidades de puntos de este ciclo menores, respectivamente, que los puntos α y β. Evidentemente $k > n_\alpha > n_\beta \geq 0$. Existen n_α enteros positivos distintos S_i $(i = 1, 2, ..., n_\alpha)$ que k y tales que $T^{S_i}\alpha < \alpha$. Dado que $n_\alpha > n_\beta$ existe S_{i_0} $(1 \leq i_0 \leq n_\alpha)$ tal que $T^{S_{i_0}}\alpha < \alpha$ y $T^{S_{i_0}}\beta > \beta$. Y esto significa que existe un punto $\gamma \in (\beta, \alpha)$ para el que $T^{S_{i_0}}\gamma = \gamma$; por lo que γ es un punto del ciclo de orden $\mathrm{l} \leq S_{i_0} < k$. □

Lo interesante de los resultados de Sarkovskii, y es a lo que vamos a referirnos ahora, es que estos pueden ser extendidos al lenguaje de soluciones periódicas de la ecuación funcional[7]:

$$y(x+1) = f(y(x)), \tag{2}$$

donde se toma una sucesión discreta de valores. Por ejemplo, si la transformación de la recta en sí misma $y \longmapsto f(y)$, es continua, tendremos el siguiente:

Teorema 8. *Si la transformación* T *es continua, entonces las siguientes afirmaciones son válidas:*

i) *si la ecuación funcional* (2) *tiene soluciones periódicas con período* k, *entonces dicha ecuación tiene soluciones periódicas de cualquier período posterior en* (1) *a* k,

[7]Este resultado es enunciado en el trabajo fundamental de Sarkovskii, aunque pueden consultar mayores detalles de esta ecuación en www.uv.es/∼diaz/mn/node24.html

ii) *si la ecuación funcional* (2) *no tiene soluciones periódicas con período k, entonces tal ecuación no tiene soluciones periódicas de ningún período que preceda a k en* (1).

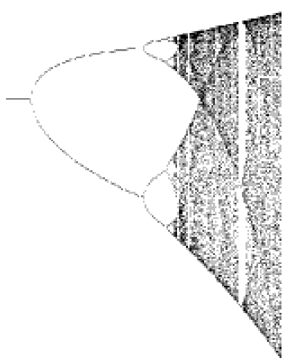
Ilustremos la anterior afirmación. Tal vez el ejemplo más simple de sistema no lineal sea la ecuación logística:

$$x_{n+1} = \alpha . x_n \ (1 - x_n), \tag{3}$$

donde x_n representa la población del año n, con relación a una población de referencia inicial x_0, x_{n+1} es entonces la población del año siguiente y a, es la tasa de crecimiento de dicha población. Esta ecuación aparece de manera natural en el estudio de la evolución de poblaciones biológicas (ver [9]). En particular, (3) se ha mostrado muy útil en el estudio de la evolución anual de la población de ciertas mariposas del nordeste de los EEUU, que exhiben fluctuaciones imprevisibles de un año a otro.

Queremos examinar un comportamiento a largo plazo de la población x_n. Para mantener la población en el intervalo [0,1] limitaremos α entre 0 y 4 (es fácil ver que sí α >4 y x_n=1/2 tenemos x_{n+1} >1).

Tomemos $1 < \alpha < 3$. Tomando cualquier población inicial $x_0 \in (0, 1)$, la población se aproxima a un valor constante no nulo $x^* = 1 - 1/\alpha$.



De nuestros preliminares se tiene que x^* es un punto fijo de orden 1, en este caso no existen soluciones periódicas de ningún período. *A medida que α crece de 3 a 4 existen grandes variaciones en la estructura del sistema.* Primeramente, el punto fijo se torna inestable y la población converge a un estado de equilibrio donde se alterna entre dos valores, es decir, se tiene una órbita de período 2. Para $\alpha = 3,2$ la población oscila entre $x_n = 0,5$ y $x_n = 0,8$.

Para valores mayores, por ejemplo para $\alpha = 3,5$, el período se torna inestable y es sustituido por una solución periódica de período 4.
A medida que α crece, la población converge a ciclos de período 8, 16, 32, 64,...

Este es el fenómeno de *duplicación de los períodos*, que no es más que el orden de (1), pero invertido.
Quisiéramos añadir que para $\alpha \approx 3{,}83$, existe un ciclo estable de tres elementos que se llama *Ventana de Periodicidad*. Para los valores de α entre 3 y 4, existe un número numerable de ventanas, pero existe un infinito no numerable de valores de α, para los cuales el modelo es caótico.
El análisis del comportamiento del sistema (3) para los restantes valores de α, puede ser completado recurriendo a [5], [13] y [14].
Resumiendo los resultados experimentales para $\alpha \geq 3$ en una tabla se tiene:

n	α	Incremento en α	Cociente entre incrementos sucesivos
1	3,000000	-	-
2	3,449499	0,449499	-
3	3,544090	0,094591	4,752027148
4	3,564407	0,020313	4,656673067
5	3,568759	0,004352	4,667509191
6	3,569692	0,000933	4,664523044
7	3,569891	0,000199	4,688442211
8	3,569934	0,000043	4,627906977

Los valores de α para los cuales se producen transiciones de un ciclo a otro, son llamados *puntos de bifurcación* y las transiciones son las *bifurcaciones*, de modo que en la tabla para un n dado, el valor de a corresponde a la aparición de un ciclo de 2^n elementos.
El físico Mitchell Feigenbaun quedó sorprendido cuando notó que la sucesión de los cocientes entre incrementos sucesivos formaba una sucesión de tipo aproximadamente geométrico, siendo el valor del factor 4, 6692016..., este factor se denomina *Constante de Feigenbaum* (denotándose por F), y lo notable es que aparece en modelos enteramente diferentes cada vez que se produce una duplicación de período repetido. F es, entonces, una constante universal que aparece en numerosos problemas de la Física que tienen en común una transición de fase (por ejemplo, el comportamiento del He cerca del cero absoluto).

3. El Teorema de Sarkovskii y la matemática escolar.

Por último, quisiéramos proponer el siguiente problema (esbozando la solución general), vinculado al tema central de nuestro trabajo y que ilustra algunas de las posibles aplicaciones del Teorema de Sarkovskii, con problemas elementales.

1. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y &= \tfrac{4-x^2}{2}, \\ x &= \tfrac{4-y^2}{2}. \end{aligned}$$

2. Generalizar el punto anterior, a un sistema de dos ecuaciones. Discutir el problema generalizado.

3. Generalizar el sistema de 1, a un sistema de p ecuaciones en las variables x_1, x_2, ..., $.x_p$. ¿Tiene tal sistema soluciones $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ con p diferentes números?

RESPUESTAS

1. (0,2),(2,0),(-1+$\sqrt{}$5, -1+$\sqrt{}$5), (-1-$\sqrt{}$5, -1-$\sqrt{}$5).

2. Una posible generalización es considerar el sistema

$$y = f(x),$$
$$x = f(y).$$

Si x es un punto fijo de la función f, esto es, si

$$x = f(x), \tag{4}$$

se tendrá que

$$f^2(x) = f(f(x)) = x. \tag{5}$$

Por lo tanto, entre las raíces de (5), están todas las raíces de (4), algunas de ellas forman un ciclo de orden dos[8].

3. Consideremos, por ejemplo, el sistema

$$\begin{array}{l} x_2 = \frac{(a-x_1^2)}{2}, \\ x_3 = \frac{(a-x_2^2)}{2}, \\ x_4 = \frac{(a-x_3^2)}{2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_p = \frac{(a-x_{p-1}^2)}{2}, \\ x_1 = \frac{(a-x_p^2)}{2}. \end{array} \tag{6}$$

En este caso, usamos la composición f^n de la transformación f. Así, nuestro sistema (6) se reduce a la ecuación algebraica de grado 2^p

$$f^p(x) = x. \tag{7}$$

Luego, la pregunta enunciada, puede reformularse así ¿tiene la transformación $f_a(x) = \frac{a-x^2}{2}$ órbitas periódicas de período p?.

Un resumen de la respuesta obtenida (con ayuda del Teorema de Sarkovskii) es el siguiente:

- Para $0 \leq a \leq 3$ hay órbitas de período 1.
- Cuando $a > a_1 = 3$, *aparecen órbitas de período 2.*

[8](0,2) y (2,0).

- Cuando $a > a_2 = 5$, aparecen órbitas de período 4.
- Cuando $a > a_3 = 5,47...$, aparecen órbitas de período 8.

Es interesante obtener el valor límite de esta sucesión $a_\infty = 5,6046...$

- Cuando $a > a_\infty$, el carácter de las órbitas típicas cambia muy radicalmente, f_a admite no sólo órbitas de período 2^p. ¿Qué períodos pueden tener las órbitas de la transformación f_a?[9]
- Por último, notemos que 3 es el número respecto al cual todos los demás están a la derecha, de acuerdo con el orden (1), lo que significa que cualquier transformación que tenga una órbita de período 3, admitirá órbitas de todos los demás períodos, o sea, *período 3 implica caos*[10].

Agradecimientos. *Estoy en deuda y deseo agradecer al árbitro sus comentarios y sugerencias muy útiles y, particularmente, por señalar la referencia [10] de indudable valor no sólo para este trabajo.*

Referencias

[1] S. Baldwin, *"Some limitations toward extending Sarkovskii's theorem to connected linearly ordered spaces"*, Houston J. Math. **17**(1991), 39-53.

[2] J. Banks and others, *"On Devaney's definition of chaos"*, American Mathematical Monthly **99** (1992), 332-334.

[3] L.S. Block and W. Coppel, *"Dynamics in one dimension"*, Lectures Notes in Mathematics 1513, 1991.

[4] R. L. Devaney, *"An introduction to chaotic dynamical systems"*, Addison Wesley, 1989.

[5] V. C. García, *"O caos"*, Publicações do Instituto de Matemática da UFRGS, Serie C, 6 (1988).

[6] Ch. Ho and Ch. Morris, *"A graph theoretic proof of Sarkovskii's theorem on the periodic points of continuous functions"*, Pacific J. Math. **96** (1981), 361-370.

[7] A. Lasota and J. Yorke, *"On the existence of invariant measures for transformations with strictly turbulent trajectories"*, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astronom. Phys. **25** (1977), 233-238.

[8] *T*. Li and J.A. Yorke, *"Period three implies chaos"*, Amer. Math. Monthly **82** (1975), 985-992.

[9] R. May, *"Simple mathematical models with very complicated dynamics"*, Nature **26** (1976), 459-467.

[10] M. Martelli; M. Dong and T.Seph, *"Defining chaos"*, Mathematics Magazine, **21** (1998), 112-122.

[11] M. A. Martin; M. Morán y M. Reyes, *"Iniciación al Caos"*, Ed. Síntesis, Madrid, 1995.

[9] Use el Teorema de Sarkovskii.

[10] Ver el trabajo de Li y Yorke.

[12] M de Gracia Mendonça, *"Puntos periódicos de funciones continuas"*, Revista de Educación Matemática **14** (1999), 26-34.

[13] J. E. Nápoles V., *"Una nota sobre el Teorema de Sarkovskii"*, Lecturas Matemáticas, **16** (1995), 211-214.

[14] G. Rubiano, *"Acerca del Teorema de Sarkovskii"*, Lecturas Matemáticas **15** (1994), 21-26.

[15] A.N. Sarkovskii, *"Coexistencia de ciclos de una transformación continua de la recta en sí misma"*, Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal, T.XVI, No.1, 1964, 61-71 (en ruso)

[16] H. Schirmer, *"A topological view of Sarkovskii's theorem"*, Houston J. Math. **11** (1985), 385-395.

[17] I. Stewart, *"¿Juega Dios a los dados? La nueva matemática del caos"*, Grijalbo Mondadori, Barcelona, 1991.

[18] P. Straffin, *"Periodic points of continuous functions"*, Mathematical Magazine **51** (1978), 99-105.

[19] M. H. Vellekoop and R. Berglund, *"On intervals, transitivity=chaos"*, American Mathematical Monthly **101** (1994), 353-355.

RECIBIDO: Junio de 2005. ACEPTADO PARA PUBLICACIÓN: Octubre de 2005