

Grandes corrientes de la matemática en el siglo XX

I. La matemática de los fundamentos 1900–1930

Fernando Zalamea¹

*Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia*

Con este artículo iniciamos una serie de seis textos que pretende recuperar la memoria de los aportes realizados en la *Cátedra Granés 2008, Grandes corrientes de la matemática en el siglo XX*, Cátedra organizada por concurso a instancias de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá. Las nueve sesiones ofrecidas en la Cátedra, en el primer semestre del año 2008, se resumirán aquí en los seis artículos siguientes, que fueron comisionados por el *Boletín de Matemáticas* y que irán apareciendo en números sucesivos de la revista: I. *La matemática de los fundamentos 1900–1930*; II. *La matemática de los funcionales 1920–1950*; III. *La matemática de las estructuras 1940–1970*; IV. *La matemática de los transvases 1950–1990*; V. *Panorama de las Medallas Fields 1936–2010*; VI. *Panorama de los Premios Abel 2003–2010*. Cada artículo intentará trabajar, a vuelo de pájaro, sobre tres frentes: (i) elucidación de núcleos conceptuales y problemáticas técnicas centrales en la matemática de la época; (ii) descripción de entornos históricos correspondientes, entrelazando matemática y cultura; (iii) determinación de temáticas filosóficas que emergen paralelamente a los avances matemáticos. Más que recuentos técnicos puramente matemáticos, la serie proveerá así *instancias de desarrollo del pensamiento matemático*, inscritas dentro de la cultura como un todo. Los artículos I–IV enfatizarán ejemplos alrededor de figuras centrales: I. Hilbert, Brouwer, Gödel; II. Banach, Artin, Weil; III. Bourbaki, MacLane, Lawvere; IV. Grothendieck, Langlands, Shelah. El artículo VI, a pesar de referirse a premios otorgados en los últimos años, tratará de premios que contemplan la *carrera entera* de los ganadores, y contemplará por tanto diversos conceptos matemáticos que emergieron en el siglo XX.

Palabras Claves: fundamentos, lógica, filosofía.

MSC: 01A60

¹ fzalameat@unal.edu.co, www.matematicas.unal.edu.co/~fzalamea

1 Prolegómenos (I). Los objetivos de la Cátedra Granés 2008–I

Creada en honor del Maestro José Granés, la Cátedra Granés de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá, invita a la presentación de temáticas científicas desde un amplio punto de vista cultural, donde las preocupaciones filosóficas jueguen un papel de relieve. Siguiendo la estela marcada por el mismo Profesor Granés, el hacer científico merece verse como un todo, ligado a inquietudes epistemológicas y a investigaciones sobre su emergencia creativa. Siguiendo esta orientación, fijada por la vida y obra del Maestro Granés, la Cátedra 2008–I, *Grandes corrientes de la matemática en el siglo XX*, se preocupó por presentar concisamente algunos de los mayores avances creativos de la matemática en el siglo XX, situándolos dentro de sus contextos culturales y filosóficos de emergencia.

Uno de los objetivos conceptuales generales de la Cátedra —dirigida a un amplio espectro de participantes, tanto en número (200) como en orientación, que cubrió el espectro casi completo de las diversas Facultades de la Universidad— consistió en *romper* con las preconcepciones usuales que se tienen externamente sobre la matemática, y en *abrir* la mente de los oyentes hacia novedosos *modos* de pensamiento en la matemática moderna (1830–1950) y contemporánea (1950–hoy). En particular, para cada una de las preconcepciones usuales siguientes (notadas a continuación en *itálicas*), se quiso mostrar cómo la matemática del siglo XX imponía contrapartes dialécticas mucho más flexibles (notadas en VERSALES): *absoluta* versus RELATIVA, *eterna* versus VARIABLE, *estática* versus DINÁMICA, *deductiva* versus ABDUCTIVA, *fundamentada* versus CORRELATIVA. La ductilidad de las matemáticas en el siglo XX —con su altísima inventividad en todos los registros básicos: amplitud definicional, variedad demostrativa, multiplicación de ejemplos, diversidad de modelos, estructuración de los saberes locales, conectividad global de las teorías, etc.— rompe entonces con los usuales prejuicios alrededor de una matemática rígida, sólida, acabada.

Para poder exhibir mejor los tránsitos *incesantes* de la matemática en el siglo XX, la metodología general de las charlas ofrecidas en la Cátedra Granés intentó ampliar el rango de preguntas básicas que se consideran usualmente sobre la matemática. Si la ontología (el “qué” de los objetos matemáticos) y la epistemología (el “cómo” estos se transforman) se tienen en cuenta usualmente en la reflexión sobre las matemáticas, otras preguntas igualmente pertinentes (“por qué”, “cuándo”, “dónde”)

de los problemas (Riemann, Lie), la jerarquización *infinita* del saber matemático (Cantor).

El caso de ÉVARISTE GALOIS (1811–1832) es paradigmático en ese sentido (las obras de Galois se encuentran aún accesibles en [Galois 1997]; una reciente biografía de Galois, con documentos inéditos, en [Auffray 2004]). Los *objetos* (“qué”) a los que se enfrenta Galois son las ecuaciones algebraicas, que permiten el control operatorio (siglo XVIII) de extensiones de números; los *problemas* asociados (“qué”) preguntan inicialmente bajo cuáles condiciones (*positivas*) puede resolverse una ecuación particular dada, aunque luego, una vez encontradas obstrucciones en las resoluciones (Abel), los problemas divergen (Galois) hacia elucidar bajo qué condiciones puede asegurarse la irresolubilidad (*negativa*) de *clases* de ecuaciones. Esto produce un verdadero terremoto estratégico, donde el control de las extensiones de números ya no resulta ser más operatorio y calculatorio, sino, más bien, *estructural y cualitativo*, mediante las *transformaciones* (“cómo”) de las raíces de las ecuaciones. Surge así una apertura hacia el *revés* de los conceptos, asociado a un cambio de mentalidad según el cual lo *no soluble* puede ser controlado (mediante la no descomposición de una adecuada estructura asociada a la ecuación). Las *regulaciones* (“cómo”) que gobiernan los teoremas de imposibilidad (Abel, Galois) pasan a convertirse en un saber nuevo de las matemáticas. Cuáles son de hecho las *obstrucciones* y las *singularizaciones* (“por qué”) que entran en juego? El mismo Galois denomina “metafísica del cálculo” a esas razones: requerimientos de *simetría* interna y requerimientos de *transformabilidad* entre las raíces, codificados en el grupo de Galois.

Los grandes aportes de Galois consisten en pasar de lo singular a lo plural, de lo aislado a lo relacional, de lo positivo a lo negativo, de lo calculatorio a lo estructural, de lo cuantitativo a lo cualitativo. Los saltos se consiguen mediante el estudio de las raíces en su conjunto (*campo*), el estudio de las transformaciones (*grupo*) del campo de raíces, y el estudio de las jerarquías intermedias, tanto en campos, como en grupos (*extensiones* de campos y *subgrupos*). La extraordinaria *correspondencia de Galois* permite entonces entender la infinitud de los campos mediante la finitud de sus grupos asociados, introduciendo una *dialéctica inversa de reflejos, tránsitos y obstrucciones* (conexión de Galois) entre las estructuras emergentes (condiciones de *separabilidad y normalidad* en las extensiones). Los *cambios de perspectiva* adoptados por Galois fundan el inicio de las matemáticas modernas, al *girar completamente* la ontología (campos en vez de raíces), la epistemología (transformaciones en vez de resoluciones) y la metafísica (grupos de Galois en vez de instancias cal-

culatorias aisladas) en el pensamiento algebraico de la época.

BERNHARD RIEMANN (1826–1866) es otro de los grandes matemáticos del XIX, cuya obra modificará de manera profunda y permanente los modos de entender las matemáticas (obra disponible en español: [Riemann 2000]; excelente visión de conjunto en [Laugwitz 1999]). Los *objetos* en cuestión cambian con Riemann: son las ecuaciones diferenciales (en particular, las ecuaciones diferenciales de la variable compleja), que permiten estudiar el control continuo de cambios de variación; los *problemas* consisten entonces en preguntarse bajo qué condiciones puede asociarse (positivamente) un objeto geométrico a una ecuación particular dada, o, más ampliamente, cómo pueden emerger naturalmente objetos geométricos que codifiquen clases generales de ecuaciones. En forma similar a lo que había sucedido con Abel y Galois, después de encontrarse *obstrucciones* en la eventual asociación, el problema diverge hacia la búsqueda de condiciones que puedan asegurar la *distinción (negativa)* de objetos geométricos asociados a ecuaciones. Riemann descubre cómo las soluciones de ecuaciones diferenciales determinan hipersuperficies donde pueden representarse las soluciones, y las *transformaciones* de esas superficies ayudan a iniciar una clasificación de los objetos geométricos encontrados. De hecho, el enlace de objetos diferenciales (ecuaciones) y de objetos geométricos (superficies) se realiza mediante la aparición de adecuados *invariantes* que permiten regular el tránsito de las transformaciones. Lo diferenciable y lo topológico se acercan, y las obstrucciones de asociación pueden ser caracterizadas mediante invariantes. La “metafísica” de esas obstrucciones y singularizaciones pone de relieve una cierta “composibilidad” (Leibniz, *analysis situs*) de las transformaciones de los objetos geométricos, determinada por precisos invariantes topológicos. En efecto, las superficies en juego poseen *géneros* distintos que obstruyen las deformaciones continuas entre ellas, y, por consiguiente, impiden la elaboración de métodos resolutorios genéricos para las ecuaciones diferenciales (generando en particular una *singularización ad infinitum* de las ecuaciones diferenciales parciales, tendencia que sólo cambiará con el *h-principio* de Gromov, un siglo largo más tarde).

Entre los muchos grandes aportes de Riemann destacan las que se denominarían luego *superficies de Riemann*, objetos geométricos que permiten transformar la multivalencia de ciertas funciones de variable compleja (casos típicos, logaritmo y raíces) en funciones univalentes, y que permiten paralelamente transformar lo extrínseco en intrínseco; la *geometría riemanniana*, donde diversas deformaciones locales dominan lo global, alejándose de la euclidianidad, y que servirá de base teórica

para la incipiente relatividad general; la *función zeta*, enlace de lo discreto y lo continuo, puente natural entre la aritmética y la variable compleja, donde se cobija la *hipótesis de Riemann*, reconocida aún hoy en día como el problema abierto (2010) más importante de las matemáticas. La grandiosidad de Riemann, fácilmente reconocible como el *mayor geómetra* de todos los tiempos, surge de su capacidad para observar un problema desde el *revés*, concentrándose en obstrucciones (variabilidad del ds^2 , divergencia conforme, no conservación topológica), medidores de obstrucciones (métricas globales, representación conforme, invariantes) y resolventes parciales de las obstrucciones (superficies de Riemann, función zeta, etc.) Al igual que Galois, Riemann abre los linderos del *no* para las matemáticas, dando lugar a una definición de la matemática menos vacía que la de Russell: matemática entendida como *estudio exacto de las fronteras cualitativas y cuantitativas de la negación*.

Dentro de esa línea de apertura al “más allá” de los números se sitúa la obra de GEORG CANTOR (1845–1918) (obra central [Cantor 1955]; notable explicación del “más allá” cantoriano en [Hallett 1984]). Con sus números “transfinitos” (léase bien el prefijo *trans*—finito, en vez del usual y menos preciso *in*—finito), Cantor estudia las obstrucciones entre lo finito y lo infinito, gracias al *tránsito* de los mediadores que inventa para la ocasión (números transfinitos: ordinales y cardinales no finitos). Los *objetos* que Cantor introduce son los *conjuntos*, donde, en la definición de 1895, un conjunto es “un todo M de objetos separados y definidos m ”; se trata de una definición “vaga”, que ha sido equivocadamente criticada, pero que intenta, nada menos, captar lo múltiple (“separados” m) en lo uno (“todo” M), volviendo a la gran problemática griega de lo Uno y lo Múltiple. De hecho, en un curso de teoría axiomática de conjuntos, puede demostrarse rigurosamente cómo esa dialéctica Uno/Múltiple, transformada técnicamente en Elevación/Corte, subyace a todos los axiomas de Zermelo–Fraenkel (excepto extensionalidad). Complementariamente con los conjuntos, las *funciones* constituyen los otros objetos fundamentales de la teoría; se constituyen en relatores de información que permiten elevar una red de comparabilidades de *tamaño* (cardinales) y *orden* (ordinales), y que dan lugar a un control analítico entre números extendidos (“transfinitos”). Los *problemas* asociados tienen que ver con las condiciones que permiten comparar (positivamente) un par de conjuntos dados (tamaño, orden), o, más generalmente, colecciones arbitrarias de conjuntos. Como en los casos de Galois y de Riemann, al encontrar Cantor *obstrucciones* de comparación, el problema diverge hacia encontrar condiciones que puedan asegurar la *independencia* de órdenes y

tamaños, iniciándose así el estudio del control *estructural* del crecimiento y ordenamiento de los conjuntos. Las *transformaciones* biyectivas, con sus invariantes cardinales, y los isomorfismos, con sus invariantes ordinales, regulan la escala transfinita. Surgen así todo tipo de *mediaciones/mediciones en lo no finito*, y la jerarquía de invariantes asociados explica de manera profunda la “metafísica” del infinito.

Completando las ideas de su maestro, Zermelo propone grandes controles genéricos para el crecimiento conjuntista gracias a precisos axiomas que *resuelven obstrucciones locales* (*separación* resuelve la equivalencia local intensión/extensión, *elección* resuelve la comparabilidad local de los alephs, *reemplazo* resuelve las posibilidades locales de recolección de información, *fundamentación* impide la formación de líneas locales descendentes infinitas, etc.) La conciencia de la negación/obstrucción y el superamiento parcial/local de la negación son nuevamente motor de enormes ideas matemáticas. La teoría de conjuntos, según Cantor y Zermelo, se convertirá en el candidato más potente de *fundamentación* de las matemáticas, como veremos en el resto de este artículo. Sin embargo, más allá de ciertos excesos fundamentalistas, es el *espíritu multiplicador y contaminante, abierto al revés cualitativo de los conceptos*, espíritu promulgado por Galois, Riemann y Cantor, el que inundará toda la matemática del siglo XX.

La “geografía” de la matemática en el momento histórico que representa el siglo XIX distingue, sin duda, dos regiones privilegiadas para la eclosión del pensamiento matemático moderno: Francia y Alemania. La estela de Galois, situado en la tradición de Lagrange y Cauchy, y elemento de continuidad hacia otros matemáticos cumbre, como Hermite o Poincaré, ayuda a conformar una gran escuela matemática, que, de acuerdo con su perpetuación (y magnificación, diríamos) en el siglo XX, puede considerarse el *mayor foco geográfico de inventividad matemática en el periodo 1830–hoy* (ver artículos finales de esta serie). Por su parte, Riemann se inscribe en la tradición magna de Gauss, Dirichlet y Jacobi, y abre compuertas para otros grandes maestros alemanes del XIX, como Grassmann, Weierstrass, Dedekind, Kronecker, Cantor o Hilbert (quien constituye el mayor enlace matemático entre XIX y XX). La *potencia alemana*, que podría calificarse como claramente pionera hasta los años 1930 (vía Artin, Hasse o Noether), declinará en cambio considerablemente en la segunda mitad del siglo XX. Veremos en artículos sucesivos cómo la emergencia de otras grandes potencias matemáticas (Rusia/URSS, Estados Unidos, Japón) cambiará la distribución de fuerzas en el siglo XX, pero es imposible no asociar la construcción de la matemática moderna

al entorno bifocal Francia/Alemania, con escasas singularidades externas (particularmente Abel y Lie en el fragmento nórdico).

Un ejercicio de comparación muestra claros *estilos de creatividad matemática* asociados con importantes movimientos culturales de la época: (i) *clasicismo* como invención de formas canónicas, en Beethoven, Euler y Lagrange; (ii) *primer romanticismo* como ampliación hacia flujos naturales, en Goethe, Novalis, Gauss y Cauchy; (iii) *segundo romanticismo* como genialidad y heroísmo singulares, en Victor Hugo, Abel y Galois; (iv) *tercer romanticismo* como acople de lo singular y lo universal, en Turner, Dirichlet y Riemann; (v) *invitación al modernismo*, en Monet, Mahler, Dedekind y Cantor. La introducción de la *dialéctica cantidad/cualidad* es patente en la ampliación de la figuración en Turner o Monet, quienes buscan y consiguen expresar cualitativamente la luz, con sus toques impresionistas allende trazos medidamente exactos. La introducción del *revés* de los conceptos recorre todo Nietzsche. La introducción de *mediaciones infinitas* constituye la base de la arquitectónica pragmaticista de Peirce, a través de sus tres categorías cenopitagóricas indefinidamente iteradas. De manera mucho más general, una cuidada y sistemática atención al *tránsito* gobierna el cauce moderno/modernista de fines del XIX y comienzos del XX: las *transiciones* (ontológicas), las *transformaciones* (epistemológicas) y las *transacciones* (metafísicas) inundan el pensamiento de la época. La dinamización de la matemática se hermana con la dinamización del arte (impresionismo, cubismo, constructivismo). La matemática, como armazón cultural, refleja entonces las tendencias de su universo circundante, llevándola a una *explosiva liberación* en el siglo XX: liberación de rígidas barreras entre ontología y epistemología, liberación de aproximaciones analíticas decimonónicas (produciéndose la fascinante *contradicción* de la filosofía analítica anglosajona en el siglo XX, profunda antinomia sobre la que volveremos), liberación de combinatorias finitas, liberación de verdades absolutas.

3 Hilbert. Forma y estructura

Entre fines del XIX y comienzos del XX, la época de DAVID HILBERT (1862–1943) ve cómo se elevan algunas de las mayores *catedrales del espíritu*. La amplitud del modernismo combina aún una cierta confianza en la exploración de la inmensidad y el control de esa exploración mediante una potente *razón sensible*. Es la época, en efecto, de enormes hazañas: Mahler en la música, Monet en el arte, Proust en la literatura, Peirce en la filosofía. El equivalente en matemáticas resulta

ser, sin duda alguna, la obra de Hilbert. El pensamiento hilbertiano incorpora fuertes tensiones contradictorias que se resuelven de manera brillante en arquitectónicas sólidas de la matemática y que influenciarán de modo definitivo el desarrollo de la disciplina en el siglo XX (enorme impacto, por ejemplo, en Bourbaki). La “razón sensible” —que investigan con sumo cuidado, a comienzos de siglo, Vaz Ferreira (“razonabilidad” = pegamiento de razón y sensibilidad), Florenski o Warburg— encarna en Hilbert en su dialéctica pendular entre *axiomatización* e *intuición*, entre *formalización* y *visión*. A menudo encasillado como “formalista”, Hilbert no puede ser en realidad más reacio a todo reduccionismo: (i) abierto a la multiplicidad, Hilbert es un visionario en las áreas más diversas (*Zahlbericht*, 1897, gran *summa* de la teoría algebraica de números; *Grundlagen der Geometrie*, 1899, pequeña *summa* de la geometría; problemas de París, 1900, guía de desarrollo de la matemática para la primera mitad del siglo XX; programa de Hilbert, 1910–1930, guía de ordenamiento del saber matemático; espacios de Hilbert y análisis funcional, 1910–1930; *Methoden der mathematischen Physik*, 1924, gran *summa* de física matemática, con Courant; *Grundlagen der Mathematik*, 1934–1939, gran *summa* de fundamentación de la matemática, con Bernays); (ii) abierto a todas las formas de la inteligencia, Hilbert subraya el lugar *necesario* de la intuición y la visión en matemáticas (gran artículo “Sobre el infinito”, 1925; lecciones sobre *Geometría intuitiva*, 1920, con Cohn–Vossen; cercanía con la física). La gigantesca edición en curso [Hilbert 2004–2010], donde se reúnen las conferencias de Hilbert entre 1891 y 1933 sobre los fundamentos de la matemática y la física, muestra la riqueza y complejidad del panorama.

El programa de Hilbert propone darle un piso seguro a la matemática derivada de la teoría cantoriana de conjuntos (“Nadie nos echará del paraíso que Cantor creó para nosotros”, 1926; para una sucinta introducción al programa, véase [Cassou–Noguès 2001]). Los *objetos* (“qué”) son los procesos deductivos en matemáticas (encadenamientos de pruebas, “ $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ deduce ψ ”, formados por informaciones previas, “premisas”, que determinan una información final, “conclusión”), basados sobre ciertas evidencias que se aceptan pragmáticamente (“axiomas”) y regidos por ciertos modos de tránsito en la cadena deductiva (“reglas”). Se obtiene así, en primera instancia, un manejo lógico *operativo* de conectivos, cuantificadores y secuencias de pruebas. Más allá, en segunda instancia, los *problemas* (“qué”) fundamentales asociados a esa operatoria consisten en buscar un control lógico *estructural* más sofisticado: (A) ordenar en forma *general y abstracta* las secuencias deductivas, (B)

asociar los procesos deductivos de una región matemática a otra (analitización de la geometría, aritmetización del análisis, logicización de la aritmética, etc.), (C) asegurar un fundamento *final* en esa serie de asociaciones. El programa de Hilbert, a menudo confundido con la instancia (C), tendrá en realidad una influencia enorme en el desarrollo de las matemáticas gracias sobre todo a (A) y (B), pues se empezarán así a explorar sistemáticamente las nociones de *generalización/abstracción* (A) y de *transferencia/traducción* (B) que serán cruciales para poder entender estructuralmente los ámbitos matemáticos. Las *transformaciones* y las *regulaciones* (“cómo”) en esos procesos de control se conseguirán gracias a la emergencia de la *lógica clásica de primer orden* (1850–1925: Boole, De Morgan, Peirce, Frege, Peano, Russell, Whitehead, Löwenheim, Skolem, largo y lento proceso finalmente codificado con rigor por Hilbert y Ackermann en *Grundzüge der theoretischen Logik*, 1928) y gracias a la progresiva axiomatización de la *teoría de conjuntos* (1904–1922: Zermelo, Skolem, Fraenkel).

La *nueva mirada* propuesta por Hilbert y su escuela muestra cómo, por un lado, la matemática puede edificarse (elevarse) sobre la relación de pertenencia conjuntística y sobre axiomas apropiados, controlados por la lógica de primer orden, salvando así el “paraíso” cantoriano, y, por otro lado, cómo las distintas regiones de la matemática deben *compararse* con respecto a su *consistencia lógica relativa* (temas (A) y (B)). Aunque Hilbert confiaba en que existiría un “suelo” lo suficientemente firme para asegurar la *consistencia absoluta* del edificio (tema (C)), ciertas *obstrucciones* y *singularizaciones* (“por qué”) ocurrirán posteriormente en la determinación de ese supuesto piso “final” (teorema de incompletitud de Gödel, ver sección 5). En realidad, algunos desarrollos posteriores a Hilbert (teoría de modelos, teoría de categorías) mostrarán que los objetos conjuntistas, vistos en forma descarnada y *singular* desde un intento de fundamentación absoluta (teoría de conjuntos Zermelo–Fraenkel), esconden complejas especificidades de regiones matemáticas *plurales*. En un giro filosófico, como veremos con cuidado en artículos sucesivos de esta serie, la *unidad* de la matemática se obtendrá entonces, no por un reduccionismo imposible (y *matemáticamente falso*) a la teoría clásica de conjuntos, sino por *formas universales de entrelazamiento relativo de lo plural*. La fuerza *aún viva* del programa de Hilbert reside en contemplar esas relaciones correlativas ((A) y (B)), independientemente de que haya fallado el sostén absoluto (C).

Desde el punto de vista de los fundamentos de la matemática, la obra de Hilbert resulta ser decisiva en muchos aspectos. La aproximación *for-*

malista limpia los objetos matemáticos de arandelas innecesarias (nombres, ocurrencias) y se concentra en su *estructura*. La estrategia de *consistencia relativa* resalta la importancia de coherencias transformativas entre regiones de la *práctica* matemática (abriendo así, por ejemplo, una compuerta al *pragmatismo fundacional* de von Neumann, véase [Formica 2008]). La *multiplicidad de la visión* permite entender el hacer matemático como un proceso incesante de *iteración y desiteración* de información entre ramas diversas. Las interrelaciones entre forma, estructura, función e intuición revelan la *riqueza multivalente de la creatividad matemática*, necesitada de razón e imaginación, y, por tanto, demuestran la imposibilidad de contentarse con unos fundamentos meramente deductivos que dejen de lado aspectos pragmáticos complementarios (inducción, red de contrastes; abducción, red de hipótesis). En ciernes, la obra de Hilbert codifica así la fuerza de *fundamentos relativos* para la matemática y presagia algunas de sus más profundas expresiones posteriores, como el estructuralismo (vía Bourbaki) o la categorificación de ciertos universales relativos (vía Grothendieck).

4 Brouwer. Intuición y construcción

LUITZEN EGBERTUS JAN BROUWER (1881–1966), uno de los mayores topólogos a comienzos del siglo XX (productor, entre 1909 y 1912, de cuarenta (!) artículos de punta en el tema, véase [van Stigt 1990]), y gran conocedor por tanto de los métodos existenciales abstractos de la matemática moderna, cambia luego de rumbo y se preocupa por el *polo inverso* en la díada *existencia/construcción*. Como sucede con *todos* los matemáticos creativos de gran vuelo que estaremos recorriendo en estos artículos, la multiplicidad de sus experiencias y perspectivas llama la atención: una *plasticidad* que les permite quebrar sus trayectorias, cambiar de puntos de vista, abrirse a miradas *contrarias*. El camino de Brouwer (como el de Gödel, ver más adelante) delata con precisión el corte, el salto “al otro lado del espejo”, el inciso hacia lo opuesto, precisamente situado en 1912, cuando empieza sistemáticamente a construir su *teoría intuicionista de conjuntos*.

Más allá de ciertas definiciones de “entes” matemáticos mediante argumentos de existencia (ejemplo: existencia de una base vectorial de los reales sobre los racionales, base nunca vista, nunca construida y, peor, nunca construible), Brouwer se inquieta acerca de las eventuales *construcciones efectivas* de esos “entes” cuya existencia parece estar teoreáticamente asegurada. El matemático holandés detecta que los pro-

cesos de existencia que no conllevan construcciones asociadas surgen, en su mayoría, al *aplicar en el infinito* formas del tercio excluso o formas indiscriminadas del cuantificador existencial (tipo axioma de elección), y acomete una revisión profunda de la teoría de conjuntos, en donde, excepto una *intuición* originaria del continuo (de allí el nombre de la doctrina), todo lo demás debe ser efectivamente construido. Las consecuencias serán enormes y el *revisionismo radical* forzado por la escuela intuicionista (donde desaparece, por ejemplo, el teorema de Cantor sobre el crecimiento de los cardinales potencia) hará que la influencia intuicionista se reduzca localmente a Holanda durante cinco décadas, hasta su entrada en el panorama matemático general en los entornos de 1970 (ver artículos III y IV de esta serie).

Los *objetos* (“qué”) de la matemática intuicionista son pruebas constructivas: deducciones efectivamente controladas donde n construcciones dan lugar a una $(n + 1)$ -ésima construcción. En esos controles efectivos, todo uso eventual del tercio excluso debe *decidir* cuál lado de la balanza prima (una *construcción* de p o una *construcción* de $\neg p$, donde la negación de p se define como la *construcción* de una contradicción a partir de p) y todo uso eventual del cuantificador existencial debe poder reemplazarse por una *construcción* del ente instanciado existencialmente. Así, probar en la matemática intuicionista $\neg\neg p$ significa construir una contradicción a partir de la construcción de una contradicción que parta de p , lo que dista muchísimo de ser capaces de exhibir una construcción de p (por tanto, intuicionísticamente, se espera que *no* valga la ley, clásicamente obvia, $\neg\neg p \rightarrow p$). Los *problemas* (“qué”) asociados a esas redes de construcciones son múltiples: (i) cómo eliminar lo no constructivo, (ii) cómo asegurar la coherencia de lo que permanece, sin que aparezcan usos escondidos no constructivos, (iii) cómo realizar matemáticas de interés dentro de ese marco no constructivo, (iv) cómo comparar las ventajas (y desventajas) de lo clásico y lo intuicionista. Surge así una problemática vasta, el *control constructivo de la constructividad*, ejemplo de una de las tantas *iteraciones o autorreferencias* que impulsarán la matemática del siglo XX.

Las *transformaciones* (“cómo”) ligadas a la matemática intuicionista se elevan sobre una “intuición primordial” del continuo, no clasificable, no analizable. A partir de allí, en primera instancia, las transformaciones intuicionistas dan lugar a una producción de marcas efectivas finitas (el “dos-en-uno” de Brouwer, donde se generan los naturales), y, en segunda instancia, a una armazón de sucesiones constructivas a partir de marcas constructivas previas. Las *regulaciones* (“cómo”) del proceder

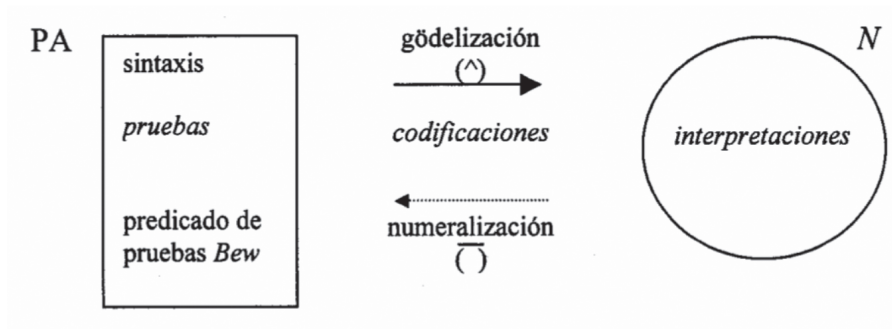
intuicionista se codifican con los trabajos de Heyting (1930, posteriores a los trabajos centrales de Brouwer en la década 1915–1925), quien, por un lado, *restringe* el cálculo proposicional clásico (eliminando el tercio excluso y la interdefinibilidad de los cuantificadores vía $\exists \equiv \neg\forall\neg$), aunque, por otro lado, *amplía* los mundos posibles (introduciendo la temporalidad de las pruebas y la variabilidad de los objetos). En efecto, los *modelos de Kripke* (1963) indicarán cómo se distinguen la lógica clásica (modelos lineales estáticos) y la lógica intuicionista (modelos arbóreos dinámicos), y orientarán *intrínsecamente* la lógica intuicionista hacia las temáticas de la *variación* y el *cambio*. Como las temáticas propias de la topología resultan ser *también* la variación y el cambio, emerge un justo homenaje a Brouwer —el topólogo y el intuicionista— cuando el intuicionismo y la topología se acercan *naturalmente*: teorema de Tarski (años 1930) según el cual los espacios topológicos proveen una semántica completa para la lógica intuicionista (mientras que las álgebras de Boole, o ciertos campos de conjuntos, sirven de semánticas para la lógica clásica).

La *nueva mirada* que surge del intuicionismo indica cómo, constructivamente, el *revés del revés no es el recto*: “no–no” *no* equivale a “sí”. De hecho, en los modelos de Kripke, la afirmación $\neg\neg p$ corresponde sólo a asegurar *densamente* p en el futuro, mientras que la afirmación p lo haría en *todo* su futuro. El operador de doble negación $\neg\neg$ aparece así, desde el intuicionismo, como un genuino operador *topo/lógico* que insta a un encuentro *profundo* (“metafísica” / “por qué”) entre el *topos* y el *logos*, la geometría y el lenguaje, el “lugar” y la “razón”. Algunos de los aportes determinantes de Brouwer como topólogo (invarianza topológica de la dimensión, aproximaciones simpliciales, teoremas de punto fijo) entran en diálogo contrapuntístico con sus ideas como fundador del intuicionismo (crítica a abusos del infinito, intuición primordial del continuo, sucesiones constructivas). Se crea un campo conceptual electromagnético ([Châtelet 1993]) donde las polaridades van resolviéndose en redes de líneas de tensión. Esos *diagramas intermedios de la razón* proveen una mina para la filosofía, aún poco explorada y explotada. El intuicionismo —una vez desprovisto del carácter nacionalista y dogmático de sus inicios, una vez alejado de las desgastantes polémicas con Hilbert (para quien “existencia”, lejos de “construcción”, significaba “consistencia”)— constituye en realidad una de las vastas *elongaciones de la imaginación* producidas en los fundamentos de la matemática.

5 Gödel. Completitud e incompletitud

En los años 1920, el programa de Hilbert, en su vertiente *ascendente positiva*, indicaba que las pruebas (finitarias) de *completitud y consistencia* de las teorías matemáticas, en orden creciente de complejidad, iban en buena vía: se habían obtenido completitud y consistencia para la lógica proposicional clásica (Post, 1920), la aritmética restringida a la suma (Presburger, 1930), la aritmética con cuantificadores acotados (Herbrand, 1930). En un breve abanico de dos años, KURT GÖDEL (1906–1978) no sólo termina de explorar el *recto* de la problemática, sino que descubre también, en su *verso*, una *obstrucción* fundamental. En efecto, en su tesis doctoral, Gödel demuestra el teorema de *completitud para la lógica clásica de primer orden* (1929), lo que consolida el “buen comportamiento” de la lógica dentro de la escalada positiva del programa de Hilbert. No obstante, sólo un año después, Gödel descubre su famoso teorema de *incompletitud para la aritmética de Peano* (1930: si esta es consistente, existen sentencias verdaderas de la aritmética tales que ni ellas, ni sus negaciones, son demostrables con los propios medios de la teoría), lo que quiebra las esperanzas generales de buen comportamiento de la matemática, pero a su vez, gracias al quiebre mismo, permite *abrir la imaginación hacia el fascinante revés de las obstrucciones lógicas*. El paso de lo positivo a lo negativo, del recto al verso, del tránsito a la obstrucción, de la completitud a la incompletitud exhibe los rasgos del *genio*: la alianza *integral* de una mirada a contracorriente, una inusual inventividad técnica y un talento natural para detectar lo simple y lo profundo. Como hemos señalado, la *inversión de perspectivas en un corto lapso de tiempo* sólo parece ser posible en el caso de esos grandes matemáticos cuya obra determina un antes y un después en la disciplina.

Los *objetos* con los que se enfrenta Gödel son los *sistemas de prueba*, donde se combinan una sintaxis (lenguaje, gramática, prueba), una semántica (modelos, verdad, validez) y una pragmática (red de conexiones entre sintaxis y semántica). Las *correlaciones aplicativas* ($x[y]$) entre los conceptos fundamentales de “prueba” y “validez” dan lugar a los *problemas* principales de la pragmática: (i) teorema de validez, cuando se demuestra que las deducciones del sistema son válidas (*validez[prueba]*), (ii) teorema de completitud, cuando se demuestra que las sentencias válidas son demostrables (*prueba[validez]*). En el caso de teorías que contengan a la aritmética de Peano (es decir, la aritmética usual con esquemas de inducción no acotados), Gödel descubre por su cuenta que una fundamental *autorreferencia* (*prueba[prueba]*) esconde una extraor-



1. Predicado de prueba: se construye Bew tal que: $PA \vdash \varphi \Leftrightarrow N \models Bew(x) [\bar{\varphi}]$.
 2. Lema de la diagonal (“autoreferencia”): para toda ψ existe φ tal que: $PA \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi(\bar{\varphi})$.
- Tomando $\psi = \neg Bew$ se tiene incompletitud: por (2) existe φ tal que: $PA \vdash \varphi \Leftrightarrow \neg Bew(\bar{\varphi})$, para esa fórmula φ se demuestran sucesivamente (usando (1)) $PA \not\vdash \varphi$ y $PA \not\vdash \neg \varphi$.

dinaria riqueza combinatoria que permite codificar todo el aparato deductivo del sistema *dentro* del sistema mismo (“gödelización”, procedimiento que asigna inyectivamente números naturales a sentencias y pruebas). Gödel introduce además una noción de *control de crecimiento* de las funciones aritméticas (*transformaciones* “recursivas” o “calculables”), con la cual asegura adecuados teoremas de representación para las nociones lógicas centrales en juego (ser número de Gödel de una prueba, etc.) Emerge así un revolucionario *control sistémico de los sistemas*, que se resume en la figura siguiente (PA, aritmética de Peano; N, estructura de los números naturales): La *nueva mirada* propuesta por Gödel indica cómo la reflexividad externa de los naturales puede calcarse internamente en sistemas de prueba con suficiente capacidad expresiva (es decir, que contengan a la aritmética de Peano) y cómo ciertas formas de autorreferencia (*prueba[prueba]*, recursividad, diagonalización) se esconden detrás de los recursos estructurales de la matemática. Se abre con ello una visión matemática, técnicamente controlable, de los *bordes* mismos de su disciplina, es decir, de *los límites y las limitantes* (“no”, “revés”) de los sistemas de prueba.

La “metafísica” en juego es de enorme relevancia. El “más allá” de las pruebas se torna, con Gödel, en objeto mismo de estudio para la matemática, así como el “más allá” de lo finito se abría a la imaginación matemática con Cantor. *Allende* un entorno dado (sea este lo físico, lo finito, lo demostrable), un cierto *meta-hacer* matemático se enfrenta con los bordes del entorno. El segundo teorema de incom-

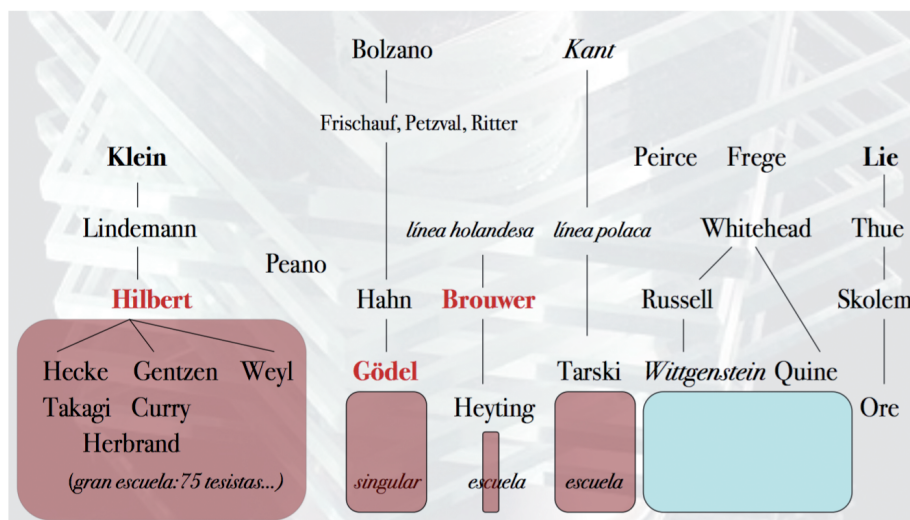
pletitud de Gödel (una teoría que contenga a la aritmética de Peano es incapaz de demostrar su propia consistencia) muestra que los sistemas con amplia capacidad de autorreferencia (como la teoría de conjuntos Zermelo–Fraenkel) *no* pueden servir de bases *absolutas* para la edificación de las matemáticas. Siempre existe un *allende*, y, en matemáticas, sólo puede procederse entonces a una serie de pruebas de *consistencia relativa*. Como anticipaba Musil en “El hombre matemático” (1913):

Después de llevarlo todo a la más idílica existencia, de repente llegaron los matemáticos, esos que siempre andan hozando más adentro, y cayeron en cuenta de que en la base de todo el asunto debía haber algo que no encajaba de ninguna manera; de hecho, miraron debajo y encontraron que todo el edificio estaba en el aire. Pero las máquinas corren. A ese respecto, hay que suponer que nuestra existencia es un pálido duende, la vivimos, pero, propiamente hablando, sólo sobre la base de un error sin el que no habría surgido. Hoy, no hay posibilidad de otro sentimiento tan fantástico como el del matemático. [Musil 1992, p. 43]

El “pálido duende” de la consistencia resulta indemostrable y, aún hoy, un siglo después, puede pensarse al *revés*, como Edward Nelson y su escuela, quienes *intentan demostrar la inconsistencia* (!) de la teoría de conjuntos. El edificio está en el aire, aunque su coherencia, plasticidad y versatilidad lo mantienen en vuelo. Si, hace un siglo, Musil no veía “posibilidad de otro sentimiento tan fantástico como el del matemático”, hoy en día la situación es aún más inverosímil (trabajos de Shelah, que exploraremos en el artículo IV de esta serie). En buena medida, debemos esa apertura del “más allá” a la fantasía de Gödel (explorada en sus más recónditos escondrijos en [Cassou–Noguès 2007]), quien sin duda siempre anduvo “hozando más adentro”. Después de múltiples y multivalentes búsquedas de fundamentación absoluta en el periodo 1900–1930, los resultados de Gödel acaban con la quimera absolutista, y abren el *estudio correlativo de redes de sistemas y de modelos*, verdadero periodo de gloria de la lógica matemática en años sucesivos.

6 Encuentros y desencuentros con la cultura

Periodo de gran agitación e inventividad, los años 1900–1930 en matemáticas constituyen sólo un fragmento mínimo de la enorme eclosión del pensamiento y de la creatividad en la época. Las grandes corrientes de desarrollo matemático se entrecruzan con corrientes similares en los ám-



bitos más generales de la cultura. La época matemática, que sintetizamos en la figura, situando algunas raíces y resaltando (en rojo) algunas de las ramas más vivas, es una combinación de plena confianza, de sólida capacidad fundadora, de vibrante maleabilidad plástica.

Un símil natural para esa arquitectónica matemática puede ser el croquis de Gaudí para la iglesia de la Colonia Güell (proyecto 1898, iglesia no alcanzada a completar en vida del arquitecto), donde todo es elevación, elongación, curvatura, ampliación de la mirada.

Contrariamente con la flexibilidad y plasticidad de la matemática moderna desde Galois y Riemann hasta Hilbert, emerge, a comienzos del siglo XX, una de las más profundas paradojas filosóficas de todos los tiempos. A partir de una comprensión rígida y dogmática de la lógica clásica y de la teoría de conjuntos, Russell y Wittgenstein construyen el proyecto de la *filosofía analítica*, que, si en manos de sus creadores aún tenía palpitos de vida, se convertirá en cambio, en



manos de sus seguidores, en una de las más rígidas camisas de fuerza nunca inventadas para el pensamiento (inescrutable azul en el diagrama de la página anterior). La filosofía analítica se basa en una extrapolación de dos métodos centrales —(i) sintaxis proposicional clásica, (ii) descomposición conjuntística en elementos atómicos— y enarbola su bandera como riguroso análisis del pensamiento, *a la manera de las “matemáticas”*. La crueldad de la paradoja resulta sin embargo evidente cuando se observa que la “matemática” y la “teoría de conjuntos basada sobre la lógica clásica” *dividen sus caminos desde los mismos comienzos cantorianos* (para un ácido estudio de la “influencia perniciosa de las matemáticas en la filosofía”, es decir, de una idea de “matemáticas” mal entendida por la filosofía analítica, véase [Rota 1997]). En efecto, el desarrollo de las ideas matemáticas mayores, que aún impulsan a la disciplina, proviene de las *dialécticas algebraico-geométrico-topológicas* de Galois, Riemann, Lie, Hilbert, donde el papel formal lógico-conjuntista es minimal, si no directamente inexistente. De hecho, el insistente énfasis lógico de la filosofía analítica en *átomos, elementos, descomposiciones, lenguajes y gramáticas* olvida lo propiamente matemático en una lista polar complementaria: *estructuras, relaciones, composiciones, modelos, pragmáticas*. Dada la *enorme influencia* de la filosofía analítica en el siglo XX (luz a veces certera, pero más a menudo falsa y artificial), es curioso registrar ese *desencuentro mayor* entre matemáticas y filosofía, al menos en lo que se refiere al *cauce normal* de la disciplina filosófica. Una gravísima confusión, al identificar *hacer matemático* con *lenguaje lógico*, lastrará en el fondo el proyecto de la filosofía analítica.

En los *bordes* de la filosofía, dirigiéndonos a los edificios filosóficos de Peirce y de Cassirer, las mamposterías se encuentran, en cambio, mucho más cerca del devenir de la matemática. La arquitectónica cenopitagórica peirceana, la máxima pragmaticista, la clasificación triádica de las ciencias (ver [Zalamea 2001]) se basan sobre el pensamiento relacional y topológico de Peirce. La filosofía de las formas simbólicas, la teoría de transferencias culturales, la emergencia del estructuralismo en Cassirer (ver [Barash 2008]) van de la mano con el paradigma mismo de forma, estructura y función que plantea Hilbert y que desarrollará a fondo Bourbaki. Toda la matemática moderna, con Galois, Riemann, Klein, Weierstrass, Lie, Poincaré, Hilbert, apunta a un *entendimiento sintético del TRANS*, tarea precisamente enarbolada también por Peirce y Cassirer. En *lo profundo* (“metafísica” supuestamente borrada por la filosofía analítica), la matemática del siglo largo 1830–1930 se enfrenta de hecho con *obstrucciones, tránsitos, fronteras y contaminaciones*, que

horrorizan a la asepsia analítica, pero que, en cambio, Peirce y Cassirer no sólo no temen afrontar, sino que consideran, con Bajtin, formas imprescindibles del entendimiento: “Todo acto cultural vive, de manera esencial, en las fronteras: en esto reside su seriedad e importancia; alejado de las fronteras pierde terreno, significación, deviene arrogante, degenera y muere” [Bajtin 1991, p. 30; texto de 1924].

Algunas fuerzas culturales básicas del periodo 1900–1930 tienen también sus contrapartes naturales en matemáticas. El modernismo (forma/función) de Proust y Cézanne, entendido como *lo uno co-reflejado en lo múltiple*, encarna en las tareas omniabarcadoras de Hilbert. Una forma de modernidad plena (primera acepción: telar/cosmos) en Kafka y Málevich, entendida como *lo múltiple subordinado a lo uno*, se refleja en las tareas depuradoras de Brouwer. Otra forma de modernidad plena (segunda acepción: espectador/comunidad) en Joyce y Picasso, entendida inversamente como *lo uno subordinado a lo múltiple*, se refleja en la consistencia relativa según Gödel. La sismografía crítica de Warburg, la perspectiva invertida de Florenski, la dialogización de Bajtin, el cubismo sensible de Braque son todos ejemplos de *plásticos reveses* que, como hemos visto, impulsan también a los grandes matemáticos de la época. Se plasma así una *red compleja de urdimbres flexibles superpuestas, a la manera misma de una red de superficies de Riemann conceptuales para la cultura*, que permitirá una plena expansión de las matemáticas y del pensamiento en las siguientes décadas del siglo XX.

Bibliografía

- [Auffray 2004] J.-P. Auffray, *Évariste, le roman d'une vie* (Aléas, Lyon, 2004).
- [Bajtin 1991] M. Bajtin, *Teoría y estética de la novela* (Taurus/Santillana, Madrid, 1991).
- [Barash 2008] J. A. Barash, *The Symbolic Construction of Reality. The Legacy of Ernst Cassirer* (The University of Chicago Press, Chicago, 2008).
- [Cantor 1955] G. Cantor, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers* (Dover, New York, 1955); original de 1895.
- [Cassou-Noguès 2001] P. Cassou-Noguès, *Hilbert* (Les Belles Lettres, París, 2001).

- [Cassou–Noguès 2007] P. Cassou–Noguès, *Les démons de Gödel. Logique et folie* (Seuil, París, 2007).
- [Châtelet 1993] G. Châtelet, *Les enjeux du mobile. Mathématique, physique, philosophie* (Seuil, París, 1993).
- [Formica 2008] G. Formica, *Von Neumann’s methodology of science. From incompleteness theorems to later foundational reflections*, preprint (2008).
www.hopos.org/hopos2008/
- [Galois 1997] É. Galois, *Écrits et mémoires mathématiques*, eds. Bourgne, Azra, pref. Dieudonné (Jacques Gabbay, París, 1997).
- [Hallett 1984] M. Hallett, *Cantor’s Set Theory and Limitation of Size* (Clarendon Press, Oxford, 1984).
- [Hilbert 2004–2010] D. Hilbert, *Lectures on the Foundations of Mathematics and Physics* (Springer, Berlín, 2004–2010); 6 volúmenes hasta el momento, edición en curso.
- [Laugwitz 1999] D. Laugwitz, *Bernhard Riemann 1826–1866* (Birkhäuser, Boston, 1999).
- [Musil 1992] R. Musil, *Ensayos y conferencias* (Visor, Madrid, 1992).
- [Riemann 2000] B. Riemann, *Riemanniana selecta*, ed. Ferreirós (CSIC, Madrid, 2000).
- [Rota 1997] G.–C. Rota, *Indiscrete Thoughts* (Birkhäuser, Basel, 1997).
- [van Stigt 1990] W. P. van Stigt, *Brouwers Intuitionism* (North Holland, Amsterdam, 1990).
- [Zalamea 2001] F. Zalamea, *El continuo peirceano* (Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2001).