Funciones cuasi–periodicas de Bohr

Juan Carlos Hernández[1]

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia

Este artículo contiene algunos de los resultados principales acerca de la teoría de las funciones casi–periódicas de variable real a valor complejo. Se mostrará una aplicación a la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias: para una ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} = \lambda y + f(x)$, donde λ es constante compleja y f es función casi–periódica, se da un criterio de casi–periodicidad para soluciones acotadas (cuya existencia se asume) y otro que asegura la existencia de una única solución casi–periódica.

Palabras Claves: Función casi–periódica, valor medio, serie de Fourier, solución casi–periódica.

This paper contains some of the main results about the theory of almost periodic complex valued functions of a real variable. We shall show an application to the theory of ordinary differential equations: for an equation of the form $\frac{dy}{dx} = \lambda y + f(x)$, where λ is complex constant and f is almost periodic function, we give a criterion of almost periodicity for bounded solutions (the existence of which is assumed) and other that ensure the existence of a unique almost periodic solution.

Keywords: Almost periodic function, mean value, Fourier series, almost periodic solution.

MSC:

1 Introduction

La teoría de las funciones casi–periódicas fue creada y desarrollada en sus principales características por el matemático danés Harald Bohr (1887–1951) entre 1923 y 1925, en dos artículos publicados en [2] bajo el título común *"Zur Theorie der Fast Periodische Funktionen"*. La teoría de las funciones casi–periódicas de Bohr se restringue a la clase de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continuas; el principal problema de la teoría consiste en

[1] jchernandezri@unal.edu.co

caracterizar la clase de las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que puedan ser aproximadas uniformemente por polinomios trigonométricos, es decir, por funciones

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k x}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

donde a_k es constante compleja y λ_k es constante real; la solución a tal problema fue la principal contribución de Bohr. La riqueza de la teoría iniciada por Harald Bohr se pone de manifiesto en las generalizaciones y aplicaciones de esta; entre las generalizaciones están por ejemplo, el estudio de las funciones casi–periódicas con valores en espacios de Banach iniciado por S. Bochner [4], la teoría de funciones casi–periódicas definidas sobre grupos debida a Von Neumann [4] y la teoría de las funciones pseudo–casi–periódicas introducida por Zhang en 1992 [6, 7]. Entre las aplicaciones están a las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales [4, 5].

Este artículo contiene los principales tópicos sobre la teoría de Bohr; en la sección 2 se introducen las propiedades fundamentales de las funciones casi–periódicas, como la acotación y la continuidad uniforme, el álgebra de funciones casi–periódicas, su relación con las funciones periódicas y la condición para que una antiderivada de una función casi–periódica lo sea. En la sección 3 se considera el valor medio de una función casi–periódica, concepto necesario para definir su serie de Fourier. La sección 4 trata sobre la serie de Fourier de una función casi–periódica y el *teorema fundamental*, siendo este último uno de los principales resultados expuestos en este artículo. La sección 5 presenta una aplicación a la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

2 Definición de función casi–periódica y propiedades elementales

Definición 2.1 (casi–período). *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función continua en $\mathbb{R}$. $\tau = \tau_f(\epsilon) \in \mathbb{R}$ es llamado un número de traslación o un casi–período de f correspondiente a $\epsilon > 0$ si*

$$\big|f(x+\tau) - f(x)\big| \leq \epsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

El conjunto de todos los números de traslación de f correspondientes a ϵ se denotará por $\{\tau_f(\epsilon)\}$, en [1] se pueden ver propiedades de los números de traslación.

Definición 2.2 (conjunto relativamente denso en $\mathbb{R}$). *Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es llamado relativamente denso en $\mathbb{R}$, si existe $l > 0$ tal que cualquier intervalo de longitud l contiene al menos un número de A.*

Definición 2.3 (función casi–periódica). *Una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es llamada casi–periódica, si dado $\epsilon > 0$ el conjunto $\{\tau_f(\epsilon)\}$ es relativamente denso en $\mathbb{R}$. En otros términos, una función continua f es casi–periódica si dado $\epsilon > 0$, existe $l = l(\epsilon) > 0$ tal que cualquier intervalo de longitud l contiene al menos un número de traslación τ de f correspondiente a ϵ.*

El siguiente teorema da ejemplos familiares de funciones casi–periódicas.

Teorema 2.4. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función periódica continua entonces f es casi–periódica.

Demostración. Sea p el período fundamental de la función f continua. Tomando $l > p$ en la definición 2.3 entoces f es casi–periódica ya que los períodos np, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ son casi–períodos de f correspondientes a cualquier $\epsilon > 0$.

□

Teorema 2.5. Toda función f casi–periódica es acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que $\big|f(x)\big| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Dado $\epsilon = 1$ existe $l = l(1) > 0$ por ser f casi–periódica y para cada $x \in \mathbb{R}$ podemos elegir un número de traslación $\tau = \tau(1, x)$ de f correspondiente a $\epsilon = 1$ tal que $-x < \tau < -x + l$, es decir, $0 < x + \tau < l$. Si $m = \max\limits_{0 \leq t \leq l} |f(t)|$ entonces

$$\begin{aligned} |f(x)| \leq& \big|f(x+\tau) - f(x)\big| + \big|f(x+\tau)\big| && (2.2)\\ \leq& 1 + m = M, \quad \forall x \in \mathbb{R}. && (2.3) \end{aligned}$$

□

Corolario 2.6. Si f es una función casi–periódica, también lo es f^2.

Demostración. Sean $\tau = \tau_f(\epsilon)$ y $M > 0$ tal que $\big|f(x)\big| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En efecto

$$\Big|f^2(x+\tau) - f^2(x)\Big| \leq 2M\big|f(x+\tau) - f(x)\big| \leq 2M\epsilon, \tag{2.4}$$

y así $\left\{\tau_f\left(\frac{\epsilon}{2M}\right)\right\} \subseteq \left\{\tau_{f^2}(\epsilon)\right\}$.

□

Teorema 2.7. Toda función f casi–periódica es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $l = l\left(\frac{\epsilon}{3}\right)$. Existe $0 < \delta = \delta\left(\frac{\epsilon}{3}\right) < 1$ tal que para $-1 \leq s, t \leq 1 + l$, $|s - t| < \delta$ implica $\left|f(s) - f(t)\right| < \frac{\epsilon}{3}$.

Para $x, y \in \mathbb{R}$, con $|x - y| < \delta$ existe $\tau \in \left\{\tau_f\left(\frac{\epsilon}{3}\right)\right\}$ tal que $0 \leq x + \tau \leq l$ y $-1 < y + \tau < 1 + l$, entonces

$$\begin{aligned} \left|f(x) - f(y)\right| \leq \left|f(x) - f(x+\tau)\right| + \left|f(x+\tau) - f(y+\tau)\right| \\ + \left|f(y+\tau) - f(y)\right| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned} \tag{2.5}$$

ya que $x + \tau, y + \tau \in [-1, 1 + l]$ y $|(x + \tau) - (y + \tau)| = |x - y| < \delta$.

□

Los teoremas 2.4 y 2.7 permiten establecer que toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periódica continua es uniformemente continua.

Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función y a una constante real, denotaremos el operador traslación por $(\mu_a f)(x) = f(x + a)$.

Teorema 2.8. Si f y g son funciones casi–periódicas, $c \in \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{R}$ son constantes entonces las funciones $\overline{f}$ (la función conjugada de f), cf, $\left|f\right|$, $f + g$, fg y $\mu_a f$ son funciones casi–periódicas.

En particular, si f es una función casi–periódica lo es también $\left|f\right|^2$.

Corolario 2.9. La suma $f(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)$ de un número finito de funciones periódicas continuas g_k con períodos arbitrarios es casi–periódica. En particular, todo polinomio trigonométrico $S(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k x}$ es una función casi–periódica.

Considerando la función casi–periódica $f(x) = e^{ix} + e^{i\pi x}$, la cual es no periódica, se tiene que el recíproco del teorema 2.4 en general no es cierto.

Teorema 2.10. Si f es una función casi–periódica tal que $0 < m \leq \left|f(x)\right|$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces $\frac{1}{f}$ es casi–periódica.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$ tenemos que $\left\{\tau_f\left(m^2\epsilon\right)\right\} \subseteq \left\{\tau_{1/f}(\epsilon)\right\}$.

□

Teorema 2.11. Si f es una función casi–periódica y ϕ es un funcional lineal continuo sobre el espacio de Banach $\mathbb{C}$, es decir, ϕ es un elemento del dual $\mathbb{C}^*$, entonces la función compuesta $\phi \circ f$ es casi–periódica.

Demostración. Para $\epsilon > 0$, $\left\{\tau_f\left(\frac{\epsilon}{||\phi||}\right)\right\} \subseteq \{\tau_{\phi\circ f}(\epsilon)\}$.

□

Teorema 2.12. Si f es una función casi–periódica y $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}(\text{o } \mathbb{R})$ es una función uniformemente continua en $\mathbb{C}$ entonces la función compuesta $g \circ f$ es casi–periódica.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\big|f(x) - f(y)\big| < \delta$ implica $\big|g(f(x)) - g(f(y))\big| < \epsilon$. Si $\tau = \tau_f(\xi)$ con $0 < \xi < \delta$ entonces $\{\tau_f(\xi)\} \subseteq \{\tau_{g\circ f}(\epsilon)\}$.

□

Teorema 2.13. Si una sucesión $\{f_n\}$ de funciones casi–periódicas converge uniformemente a la función f en $\mathbb{R}$ entonces f es casi–periódica.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$ existe $N = N(\epsilon)$ tal que si $n > N$ implica

$$\big|f(x) - f_N(x)\big| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Sea $\tau = \tau_{f_N}\left(\frac{\epsilon}{3}\right)$ y $x \in \mathbb{R}$, por (2.5)

$$\begin{aligned}\big|f(x+\tau) - f(x)\big| \le \big|f(x{+}\tau) - f_N(x+\tau)\big| + \big|f_N(x+\tau) - f_N(x)\big| \\ + \big|f_N(x) - f(x)\big| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Así $\left\{\tau_{f_N}\left(\frac{\epsilon}{3}\right)\right\} \subseteq \{\tau_f(\epsilon)\}$.

□

Corolario 2.14. Toda función f la cual puede ser aproximada uniformemente en $\mathbb{R}$ por polinomios trigonométricos $S(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k x}$ es casi–periódica.

Corolario 2.15. Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\lambda_k x}$ uniformemente convergente, donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ son constantes reales es una función casi–periódica.

Cada término de la serie es una función casi–periódica, la n–ésima suma parcial $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k x}$ es una función casi–periódica, la suma $S(x)$ de la serie es también una función casi–periódica ya que las $S_n(x)$ forman una sucesión $\{S_n(x)\}$ de funciones casi–periódicas la cual converge uniformemente a $S(x)$ en $\mathbb{R}$.

El siguiente resultado da una condición necesaria y suficiente para que la antiderivada de una función casi–periódica también lo sea.

Teorema 2.16. Sea f una función casi–periódica y $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. F es una función casi–periódica si y solo si es acotada en $\mathbb{R}$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad se puede asumir que f es a valor real, como F es acotada, sean

$$k_1 = \inf_{-\infty<x<\infty}\{F(x)\} \quad \text{y} \quad k_2 = \sup_{-\infty<x<\infty}\{F(x)\}. \tag{2.8}$$

Dado $\eta > 0$, existen dos números reales x_1 y x_2 tal que

$$F(x_1) < k_1 + \eta \quad \text{y} \quad F(x_2) > k_2 - \eta. \tag{2.9}$$

Dado $\epsilon_1 > 0$, sean $\tau_1 = \tau_f(\epsilon_1)$ y $d = |x_1 - x_2|$, tenemos que

$$\left|\int_{x_1+\tau_1}^{x_2+\tau_1} f(t)dt - \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right| = \left|\int_{x_1}^{x_2} \big(f(t+\tau_1) - f(t)\big)dt\right| \le \epsilon_1 d, \tag{2.10}$$

es decir,

$$\big|F(x_2+\tau_1) - F(x_1+\tau_1) - F(x_2) + F(x_1)\big| \le \epsilon_1 d, \tag{2.11}$$

de donde,

$$F(x_1+\tau_1) \le F(x_2+\tau_1) - \big(F(x_2) - F(x_1)\big) + \epsilon_1 d. \tag{2.12}$$

Pero por (2.8) y (2.9)

$$F(x_2+\tau) \le k_2 \quad \text{y} \quad F(x_2) - F(x_1) > k_2 - k_1 - 2\eta, \tag{2.13}$$

así

$$F(x_1+\tau_1) < k_1 + 2\eta + \epsilon_1 d. \tag{2.14}$$

Tomando ahora un $\epsilon_2 > 0$ y sea $\tau_2 = \tau_f(\epsilon_2)$. Siendo $\tau_1 + \tau_2$ un número de traslación de f correspondiente a $\epsilon_1 + \epsilon_2$, analogamente a (2.14) se obtiene que

$$F(x_1+\tau_1+\tau_2) < k_1 + 2\eta + (\epsilon_1+\epsilon_2)d. \tag{2.15}$$

Considerando ahora la integral $\int_x^{x+\tau_2} f(t)\,dt$,

$$\begin{aligned}
&\int_x^{x+\tau_2} f(t)\,dt\\
&= \int_x^{x_1+\tau_1} f(t)\,dt + \int_{x_1+\tau_1}^{x_1+\tau_1+\tau_2} f(t)\,dt + \int_{x_1+\tau_1+\tau_2}^{x+\tau_2} f(t)\,dt\\
&= \int_{x_1+\tau_1}^{x_1+\tau_1+\tau_2} f(t)\,dt + \int_x^{x_1+\tau_1} f(t)\,dt + \int_{x_1+\tau_1}^{x} f(t+\tau_2)\,dt\\
&= \int_{x_1+\tau_1}^{x_1+\tau_1+\tau_2} f(t)\,dt + \int_x^{x_1+\tau_1} \big(f(t)-f(t+\tau_2)\big)\,dt.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Eligiendo $\tau_1 = \tau_f(\epsilon_1)$ tal que $x < x_1+\tau_1 < x+l$, donde $l = l(\epsilon_1)$, obtenemos que

$$\left|\int_x^{x_1+\tau_1} \{f(t)-f(t+\tau_2)\}dt\right| \le \epsilon_2 l. \tag{2.17}$$

Por (2.8), (2.14) y (2.15),

$$\left|\int_{x_1+\tau_1}^{x_1+\tau_1+\tau_2} f(t)\,dt\right| = \big|F(x_1+\tau_1+\tau_2) - F(x_1+\tau_1)\big| < 2\eta + (\epsilon_1+\epsilon_2)d. \tag{2.18}$$

Usando (2.16) a (2.18), se sigue que

$$\left|\int_x^{x+\tau_2} f(t)\,dt\right| < 2\eta + (\epsilon_1+\epsilon_2)d + \epsilon_2 l. \tag{2.19}$$

Dado $\epsilon > 0$ y haciendo $\eta = \frac{\epsilon}{6}$, $\quad \epsilon_1 = \frac{\epsilon}{6d}$, $\quad \epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2(l+d)}$ en (2.19)

$$\begin{aligned}
\left|\int_x^{x+\tau_2} f(t)\,dt\right| &< 2\left(\frac{\epsilon}{6}\right) + \left(\frac{\epsilon}{6d} + \frac{\epsilon}{2(l+d)}\right)d + \frac{\epsilon}{2(l+d)}l\\
&= \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,
\end{aligned} \tag{2.20}$$

obteniendo que para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $\tau_2 \in \{\tau_f(\epsilon_2)\}$

$$\left| \int_x^{x+\tau_2} f(t)dt \right| = \big| F(x+\tau_2) - F(x) \big| < \epsilon, \tag{2.21}$$

así $\{\tau_f(\epsilon_2)\} \subseteq \{\tau_F(\epsilon)\}$.
El recíproco es inmediato (ver Teorema 2.5).

□

3 Valor medio de una función casi–periódica

Harald Bohr mostró que el valor medio de una función casi–periódica existe, siendo esto un hecho básico, usado para definir un producto interno sobre el espacio vectorial de las funciones casi–periódicas. La importancia de este concepto es resaltada en el estudio de la serie de Fourier asociada a una función casi–periódica.

Teorema 3.1. Si f es una función casi–periódica entonces existe

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(x)\, dx, \tag{3.1}$$

uniformemente con respecto a c.

Sean f una función casi–periódica y $c \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria, la función $\mu_c f$ es casi–periódica (ver Teorema 2.8). Es fácil verificar que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{T} f(x)\, dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(x)\, dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{T} (\mu_c f)(x)\, dx, \tag{3.2}$$

cuya primera igualdad permite definir el valor medio de f como sigue.

Definición 3.2 (Valor medio). *Sea f una función casi–periódica, el valor medio de f, notado $M\{f\}$, está dado por*

$$M\{f\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{T} f(x)\, dx. \tag{3.3}$$

Las igualdades en (3.2) muestran que $M\{f\} = M\{\mu_c f\}$.

En caso de ser la función f periódica continua, con período fundamental p, el teorema 3.1 es trivial y su valor medio es

$$M\{f\} = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)dx, \tag{3.4}$$

es decir, el valor medio definido para funciones casi–periódicas coincide con el valor medio usual en el caso de ser la función f periódica.

El conjunto $\mathcal{AP} = \big\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ es casi–periódica}\big\}$ de las funciones casi–periódicas es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Usando propiedades del valor medio para funciones casi–periódicas (ver [3],[4]), podemos mostrar que la aplicación

$$\begin{aligned} M : \mathcal{AP} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\mapsto M\{f\}\,, \end{aligned} \tag{3.5}$$

es un funcional lineal positivo definido en $\mathcal{AP}$.

La aplicación

$$\begin{aligned} \langle\,,\rangle : \mathcal{AP}\times\mathcal{AP} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (f,g) &\mapsto \langle f,g\rangle = M\{f\,\overline{g}\} \end{aligned} \tag{3.6}$$

define un producto interno sobre $\mathcal{AP}$, el cual induce la norma

$$\|f\| = \sqrt{M\big\{|f|^2\big\}}\,. \tag{3.7}$$

Sea λ constante real, notaremos por e_λ a la función exponencial definida por $e_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.3. El espacio $\big(\mathcal{AP}, \langle\,,\rangle\big)$ es no separable.

Demostración. $\{e_\lambda(x)\}_{\lambda\in\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{AP}$ es una familia ortonormal y no contable, luego el espacio $\big(\mathcal{AP}, \langle\,,\rangle\big)$ es no separable.

□

Definición 3.4. Sea f una función casi–periódica, la aplicación

$$\begin{aligned} a_f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \lambda &\mapsto a_f(\lambda) = M\big\{f\,\overline{e_\lambda}\big\} = \big\langle f, e_\lambda\big\rangle\,, \end{aligned} \tag{3.8}$$

es llamada la *transformada de Bohr de f*.

Teorema 3.5. Si f es una función casi–periódica, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ reales arbitrarios diferentes y $c_1, c_2, ..., c_n$ complejos (o reales) arbitrarios entonces

$$M\left\{\left|f - \sum_{k=1}^{n} c_k e_\lambda\right|^2\right\} = M\left\{|f|^2\right\} - \sum_{k=1}^{n}\left|a_f(\lambda_k)\right|^2 + \sum_{k=1}^{n}\left|c_k - a_f(\lambda_k)\right|^2. \tag{3.9}$$

La expresión anterior se conoce como *ecuación de aproximación cuadrática.*

Tomando $c_k = a_f(\lambda_k)$ en (3.9), se obtiene que

$$M\left\{\left|f - \sum_{k=1}^{n} a_f(\lambda_k) e_\lambda\right|^2\right\} = M\left\{|f|^2\right\} - \sum_{k=1}^{n}\left|a_f(\lambda_k)\right|^2. \tag{3.10}$$

De (3.10), para $n = 1, 2, \ldots$ se cumple que

$$\sum_{k=1}^{n}\left|a_f(\lambda_k)\right|^2 \leq M\left\{|f|^2\right\}. \tag{3.11}$$

Si $S_n = \sum_{k=1}^{n} |a_f(\lambda_k)|^2$, $\{S_n\}$ es una sucesión monotona creciente y por (3.11) acotada, así $\{S_n\}$ es la sucesión de las sumas parciales de la serie convergente $\sum_{k=1}^{\infty} |a_f(\lambda_k)|^2$.

Teorema 3.6. Dada una función f casi–periódica, existe a lo más un conjunto numerable de valores $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales $a_f(\lambda) \neq 0$.

Demostración. De (3.11) se deduce que para cada $m \in \mathbb{Z}^+$ existe solamente un número finito de valores λ para los cuales $|a_f(\lambda)| > \frac{1}{m}$, en realidad menos que $m^2\|f\|^2$. Así los conjuntos

$$B_1 = \left\{\lambda \in \mathbb{R} : |a_f(\lambda)| > 1\right\} \tag{3.12}$$

$$B_m = \left\{\lambda \in \mathbb{R} : \frac{1}{m-1} \geq |a_f(\lambda)| > \frac{1}{m}\right\}, \quad m = 2, 3, \ldots \tag{3.13}$$

son finitos. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es tal que $|a_f(\lambda)| > 0$, $\lambda \in B_j$ para algún $j \in \mathbb{Z}^+$, luego el conjunto de todos los valores $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales $a_f(\lambda) \neq 0$ está dado por $\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$, el cual es numerable por ser unión numerable de conjuntos finitos.

$\square$

4 Serie de Fourier de una función casi–periódica

En la próxima definición se denotarán por $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ los valores para los cuales $a_f(\lambda_k) \neq 0$ y sea $A_k = a_f(\lambda_k)$ para $k = 1, 2, \ldots$.

Definición 4.1. *Dada una función casi–periódica f, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k x}$ es llamada la serie de Fourier asociada con f, esto se escribirá como*

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k x}. \tag{4.1}$$

Los $\lambda_k \in \mathbb{R}$ y $A_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \ldots$ son llamados respectivamente los exponentes y los coeficientes de Fourier de f. Se llama el espectro de f al conjunto $S = \{\lambda \in \mathbb{R} : a_f(\lambda) \neq 0\}$.

La desigualdad (3.11) implica también que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|^2 \leq M\left\{|f|^2\right\}, \tag{4.2}$$

conocida como la *desigualdad de Bessel*.

En caso de ser la función f periódica con período p, su serie usual de Fourier asociada dada por

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\omega_k x}, \tag{4.3}$$

donde $\omega_k = \frac{2\pi k}{p}$, $c_k = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)e^{i\omega_k x}\,dx$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, coincide con la serie dada en la definición 4.1.

Teorema 4.2. Si f es una función casi–periódica y su derivada f' también es casi–periódica, entonces la serie de Fourier de f' puede ser obtenida por diferenciación término a término de la serie de Fourier de f.

Demostración. Es trivial comprobar que

$$M\left\{f'\,\overline{e_\lambda}\right\} = i\lambda M\left\{f\,\overline{e_\lambda}\right\}, \tag{4.4}$$

así f' tiene los mismos exponentes de Fourier que f, excepto para $\lambda = 0$, si este fuese un exponente de Fourier de f. Sea $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k x}$ y denotando por A'_k los coeficientes de Fourier de f', de (4.4) se obtiene que $A'_k = i\lambda_k A_k$ y por lo tanto que

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} i\lambda_k A_k e^{i\lambda_k x}. \tag{4.5}$$

□

Teorema 4.3. Si f es una función casi–periódica y su antiderivada F es casi–periódica, entonces la serie de Fourier de F puede ser obtenida por integración término a término de la serie de Fourier de f.

Demostración. De (4.5) se sigue que si la antiderivada F de la función f es casi–periódica,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt \sim c + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{i\lambda_k} e^{i\lambda_k x}. \tag{4.6}$$

□

Notese que $\lambda_k \neq 0$ para $k = 1, 2, \ldots,$ pues $\lambda = 0$ no puede ser un exponente de Fourier de f, que es la derivada de la función casi–periódica F.

El valor $\lambda = 0$ no puede ser un exponente de Fourier de una función casi–periódica la cual es la derivada de una función casi–periódica, en otras palabras, para que una primitiva F de una función casi–periódica f sea casi–periódica es necesario que $\lambda = 0$ no sea un exponente de Fourier de f.

Teorema 4.4. Sea f una función casi–periódica. Si $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ es una función casi–periódica entonces $M\{f\} = 0$.

El próximo corolario muestra que la condición $M\{f\} = 0$, no es una condición suficiente para la casi–periodicidad de F.

Corolario 4.5. Existen funciones f casi–periódicas tal que $M\{f\} = 0$ y cuya primitiva no es casi–periódica.

Considerando la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{\frac{i}{k^2}x}, \tag{4.7}$$

por el corolario 2.15, la suma $f(x)$ de esta serie es una función casi–periódica y obviamente $M\{f\} = 0$. Si la función $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ fuera casi–periódica entonces

$$F(x) \sim c + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{i} e^{\frac{i}{k^2}x}. \tag{4.8}$$

El lado derecho de (4.8) no es la serie de Fourier de una función casi–periódica ya que no satisface la desigualdad de Bessel (ver (4.2)), pues es divergente la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{i}\right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} 1$.

La importancia de la teoría de Bohr es resaltada por los siguientes resultados:

Teorema de unicidad 4.6. Si f y g son funciones casi–periódicas con la misma serie de Fourier entonces $f = g$.

Ecuación de Parseval 4.7. Si f es una función casi–periódica tal que $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k x}$ entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|^2 = M\left\{|f|^2\right\}. \quad \textit{(Ecuación de Parseval)} \tag{4.9}$$

Teorema de aproximación 4.8. Dada una función casi–periódica f tal que $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k x}$ y dado $\epsilon > 0$, existe un polinomio trigonométrico S cuyos exponentes son exponentes de Fourier de f, el cual satisface

$$|f(x) - S(x)| < \epsilon, \quad -\infty < x < \infty. \tag{4.10}$$

El teorema 4.6 equivale a que el sistema ortonormal $\big(e_\lambda(x)\big)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ es completo en $\big(\mathcal{AP}, \langle\,,\rangle\big)$.

Sean $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{C}) = \big\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ es función acotada}\big\}$ y d_U la *métrica uniforme* en $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{C})$,

$$d_U(f,g) = \sup_{-\infty<x<\infty} \big|f(x) - g(x)\big| \quad \text{para} \quad f,g \in \mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{C}). \tag{4.11}$$

Considerando el conjunto $\{S(x)\}$ de los polinomios trigonométricos $\big(S(x)$ es una función de la forma (1.1)$\big)$ y denotando por $\mathrm{Cl}_U\big(\{S(x)\}\big)$ la clausura del conjunto $\{S(x)\}$ correspondiente a la métrica uniforme. El principal problema de la teoría de Bohr, que consiste en caracterizar las funciones $f(x) \in \mathrm{Cl}_U\big(\{S(x)\}\big)$ es resuelto por el llamado *Teorema fundamental* (teorema 4.9).

Teorema fundamental 4.9. La clausura del conjunto de los polinomios trigonométricos coincide con la clase de las funciones casi–periódicas, es decir

$$\mathrm{Cl}_U\big(\{S(x)\}\big) = \mathcal{AP}. \tag{4.12}$$

Demostración. Si $f \in \mathrm{Cl}_U\big(\{S(x)\}\big)$ entonces existe una sucesión $\{S_n\}$ de polinomios trigonométricos, la cual converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a f. Por el corolario 2.14 $f \in \mathcal{AP}$, así

$$\mathrm{Cl}_U\big(\{S(x)\}\big) \subseteq \mathcal{AP}. \tag{4.13}$$

Si $f \in \mathcal{AP}$ entonces por el Teorema de Aproximación $f \in \mathrm{Cl}_U\big(\{S(x)\}\big)$, luego

$$\mathcal{AP} \subseteq \mathrm{Cl}_U\big(\{S(x)\}\big). \tag{4.14}$$

De (4.13) y (4.14) se obtiene (4.12).

□

5 Aplicación a las ecuaciones diferenciales ordinarias

En esta sección se enuncian y demuestran dos resultados sobre soluciones casi–periódicas para una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y + f(x), \tag{5.1}$$

donde λ es una constante compleja y f es una función casi–periódica.

Teorema 5.1. Toda solución acotada para $x \in \mathbb{R}$ de la ecuación (5.1) es casi–periódica.

Demostración. La solución general de la ecuación (5.1) es

$$y(x) = e^{\lambda x}\left(\int_0^x e^{-\lambda t} f(t)\,dt + C\right), \tag{5.2}$$

donde C es una constante arbitraria.

Si $\lambda = \mu + i\nu$, debemos considerar los siguientes casos: (a) $\mu < 0$, (b) $\mu = 0$ y (c) $\mu > 0$.

En el caso (a), $\left|e^{\lambda x}\right| = e^{\mu x} \to \infty$ cuando $x \to -\infty$. Así para que $y(x)$ tenga la posibilidad de ser acotada en la recta real (ya que la acotación es condición necesaria para que $y(x)$ pueda ser casi–periódica, ver teorema 2.5) se debe tener que $\int_0^x e^{-\lambda t} f(t)\,dt + C \to 0$ cuando $x \to -\infty$, es decir que

$$C = \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda t} f(t)\,dt, \tag{5.3}$$

donde la integral impropia es convergente, ya que

$$\left|e^{-\lambda t} f(t)\right| \le e^{-\mu t} \sup |f(t)|, \quad t \le 0. \tag{5.4}$$

Sea $y_0(x)$ la solución particular de (5.1), obtenida al sustituir (5.3) en (5.2),

$$y_0(x) = \int_{-\infty}^x e^{\lambda(x-t)} f(t)\,dt. \tag{5.5}$$

Tenemos que

$$\left|y_0(x)\right| \le M e^{\mu x} \int_{-\infty}^x e^{-\mu t} dt = -\frac{M}{\mu}\,, \tag{5.6}$$

donde $M = \sup\limits_{-\infty<x<\infty} \left|f(x)\right|$, (5.6) muestra que $y_0(x)$ es acotada.

Así en este caso la única solución acotada de la ecuación (5.1) está dada por (5.5). Además y_0 es casi–periódica, pues si $\tau = \tau_f(-\mu\epsilon)$

$$\big|y_0(x+\tau) - y_0(x)\big| \leq -\frac{1}{\mu}\sup\big|f(x+\tau) - f(x)\big| \leq \epsilon, \quad -\infty < x < \infty, \tag{5.7}$$

esta desigualdad prueba que $\tau = \tau_{y_0}(\epsilon)$.

En el caso (b),

$$y(x) = e^{i\nu x}\left(\int_0^x e^{-i\nu t} f(t)\,dt + C\right), \tag{5.8}$$

se sigue de (5.8) que $y(x)$ es acotada si y solamente si $\int_0^x e^{-i\nu t} f(t)\,dt$ es acotada. Siendo la función bajo el signo integral $\big(e^{-i\nu t} f(t)\big)$ casi–periódica, por el teorema 2.16 la integral $\big(\int_0^x e^{-i\nu t} f(t)\,dt\big)$ es casi–periódica si $y(x)$ es acotada. Por lo tanto $y(x)$ es casi–periódica si es acotada.

En el caso (c), procediendo análogamente al caso (a) podemos mostrar que

$$y_1(x) = -\int_x^\infty e^{\lambda(x-t)} f(t)\,dt, \tag{5.9}$$

es la única solución acotada de la ecuación (5.1). $y_1(x)$ es casi–periódica puesto que cualquier número de traslación de $f(x)$ correspondiente a $\epsilon\mu$ es un número de traslación de $y_1(x)$ correspondiente a ϵ.

De los casos (a), (b) y (c), cualquier solución acotada de la ecuación (5.1) es casi–periódica.

□

El próximo corolario se obtiene de los casos (a) y (c) en la prueba del teorema 5.1.

Corolario 5.2. Si la parte real de λ es no nula entonces la ecuación (5.1) tiene una única solución casi–periódica.

References

[1] A. S. Besicovitch, *Almost periodic functions* (Dover, New York, 1958).

[2] H. Bohr, *Zur theorie der fastperiodischen funktionen, I, II*, Acta Math. **45**, 29–127 (1924); **46**, 101–214 (1925).

[3] H. Bohr, *Almost periodic Functions* (American Mathematical Society, 1999).

[4] C. Corduneanu, *Almost periodic functions* (AMS/Chelsea Publishing Company, New York, 1989).

[5] B. M. Levitan and V. Zhikov, *Almost periodic functions and differential equations* (Cambridge University Press, New York, 1983).

[6] C. Zhang, *Pseudo almost periodic functions and their applications*, Thesis (University of Western Ontario, 1992).

[7] C. Zhang, *Pseudo almost periodic solutions of some differential equations*, J. Math Anal. Appl. **181**, 62–74 (1994).