Algunas aplicaciones de los puntos $\mathcal{F}$–límites en topología, análisis y álgebra

Salvador García Ferreira[1]

Centro de Ciencias Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México
Campus Morelia, Apartado Postal 61–3, Santa María
58089, Morelia, Michoacán, México

Es bien sabido que los filtros libres sobre los números naturales son una herramienta muy importante en diversas áreas de las matemáticas. Principalmente en topología, teoría de comjuntos y análisis matemático. En este trabajo daremos algunas aplicaciones de los puntos $\mathcal{F}$–límites de sucesiones de puntos, en donde $\mathcal{F}$ es un filtro libre sobre los números naturales. Veremos cómo pueden ser utilizados para construcciones de ejemplos y definiciones de nociones matemáticas muy importantes.

Palabras claves: ultrafiltros, filtros, $\mathcal{F}$–límites,
espacios numerablemente compactos, espacios de Banach,
espectro de un anillo, sistemas dinámicos discretos, proximales,
p–proximales, recurrente, p–recurrentes, semigrupo de Ellis.

It is well–known that free filters on the natural numbers are very important tools in several areas of mathematics. Mainly in yopology, set theory and mathematical analysis. In this article we shall give some applications of the $\mathcal{F}$–limit points of sequences of points, where $\mathcal{F}$ is a free filter on the natural numbers. By using these points, we shall give constructions of examples and definitions of very important mathematical notions.

Keywords: ultrafilters, filters, limits $\mathcal{F}$,
numerably compact spaces, Banach spaces,
ring spectra, discrete dynamical systems, proximals,
p–proximals, recurrent, p–recurrent, Ellis semigroup

MSC: 54A20, 54D80,54G20.

[1] sgarcia@matmor.unam.mx

1 Preliminares

Todos nuestros espacios topológicos serán siempre de Hausdorff y completamente regulares (los cuales son también conocidos como espacios de Tychonoff). Las propiedades básicas que usaremos de estos espacios se pueden encontrar en Engelkin [6]; en lo que respecta a la teoría de conjuntos, el libro de Kunen [19] es excelente; para ver las propiedades combinatorias de los filtros sugerimos el libro de Comfort y Negrepontis [4].

Enlistamos la notación que usaremos con frecuencia y enunciamos algunas nociones básicas.

1. $\mathbb{R}$ denota los número reales, $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros y $\mathbb{N}$ los números naturales.

2. Si X es un conjunto no vacío, entonces $\mathcal{P}(X)$ denota el conjunto de todos los subconjuntos de X. Adicionalmente, para identificar algúnos subconjuntos epeciales de X ponemos $[X]^\omega = \{A \subseteq X : A \,\text{es infinito y numerable}\}$ y $[X]^{<\omega} = \{A \subseteq X : A \,\text{es finito}\}$.

3. La diferencia simétrica de dos subconjuntos $A, B \subseteq X$ es el conjunto $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

4. Si X es un conjunto y $A \subseteq X$, entonces $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ denota la función característica de A. El conjunto de Cantor $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ puede ser identificado con el conjunto de todas las funciones características de subconjuntos de $\mathbb{N}$. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ es un grupo topológico con la operación $\chi_A + \chi_B = \chi_{A\Delta B}$, para cada $A, B \subseteq \mathbb{N}$.

5. Para cada $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, definimos $\mathcal{B}^s = \{A \subseteq X : \exists B \in \mathcal{B}(B \subseteq A)\}$ y $\mathcal{B}^+ = \{A \subseteq X : \forall B \in \mathcal{B}(A \cap B \neq \emptyset)\}$.

6. La familia de vecindades de un punto x se denota por $\mathcal{N}(x)$.

7. Consideremos el producto $\prod_{i\in I} X_i$. Para cada $i \in I$, la proyección en la j–ésima coordenada se denota por $\pi_i : \prod_{j\in I} X_j \to X_i$. En otros términos, $\pi_i(x) = x(i)$, para todo $x \in \prod_{j\in I} X_j$ y para todo $i \in I$. Un abierto subbásico del producto se denota por $[i, V] = \{x \in \prod_{i\in I} X_i : x(i) \in V\}$ en donde $i \in I$ y $V \subseteq X_i$ es un abierto.

8. La cardinalidad de los números reales se denota por $\mathfrak{c}$.

Por ser este un artículo panorámico no se incluyen la mayoría de las demostraciones y los detalles de las construcciones. Lo que haremos es dar las referencias precisas para que el lector pueda encontrar información detallada y completa.

Los filtros que consideraremos en este trabajo son sólo aquellos que se definen sobre los números naturales. En la segunda sección daremos las propiedades básicas de los filtros y ultrafiltros. Posteriormente, en la tercer sección, se define la compactación de Stone–Čech de los números naturales con la topología discreta. Esta compactación es de mucha utilidad en las secciones siguientes. La noción de punto $\mathcal{F}$–límite de una sucesión de un espacio topológico se estudia en la cuarta sección. Daremos las propiedades importantes de ésta noción. La quinta sección, contiene, para cada número natural positivo n, la construcción de Frolík de un espacio topológico X tal que X^n es numerablemente compacto pero X^{n+1} no lo es. En esta misma sección introducimos algunos pre–órdenes que se definen en la compactación de Stone–Čech de los números naturales. Dichos órdenes son importantes en la teoría de ultrafiltros. Las aplicaciones al análisis matemático se describen en la sexta sección. La tarea principal en esta sección es la clasificación de algunos filtros importantes usando ciertos tipos de convergencia en espacios métricos, incluyendo el espacio de Banach ℓ_1. En la septima sección, presentaremos la construcción de una nueva topología en el espectro de un anillo conmutativo con unidad. Esta topología es diferente de la topología de Zariski y de la topología de patch. La ultima sección contiene diversas aplicaciones de los puntos p–límites a los sistemas dinámicos discretos.

2 Filtros y ultrafiltros

Empezamos enunciando la noción principal de este trabajo.

Definición 2.1. *Sea X un conjunto no vacío. Una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X es un filtro si se cumplen las siguientes propiedades.*

1. $\emptyset \notin \mathcal{F} \neq \emptyset$.
2. *Si* $A, B \in \mathcal{F}$, *entonces* $A \cap B \in \mathcal{F}$.
3. *Si* $A \in \mathcal{F}$ *y* $A \subseteq B \in \mathcal{P}(X)$, *entonces* $B \in \mathcal{F}$.

El ejemplo más simple de un filtro es $\{X\}$. Para un conjunto infinito X hay filtros más interesantes como el *filtro de Fréchet* de X el cual es $\mathcal{F}_r = \mathcal{F}_r(X) = \{F \in \mathcal{P}(X) : |X \setminus F| < \omega\}$. Otro ejemplo de filtro es $\mathcal{F}_A = \{F \in \mathcal{P}(X) : A \subseteq F\}$, en donde $\emptyset \neq A \subseteq X$. Cuando $A = \{x\}$ consista de un solo punto, en algunos casos convenientes, se identifica el filtro $\mathcal{F}_{\{x\}}$ con el mismo punto x. Haremos uso de esta identificación principalmente cuando nuestro conjunto en cuestión sean los números naturales. Veamos a continuación un método general para obtener filtros sobre un conjunto infinito X.

Definición 2.2. *Sea $\mathcal{B}$ una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de X.*

1. *Decimos que $\mathcal{B}$ tiene la propiedad de 'intersección finita' si la intersección de una cantidad finita de elementos de $\mathcal{B}$ es no vacía.*
2. *Decimos que $\mathcal{B}$ tiene la propiedad de 'intersección infinita' si la intersección de una cantidad finita de elementos de $\mathcal{B}$ es infinita.*
3. *La familia $\mathcal{B}$ es una 'base de filtro' si para cada $A, B \in \mathcal{B}$ se puede encontrar $C \in \mathcal{B}$ tal que $C \subseteq A \cap B$.*

Teorema 1. *Sea X un conjunto y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Si $\mathcal{B}$ tiene la propiedad de intersección finita, entonces $\{\bigcap_{B \in F} B : F \in [\mathcal{B}]^{<\omega}\}$ es una base de filtro.*

Teorema 2. *Sea X un conjunto y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Si $\mathcal{B}$ es una base de filtro, entonces $\mathcal{B}^s$ es un filtro.*

Definición 2.3. *Sea X un conjunto infinito. Un filtro $\mathcal{F}$ en X es fijo si $\cap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Los filtros que no son fijos son libres.*

Si X es un conjunto infinito y $\emptyset \neq A \subseteq X$, entonces $\mathcal{F}_A$ es trivialmente un filtro fijo y $\mathcal{F}_r$ es un ejemplo de un filtro libre en X. Las siguientes afirmaciones son evidentes.

1. Sea X un conjunto infinito. Un filtro $\mathcal{F}$ en X es fijo si y sólo si existe $\emptyset \neq A \subseteq X$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_A$.
2. Sea X un conjunto infinito. Un filtro $\mathcal{F}$ en X es libre si y sólo si $\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{F}$.

Dada una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ con la propiedad de intersección finita, el *filtro generado por $\mathcal{B}$* es el filtro

$$\langle \mathcal{B} \rangle = \left\{ F \subseteq X : \exists B_0, \cdots, B_k \in \mathcal{B} \left(\bigcap_{i \leq k} B_i \subseteq F \right) \right\}.$$

Si $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de intersección infinita, convenimos que el filtro $\langle\mathcal{B}\rangle$ es el filtro libre

$$\langle\mathcal{B}\rangle = \{F \subseteq X : \exists\, n \in \mathbb{N},$$
$$\exists B_0, \cdots, B_k \in \mathcal{B}\left(\left(\bigcap_{i\leq k} B_i\right) \setminus \{0,\,1,\,\cdots,\,n\} \subseteq F\right)\Bigg\}.$$

Es el momento de introducir los filtros maximales.

Definición 2.4. *Sea X un conjunto infinito. Un filtro $\mathcal{F}$ en X es un ultrafiltro si no está contenido propiamente en otro filtro.*

Cada punto x de un conjunto infinito X determina de manera única un ultrafiltro $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_{\{x\}}$. Los ultrafiltros libres existen sólo con la ayuda del Lema de Zorn.

Teorema 3. *Todo filtro está contenido en un ultrafiltro.*

Demostración. Sea X un conjunto infinito y $\mathcal{F}$ un filtro en X. Consideremos el conjunto

$$P = \{\mathcal{G} : \mathcal{G}\text{es un filtro y}\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\}.$$

Dados $\mathcal{G}, \mathcal{D} \in P$, se dice que $\mathcal{G} \leq \mathcal{D}$ si $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}$. Se puede ver que $\leq$ es un orden parcial en P. Si $C \subseteq P$ es una cadena, entonces $\cup C$ es un filtro que resulta también estar en P y, por definición, es una cota superior de la cadena C. Así, por el Lema de Zorn, el conjunto P tiene un elemento maximal $\mathcal{U}$. Es evidente que $\mathcal{U}$ resulta ser el ultrafiltro deseado. $\square$

En base el teorema anterior, para obtener un ultrafiltro libre basta con extender el filtro de Fréchet a un ultrafiltro y este resulta ser libre.

El Teorema 3 nos da un método para obtener ultrafiltros con ciertas propiedades anticipadas. Por ejemplo, dados dos subconjuntos infinitos ajenos no vacíos arbitrarios $A, B \in [\mathbb{N}]^\omega$ siempre se puede encontrar un ultrafiltro $\mathcal{F}$ que contenga a A y no a B. Para ésto basta con tomar el ultrafiltro $\mathcal{F}_k$ en donde $k \in A$ es fijo. Pero si se quiere un ultrafiltro libre con las mismas condiciones, se tiene que considerar un filtro que extienda al filtro $\{F \setminus \{n\} : F \in [\mathbb{N}]^\omega, A \subseteq F \text{y} n \in \mathbb{N}\}$. Por otro lado, si $\mathcal{C} \subseteq [\mathbb{N}]^\omega$ tiene la propiedad de intersección finita, según el Teorema 3, se puede encontrar un ultrafiltro $\mathcal{F}$ que contenga a la familia $\mathcal{C}$. Considerando el filtro $\{F \subseteq \mathbb{N} : \exists C_0, \cdots, C_k \in \mathcal{C}(\bigcap_{i\leq k} C_i \subseteq F)\}$.

Teorema 4. *Toda familia de subconjuntos no vacíos con la propiedad de intersección finita de un conjunto infinito está contenida en un ultrafiltro.*

En el siguiente teorema enlistamos varias propiedades que caracterizan a los ultrafiltros (ver las demostraciones en [4] y [17]).

Teorema 5. *Sea X un conjunto infinito. Las siguientes condiciones son equivalentes para un filtro $\mathcal{F}$ en X.*

1. *$\mathcal{F}$ es un ultrafiltro.*
2. *Para todo $A \in \mathcal{P}(X)$ se cumple que $A \in \mathcal{P}(X)$ o $X \setminus A \in \mathcal{F}$.*
3. *Para cada $A \in \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{F}$ existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $A \cap F = \emptyset$.*
4. *$\mathcal{F} = \mathcal{F}^+$.*
5. *$\mathcal{F}$ está contenido en un único ultrafiltro.*

Una consecuencia importante del teorema anterior es que si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro fijo sobre un conjunto infinito X, entonces es posible encontrar un punto $x \in X$ tal que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_x$.

3 La compactación de los números naturales con la topología discreta

Denotemos por $\beta(\mathbb{N})$ el conjunto de todos los ultrafiltros sobre los números naturales. Cada número natural n se identifica con el ultrafiltro $\mathcal{F}_n = \{A \subseteq \mathbb{N} : n \in A\}$. De este modo se puede considerar $\mathbb{N}$ como un subconjunto de $\beta(\mathbb{N})$. Pongamos $\mathbb{N}^* = \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$. En este contexto, $\mathbb{N}$ son los ultrafiltros fijos sobre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}^*$ son los ultrafiltros libres sobre $\mathbb{N}$. Para ver que hay suficientes ultrafiltros libres se puede usar una familia independiente de subconjunto infinitos de $\mathbb{N}$ de tamaño $\mathfrak{c}$ y con ella es posible demostrar que $|\mathbb{N}^*| = 2^{\mathfrak{c}}$ (ver los detalles en [10]).

Ahora equiparemos a $\beta(\mathbb{N})$ con una topología compacta de Hausdorff de tal manera que contenga a $\mathbb{N}$ como un subconjunto discreto. Para ésto se introducen los conjuntos abiertos básicos.

Para cada $A \subseteq \mathbb{N}$ definimos $\hat{A} = \{p \in \beta(\mathbb{N}) : A \in p\}$ y $A^* = \hat{A} \setminus A$. Recopilemos algunas propiedades importantes de estos subconjuntos de $\beta(\mathbb{N})$ en el siguiente teorema.

Teorema 6. *Sean $A, B \subseteq \mathbb{N}$.*

1. *Si $A \subseteq B$, entonces $\hat{A} \subseteq \hat{B}$.*

2. $\hat{A} \cup \hat{B} = \widehat{A \cup B}$.

3. $\hat{A} \cap \hat{B} = \widehat{A \cap B}$.

4. $\widehat{\mathbb{N} \setminus A} = \beta(\mathbb{N}) \setminus \hat{A}$.

A partir del Teorema 6 obtenemos que $\{\hat{A} : A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$ es una base para una topología τ en $\beta(\mathbb{N})$. A continuación damos las propiedades más importantes de esta topología (el lector puede encontrar las pruebas detalladas en [4] y [17]).

Teorema 7. *1. $\beta(\mathbb{N})$ es un espacio de Hausdorff compacto de dimensión cero.*

2. $\mathbb{N}$ es un conjunto denso discreto $\beta(\mathbb{N})$.

3. Toda función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se puede extender a una función continua $\hat{f} : \beta(\mathbb{N}) \to \beta(\mathbb{N})$.

4. $\hat{A}$ es un subconjunto abierto–cerrado de $\beta(\mathbb{N})$, para cada $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

5. $cl_{\beta(\mathbb{N})}(A) = \hat{A}$, para todo $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

A partir del Teorema 7 se deduce que $\beta(\mathbb{N})$ es la compactación de Stone–Čech de los números naturales $\mathbb{N}$ con la topología discreta cuyo residuo es $\mathbb{N}^*$. Para éste último conjunto, visto como subespacio de $\beta(\mathbb{N})$, se tiene lo siguiente.

Teorema 8. *Sean $A, B \subseteq \mathbb{N}$.*

1. $A^* \cup B^* = (A \cup B)^*$.

2. $A^* \cap B^* = (A \cap B)^*$.

3. $(\mathbb{N} \setminus A)^* = \mathbb{N}^* \setminus A^*$.

4. *$A^* \subseteq B^*$ si y sólo si $A \subseteq^* B$ (es decir, $A \setminus B$ es finito).*

5. *$A^* = B^*$ si y sólo si $A \subseteq^* B$ y $B \subseteq^* A$.*

6. *$A^* = \emptyset$ si y sólo si A es finito.*

Teorema 9. *Sean $A, B \subseteq \mathbb{N}$.*

1. *$\{A^* : A \in [\mathbb{N}]^\omega\}$ es una base de abiertos–cerrados de $\mathbb{N}^*$.*

2. *A^* es un subconjunto abierto–cerrado de $\mathbb{N}^*$, para todo $A \in [\mathbb{N}]^\omega$.*

3. *$cl_{\mathbb{N}^*}(A) = A^*$, para cualquier $A \in [\mathbb{N}]^\omega$.*

4 El punto $\mathcal{F}$–límite de una sucesión

Si la sucesión $(x_n)_n$ converge a un punto x dentro de un espacio topológico X, se cumple entonces que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} \in \mathcal{F}_r$ para toda $V \in \mathcal{N}(x)$. Esto se puede generalizar de la siguiente manera.

Definición 4.1. *Sea X un espacio y $\mathcal{F}$ un filtro libre sobre $\mathbb{N}$. Decimos que un $x \in X$ es punto $\mathcal{F}$–límite de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X (en símbolos, $x = \mathcal{F} - \lim_{n\to\infty} x_n$) si para cada $V \in \mathcal{N}(x)$ se cumple que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} \in \mathcal{F}$.*

En los espacios topológicos de Hausdorff los puntos p–límites son únicos cuando existen y $p \in \mathbb{N}^*$. Para una sucesión $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ se cumple que $x_n \to x$ si y sólo si $x = \mathcal{F}_r - \lim_{n\to\infty} x_n$. Para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dentro de un espacio topológico X, si $x = \mathcal{F}_{\{m\}} - \lim_{n\to\infty} x_n$, para alguna $m \in \mathbb{N}$, entonces $x = x_m$.

La noción de punto $\mathcal{F}$–límite ha sido considerada por muchos matemáticos en diferentes contextos y formas generales. Por ejemplo, Furstenberg [8, p. 179] los consideró en algunas aplicaciones a los sistemas dinámicos en el caso, más general que un filtro, en el cual $\mathcal{F}$ es una familia con la propiedad de la intersección finita (ver también el libro [1]). El caso en el cual $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro fué estudiado por Bernstein [2] en el contexto del análisis no standard. Frolík [7] usó, implicitamente, los puntos p–límites para producir ultrafiltros en $\beta(\mathbb{N})$ mediante una operación que llamó suma de ultrafiltros. Hoy día, todavía muchos matemáticos piensan que han descubierto los puntos $\mathcal{F}$–límites como una noción nueva y así lo manifiestan en sus trabajos.

Para un filtro arbitrario $\mathcal{F}$ sobre los números naturales no es difícil ver que $x = \mathcal{F}-\lim_{n\to\infty} x_n$ si y sólo si $x = p-\lim_{n\to\infty} x_n$ para todo ultrafiltro $p \in \beta(\mathbb{N})$ que contenga a $\mathcal{F}$. De este modo, en algunas situaciones, el estudio de los puntos $\mathcal{F}$–límites se puede reducir a considerar sólo el caso en el cual $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro. Pero en algunos casos es importante también considerar filtros libres.

Teorema 10. *Sea X un espacio. Un punto $x \in X$ es un punto de adherencia del conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ si y sólo si existe $p \in \beta(\mathbb{N})$ tal que $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$.*

Demostración. Es directo a partir de la definición de que todo punto p–límite es un punto de adherencia de la sucesión en cuestión. Para demostrar la necesidad supongamos que x es un punto de adherencia de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Es evidente que la familia $\{\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} : V \in \mathcal{N}(x)\}$ tiene la propiedad de intersección finita. De acuerdo con el Teorema 4 dicha familia está contenida en un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ que denotaremos por p. Se sigue inmediatamente que $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$. $\square$

Para puntos de acumulación se tiene lo siguiente.

Teorema 11. *Sea X un espacio. Un punto $x \in X$ es un punto de acumulación de un conjunto infinito numerable $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ si y sólo si existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$.*

Trivialmente en los espacios topológicos discretos no existen los puntos p–límites de sucesiones infinitas (no triviales). A continuación probaremos que en los espacios compactos siempre existen.

Teorema 12. *Toda sucesión infinita en un espacio compacto X tiene un punto p–límite en X, para todo $p \in \mathbb{N}^*$.*

Demostración. Sea X un espacio compacto y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión infinita en X. Consideremos la familia de subconjuntos compactos $\{cl_X(\{x_n : n \in A\}) : A \in p\}$ de X. Es claro que esta familia tiene la propiedad de intersección finita y por ser X compacto se cumple que $\bigcap_{A\in p} cl(\{x_n :\in A\}) \neq \emptyset$. Tomemos un punto x en esta intersección. Probaremos que $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$. Sean $V \in \mathcal{N}(x)$ y $B = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\}$. Como $x \in cl_X(\{x_n : n \in A\})$, debemos tener que $B \cap A \neq \emptyset$, para cada $A \in p$. Según el Teorema 5, obtenemos que $B \in p$. Por tanto, $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$. $\square$

Una caracterización de la convergencia se puede establecer de la siguiente forma usando puntos p–límites.

Teorema 13. *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión es un espacio X. Entonces, $x_n \to x$ si y sólo si existe un conjunto denso $D \subseteq \mathbb{N}^*$ tal que $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$, para todo $p \in D$.*

Demostración. Necesidad. Si $x_n \to x$, tenemos entonces que $x = \mathcal{F}_r - \lim_{n\to\infty} x_n$. Lo cual implica directamente que $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$, para todo $p \in \mathbb{N}^*$.

Suficiencia. Sea $D \subseteq \mathbb{N}^*$ un subconjunto denso tal que $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$, para todo $p \in D$. Supongamos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a x. Entonces, existe $V \in \mathcal{N}(x)$ tal que $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin V\}$ es infinito. Por nuestra suposición, sabemos que podemos encontrar $p \in \hat{A} \cap D$ tal que $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$, lo cual es imposible. $\square$

Tal y como acabamos de ver, si $x_n \to x$, entonces $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$, para todo $p \in \mathbb{N}^*$. Pero la condición "$x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$ para algún

$p \in \mathbb{N}^*$" por sí sola no garantiza que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a x. Por ejemplo, consideremos la sucesión $(\{n\})_{n\in\mathbb{N}}$ de $\beta(\mathbb{N})$. Para cada $p \in \mathbb{N}^*$, p es el punto p–límite de la sucesión $(\{n\})_{n\in\mathbb{N}}$, pero esta sucesión no converge a ningún punto de $\beta(\mathbb{N})$.

Sea $p \in \mathbb{N}^*$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio X. Para $A \in p$ consideremos la subsucesión $(x_n)_{n\in A}$. Tenemos claramente que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} \in p$ si y sólo si $\{n \in A : x_n \in V\} \in p$, para toda $V \in \mathcal{N}(x)$. Este procedimiento lo indicaremos, cuando sea necesario, como $x = p - lim_{n\in A} x_n$ en donde $A \in p$.

Los puntos p–límites se preservan bajo funciones continuas.

Teorema 14. *Sea $p \in \mathbb{N}^*$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X y $x = p - lim_{n\to\infty} x_n$, entonces $f(x) = p - lim_{n\to\infty} f(x_n)$ para toda función continua $f : X \to Y$.*

Demostración. Fijemos $V \in \mathcal{N}(f(x))$. Como $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}(x)$, se obtiene que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in f^{-1}(V)\} \in p$. De aquí, se sigue que $\{n \in \mathbb{N} : f(x_n) \in V\} \in p$. Por tanto, $f(x) = p - lim_{n\to\infty} f(x_n)$. $\square$

El comportamiento de los puntos p–límites en productos es equivalente al que tienen los puntos p–límites en cada uno de los factores.

Teorema 15. *Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\prod_{i\in I} X_i$ y $p \in \mathbb{N}^*$. Entonces, $x = p - lim_{n\to\infty} x_n$ si y sólo si $x(i) = p - lim_{n\to\infty} x_n(i)$, para todo $i \in I$.*

Demostración. La necesidad se sigue inmediatamente del Teorema 14 por ser las proyecciones continuas. Supongamos que $x(i) = p - lim_{n\to\infty} x_n(i)$, para todo $i \in I$. Sean $\{i_0, \cdots, i_l\} \subseteq I$ y, para cada $j \leq l$, tomemos un subconjunto abierto V_{i_j} de X_{i_j} que contenga el punto $x(i_j)$. Consideremos el abierto básico del producto $V = \bigcap_{j\leq} [i_j, V_{i_j}]$ que es una vecindad de x. Por hipótesis, para cada $j \leq l$, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n(i_j) \in V_{i_j}\}$ está en el ultrafiltro p. Por lo cual, se cumple la relación

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} = \bigcap_{j\leq l} \{n \in \mathbb{N} : x_n(i_j) \in V_{i_j}\} \in p\,.$$

Por tanto, $x = p - lim_{n\to\infty} x_n$. $\square$

La extensión de Stone de una función de $\mathbb{N}$ en cualquier espacio compacto se puede describir, en nuestro contexto, de la siguiente forma.

Teorema 16. *Sea X un espacio compacto y $f : \mathbb{N} \to X$ una función. Entonces, $\hat{f}(p) = p - lim_{n\to\infty} f(n)$, para todo $p \in \beta(\mathbb{N})$.*

Demostración. Como $p = p - lim_{n\to\infty} n$, el resultado se obtiene como una aplicación directa del Teorema 14. □

Usando los puntos p–límites extenderemos la operación aditiva de los números narturales a $\beta(\mathbb{N})$. Para $p \in \beta(\mathbb{N})$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$p + n = p - \lim_{m\to\infty} m + n\,.$$

Ahora si $p, q \in \beta(\mathbb{N})$, entonces definimos

$$p + q = q - \lim_{n\to\infty} p + n\,.$$

Combinatoriamente se satisface la identidad

$$p + q = \{A \subseteq \mathbb{N} : \{m \in \mathbb{N} : \{n \in \mathbb{N} : m + n \in A\} \in p\} \in q\}\,.$$

Teorema 17. *La adición de ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$ cumple las siguientes propiedades.*

1. *$+$ es una operación asociativa en $\beta(\mathbb{N})$.*
2. *Esta operación de $\beta(\mathbb{N})$ extiende la adición original de $\mathbb{N}$.*

El libro de Hindman y Strauss [17] es una excelente tratado acerca de esta adición en un contexto mucho más general. El siguiente resultado acerca de la existencia de idempotentes en $\beta(\mathbb{N})$ es un caso particular de un resultado de Ellis [5] (ver [17]).

Teorema 18. *Existe $p \in \beta(\mathbb{N})$ tal que $p + p = p$.*

También es posible encontrar dos ultrafiltros $p, q \in \beta(\mathbb{N})$ tales que $p + q \neq q + p$ (la construcción de estos ultrafiltros se puede consultar ya sea en [10] o en [17]).

5 Espacios numerablemente compactos

Una generalización importante de compacidad es la que a continuación enunciamos.

Definición 5.1. *Decimos que un espacio topológico X es númerablemente compacto si todo subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación.*

Todo espacio compacto es numerablemente compacto y hay muchos ejemplos de espacios numerablemente compactos que no son compactos. El lector puede encontrar algunos en el libro [6].

Del Teorema 11 obtenemos la siguiente caracterización de la compacidad numerable.

Teorema 19. *Un espacio topológico X es númerablemente compacto si y sólo si para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X existen $x \in X$ y $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $x = p - lim_{n\to\infty} x_n$.*

Este resultado sugiere considerar la siguiente clase de espacios topológicos.

Definición 5.2. **[2]** *Sea $p \in \mathbb{N}^*$. Un espacio topológico X es p–compacto si toda sucesión de X tiene un punto p–límite.*

Es claro que la compacidad implica la p–compacidad para todo $p \in \mathbb{N}^*$, lo cual implica la p–compacidad para algún $p \in \mathbb{N}^*$, lo cual implica la compacidad numerable. Veremos ejemplos que muestran la diferencia de estos conceptos. Lo primero que podemos observar es que la compacidad numerable no es productiva y la p–compacidad sí lo es.

Teorema 20. **[2]** *Para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$, el producto de espacios p–compactos es p–compacto.*

De hecho la p–compacidad caracteriza a los espacios numerablemente compactos cuyas potencias son todas numerablemente compactas.

Teorema 21. **[16]** *Las siguientes condiciones son equivalentes para un espacio topológico X.*

1. *Todas las potencias de X son numerablemente compactas.*
2. *X es p–compacto para algún $p \in \mathbb{N}^*$.*
3. *$X^{2^{\mathfrak{c}}}$ es numerablemente compacto.*

Ahora veamos un ejemplo que testifica que la compacidad numerable no se preserva bajo productos. En 1967, Frolík [7] construyó, para cada número natural positivo n, un espacio topológico X tal que X^n es numerablemente compacto pero X^{n+1} no lo es. Para facilitar la construcción de dichos espacios y dar otros ejemplos necesitaremos los siguientes pre–órdenes en $\mathbb{N}^*$.

Definición 5.3. *Sean* $p, q \in \mathbb{N}^*$.

1. *Decimos que* $p \leq_{RK} q$ *si existe* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tal que* $\hat{f}(q) = q - lim_{n\to\infty} f(n) = p$.
2. *Decimos que* $p \leq_{RF} q$ *si existe un encaje* $f : \mathbb{N} \to \beta(\mathbb{N})$ *tal que* $\hat{f}(p) = p - lim_{n\to\infty} f(n) = q$.
3. *Decimos que* $p \leq_C q$ *si todo espacio* q*–compacto es* p*–compacto.*

El primer pre–órden fué introducido por Rudin y Keisler, el segundo por Rudin y Frolík y el tercero por Comfort [9]. El libro [4] contiene muchas propiedades sobre los dos primeros pre–órdenes. Enlistamos las propiedades básicas de estos pre–órdenes en el siguiente teorema (la demostración se pueden consultar en [4]).

Teorema 22. *Sean* $p, q \in \mathbb{N}^*$.

1. $p \leq_{RK} q$ *y* $q \leq_{RK} p$ *si y sólo si existe una biyección* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tal que* $\hat{f}(p) = q$. *En este caso escribimos* $p \sim q$ *y decimos que son Rudin–Keisler comparables.*
2. $p \sqsubset_{RF} q$ *implica* $p \leq_{RK} q$ *y* $p \not\sim q$.
3. *El conjunto* $T(p) = \{q \in \mathbb{N}^* : p \sim q\}$ *tiene tamaño* $\mathfrak{c}$ *para cada* $p \in \mathbb{N}^*$.
4. *El conjunto de predecesores* $P_{RF}(p) = \{q \in \mathbb{N}^* : q \leq_{RK} p\}$ *tiene tamaño* $\mathfrak{c}$ *para cada* $p \in \mathbb{N}^*$.
5. *El conjunto de sucesores* $S_{RF}(p) = \{q \in \mathbb{N}^* : p \sqsubset_{RF} q^2\}$ *tiene tamaño* $2^{\mathfrak{c}}$ *para cada* $p \in \mathbb{N}^*$.
6. *Dados* $p, q, r \in \mathbb{N}^*$, *si* $p \leq_{RF} r$ *y* $q \leq_{RF} r$, *entonces* $p \leq_{RF} q$ *o* $q \leq_{RF} p$.
7. *Si* $p \leq_{RK} q$, *entonces* $p \leq_C q$.

Ya tenemos todo lo necesario para empezar con la construcción del ejemplo.

Ejemplo 5.1. **[7]** *Para cada número entero positivo* n *existe un espacio* X *tal que* X^n *es numerablemente compacto, pero* X^{n+1} *no es numerablemente compacto.*

[2] $p \sqsubset_{RF} q$ significa que $p \sqsubseteq_{RF} q$ y $p \not\sim q$.

Demostración. Kunen [19] estableció la existencia de $\mathfrak{c}$ P–puntos débiles[3] de $\mathbb{N}^*$ que son Rudin–Keisler incomparables entre sí. De éstos tomamos sólo ω_1 y los enumeramos $\{p_\xi : \xi < \omega_1\}$. Para cada $\xi < \omega_1$ definimos $X_\xi = T(p_\xi) \cup S_{RF}(p_\xi)$. Estos conjuntos cumplen las siguientes propiedades.

1. $X_\xi \cap X_\zeta = \emptyset$ si $\xi < \zeta < \omega_1$.

2. $S_{RF}(p_\xi) \cap (\bigcup_{\xi \neq \zeta < \omega_1} X_\zeta) = \emptyset$.

3. Si $f : \mathbb{N} \to \bigcup_{\zeta < \xi} X_\zeta \cup \mathbb{N}$ es un encaje, entonces $\hat{f}(p_\xi) \in X_\xi$, para cada $\xi < \omega_1$.

Por otro lado, para cada $A \subseteq \omega_1$, definimos

$$P_A = \mathbb{N} \cup \left(\bigcup_{\xi \in A} X_\xi \right).$$

Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega_1)$ finito. No es difícil deducir las siguientes afirmaciones a partir de las propiedades **1**, **2** y **3**.

1. Si $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$, entonces $P_{\mathcal{A}} = \prod_{A \in \mathcal{A}} P_A$ no es numerablemente compacto.

2. Si $\bigcap \mathcal{A}$ es cofinal en ω_1, entonces $P_{\mathcal{A}} = \prod_{A \in \mathcal{A}} P_A$ es numerablemente compacto.

La primera afirmación se sigue del hecho de que la diagonal de $P_{\mathcal{A}}$ es homeomorfa a $\mathbb{N}$, y por ello $P_{\mathcal{A}}$ no puede ser numerablemente compacto. Supongamos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de $P_{\mathcal{A}}$. Para cada $A \in \mathcal{A}$, sea $\pi_A : P_{\mathcal{A}} \to P_A$ la función proyección. Sin perder generalidad podemos suponer que cada sucesión $(\pi_A(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es o bien eventualmente constante o es eventualmente inyectiva. Adicionalmente, supondremos que si la sucesión $(\pi_A(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es inyectiva, entonces el conjunto $\{\pi_A(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es discreto. Podemos seleccionar $\xi < \omega_1$ de tal forma que $\pi_A(x_n) \in \bigcup_{\zeta < \xi} X_\zeta$, para cada $A \in \mathcal{A}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\xi \in \bigcap \mathcal{A}$. Dado $A \in \mathcal{A}$, definimos $f_A : \mathbb{N} \to \bigcup_{\zeta < \xi} X_\zeta$ como $f_A(n) = \pi_A(x_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $\widehat{f_A}(p_\xi) \in S_{RF}(p_\xi) \subseteq X_\xi$, para todo $A \in \mathbb{N}$. De aquí y por el Teorema 15, la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene un punto p_ξ–límite

[3] Se dice que un punto de un espacio topológico es un *P–punto débil* si no es punto de acumulación de ningún subconjunto numerable.

(el cual es $(\widehat{f_A}(p_\xi))_{A\in\mathcal{A}})$ en el producto $P_\mathcal{A}$. Esto demuestra que $P_\mathcal{A}$ es numerablemente compacto.

Veamos ahora cómo construir los conjuntos A's. Fijemos $0 < n \in \mathbb{N}$. Para cada $i \leq n+1$, sea $A_i = \{\alpha < \omega_1 : \alpha = \beta + j, \beta < \omega_1 \text{es límite}, j \in \mathbb{N} \text{y} j \not\equiv i \text{mod} n+1\}$. Si $I \subseteq n+1$ tiene tamaño $< n+1$, entonces $\bigcap_{i\in I} A_i$ no cofinal en ω_1. Por otro lado es evidente que $\bigcap_{i\leq n+1} A_i = \emptyset$. □

Este ejemplo de Frolík muestra de manera natural el uso que se les puede dar a los puntos p–límites, sobre todo cuando se pretende construir espacios numerablemente compactos.

Daremos enseguida otros subespacios interesantes de $\beta(\mathbb{N})$.

Definición 5.4. *Para cada $p \in \mathbb{N}^*$, definimos*

$$\beta_p(\mathbb{N}) = \bigcap \{X : \mathbb{N} \subseteq X \subseteq \beta(\mathbb{N}) \, y \, X \textit{ es } p - \textit{compacto}\} \, .$$

Como la intersección de espacios p–compactos es p–compacto, el subespacio $\beta_p(\mathbb{N})$ es un espacio p–compacto que no es compacto, pues es denso y propio en $\beta(\mathbb{N})$, para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$. Mediante una iteración de ω_1 pasos se puede construir cada uno de los espacios $\beta_p(\mathbb{N})$ y ver que su cardinalidad es igual a $\mathfrak{c}$ (ver [9]).

Teorema 23. **[9]** *Sean $p, q \in \mathbb{N}^*$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. $p \leq_C q$.
2. $\beta_p(\mathbb{N}) \subseteq \beta_q(\mathbb{N})$.
3. $\beta_q(\mathbb{N})$ *es p–compacto.*
4. *Existe una función $f : \mathbb{N} \to \beta_q(\mathbb{N})$ tal que $\hat{f}(q) = p$.*

El siguiente teorema establece cierta igualdad de comportamiento de los pre–órdenes $\leq_{RK}$ y $\leq_C$ con respecto a los puntos P–débiles de $\mathbb{N}^*$.

Teorema 24. **[9]** *Sean $p, q \in \mathbb{N}^*$. Si $p \leq_C q$ y p es un P–punto débil, entonces $p \leq_{RK} q$.*

Fijemos un punto $p \in \mathbb{N}^*$. Definimos $T_C(p) = \{q \in \mathbb{N}^* : p \leq_C q \leq_C p\}$. $T_C(p)$ se conoce como el *tipo de Comfort* de p. Se sabe que $T_C(p)$ es numerablemente compacto y si p es un P–punto débil de $\mathbb{N}^*$, entonces $T_C(p)$ es p–compacto (ver [9]). Se desconocen aún ciertas propiedades topológicas de $T_C(p)$ como la que se enuncia en la siguiente pregunta.

Pregunta 5.1. **[9]** *¿Para cada $p \in \mathbb{N}$, es $T_C(p)$ un espacio p–compacto?*

6 Puntos p–límites en espacios métricos

Sea $p \in \mathbb{N}^*$. Si en un espacio métrico X se tiene que $x = p\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$, entonces podemos hallar una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de la sucesión original $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \to x$. Pero en lo general no se cumple la convergencia $x_n \not\to x$. Por ejemplo, si $A \in p$ satisface que $B = \mathbb{N} \setminus A \in [\mathbb{N}]^\omega$, entonces la sucesión $(\chi_A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente en $\mathbb{R}$ y $B = \{n \in \mathbb{N} : \chi_A(n) = 0\} \notin p$. En relación a ésto comentamos lo siguiente.

Teorema 25. *Sea X un espacio topológico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente. Si $p \in \mathbb{N}^*$ y existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \in p$ y $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$, entonces se cumple que $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$.*

Demostración. Sea $V \in \mathcal{N}(x)$. Por hipótesis, sabemos que $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq^* \{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\}$. Así, $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} \in p$. Por lo tanto, $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$. $\square$

Podemos preguntarnos que pasa con el recíproco del teorema anterior. Para poder contestar esta pregunta necesitamos introducir los ultrafiltros conocidos como P–puntos. Adicionalmente agregaremos otros tipos de filtros importantes que usaremos.

Definición 6.1. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro libre sobre $\mathbb{N}$.*

1. *$\mathcal{F}$ es un P–filtro si para cada sucesión decreciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{F}$ existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subseteq^* A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*
2. *$\mathcal{F}$ es un P–filtro$^+$ si para cada sucesión decreciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{F}$ y para cada $A \in \mathcal{F}^+$ existe $B \in \mathcal{F}^+$, tal que $B \subseteq A$ y $B \subseteq^* A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*
3. *$\mathcal{F}$ es un P–filtro débil si para cada sucesión decreciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{F}$ existe $B \in \mathcal{F}^+$ tal que $B \subseteq^* A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Teniendo a la mano los conceptos necesarios veamos qué pasa con el recíproco del Teorema 25.

Teorema 26. **[14]** *Para cada $p \in \mathbb{N}^*$, las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *p es un P–punto.*
2. *En todo espacio métrico X, para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X y para cada $x \in X$, tenemos que $x_n \to_p x$ si y sólo si podemos encontrar una sucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ del tal forma que $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \in p$ y $x_{n_k} \to_{k\to\infty} x$.*

3. *Para cada sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de números reales y para cada* $x \in \mathbb{R}$, *tenemos que* $x_n \to_p x$ *si y sólo si podemos hallar una sucesión* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \in p$ *y* $x_{n_k} \to_{k\to\infty} x$.

Siguiendo las ideas de este teorema podemos clasificar los siguientes fitros sobre $\mathbb{N}^*$.

Definición 6.2. *Sea* $\mathcal{F}$ *un filtro libre sobre* $\mathbb{N}$.

1. $\mathcal{F}$ *es un* Q*–filtro si para cada partición* $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ *de* $\mathbb{N}$ *en conjuntos finitos, existe* $B \in \mathcal{F}$ *tal que* $|B \cap A_n| \leq 1$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

2. $\mathcal{F}$ *es un* Q*–filtro*$^+$ *si para cada* $A \in \mathcal{F}^+$ *y para cada partición* $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ *de* A *en conjunto finitos, existe* $B \in \mathcal{F}^+$ *tal que* $B \subseteq A$ *y* $|B \cap A_n| \leq 1$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

3. $\mathcal{F}$ *es un* Q*–filtro débil si para cada partición* $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ *de* $\mathbb{N}$ *en conjuntos finitos, existe* $B \in \mathcal{F}^+$ *tal que* $|B \cap A_n| \leq 1$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Definición 6.3. *Sea* $\mathcal{F}$ *un filtro libre sobre* $\mathbb{N}$.

1. $\mathcal{F}$ *es selectivo si* $\mathcal{F}$ *es un* P*–filtro y un* Q*–filtro.*

2. $\mathcal{F}$ *es selectivo*$^+$ *si* $\mathcal{F}$ *es un* P*–filtro*$^+$ *y un* Q*–filtro*$^+$.

3. $\mathcal{F}$ *es débilmente selectivo si para cada particón* $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ *de* $\mathbb{N}$ *tal que* $A_n \notin \mathcal{F}^+$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *existe* $B \in \mathcal{F}^+$ *tal que* $|B \cap A_n| \leq 1$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

El lector puede consultar el artículo [13] para ver ejemplos que distinguen todas las clases de filtros que han sido introducidas en esta sección.

Teorema 27. [14] *Para cada* $p \in \mathbb{N}^*$, *las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. p *es selective.*

2. *En todo espacio métrico* X, *para cada sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* X *y para cada* $x \in X \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, *tenemos que* $x_n \to_p x$ *con* $x \neq x_n$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *si y sólo si existe una subsucesión* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *y una sucesión creciente de enteros positivos* $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \in p$ *y* $\frac{1}{m_{k+1}} \leq d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{m_k}$, *para cada* $k \in \mathbb{N}$.

3. *Para cada sucesión de números reales* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y para cada* $x \in \mathbb{R}\setminus\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, *tenemos que* $x_n \to_p x$ *con* $x \neq x_n$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *si y sólo si existe una subsucesión* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *y una sucesión creciente de enteros positivos* $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \in p$ *y* $\frac{1}{m_{k+1}} \leq d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{m_k}$, *para cada* $k \in \mathbb{N}$.

Para continuar con este tipo de caracterizaciones daremos algunos conceptos básicos de análsis funcional. Sea X un espacio vectorial real. Una norma en X es una función $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes condiciones.

1. $\| x \| \geq 0$ para toda $x \in X$;
2. $\| x \| = 0$ si y sólo si $x = 0$;
3. $\| rx \| = | r | \| x \|$, para cada $x \in X$ y para cada $r \in \mathbb{R}$; y
4. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ para todo $x, y \in X$.

Diremos que $(X, \|\cdot\|)$ es un *espacio normado*. Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un *espacio de Banach* si es un espacio métrico completo con la distancia $\| x - y \|$. Ejemplos de espacios de Banach son los números reales $\mathbb{R}$;

$$\ell_1 = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty \right\},$$

con la norma $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$; y

$$\ell_\infty = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup\{|a_i| : i \in \mathbb{N}\} < \infty \right\},$$

con la norma $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup\{|a_i| : i \in \mathbb{N}\} < \infty$.

Para cada entero $n \in \mathbb{N}$, definimos $e_n \in \ell_1$ como $e_n(m) = 0$ si $m \neq n$, y $e_n(n) = 1$. Es bastante claro de la definición que $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base del espacio ℓ_1. Además, esta base cumple que para cada $x \in \ell_1$ existe una única sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \to x\,.$$

En general, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en un espacio de Banach X, entonces la notación $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = x$ significa que $\sum_{i=1}^{n} x_i \to x$. Recordemos que el *espacio dual* de un espacio de Banach X es el conjunto X^* de todas las funcionales continuas de X. La *topología débil* en X es la topología más débil en X que hace a todos lo elementos de X^* continuos. Para cada número entero $n \in \mathbb{N}$, el símbolo $e_n^* : \ell_1 \to \mathbb{R}$ donota el funcional continuo $e_n^*(x) = x_n$, para todo $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$. La π*–topología* en un espacio de Banach X es la topología más débil en X que hace a todas los funcionales $\{e_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ continuos. En lo que respecta a la convergencia en un epacio de Banach X, la convergencia en X con respecto a su norma se denota por $x_n \to x$. Por otro lado $x_n \xrightarrow{w} x$ denota la convergencia con respecto a la topología débil de X. Observamos que $x_n \xrightarrow{w} x$ si y sólo si $f(x_n) \to f(x)$, para todo $f \in X^*$. Finalmente el símbolo $x_n \xrightarrow{\pi} x$ denota la convergencia en la π–topología de X. Similarmente se tiene que $x_n \xrightarrow{\pi} x$ si y sólo si $e_m^*(x_n) \to e_m^*(x)$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Teorema 28. **[13]** *Sea $\mathcal{F}$ un filtro libre sobre $\mathbb{N}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *$\mathcal{F}$ es un P–filtro.*
2. *Para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en ℓ_1,si $x_n \xrightarrow{w}_{\mathcal{F}} 0$, entonces podemos hallar una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $B = \{n_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}$ y $x_{n_k} \xrightarrow{\pi} 0$.*

Teorema 29. **[13]** *Sea $\mathcal{F}$ un filtro libre sobre $\mathbb{N}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *$\mathcal{F}$ es un P–filtro$^+$.*
2. *Para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en ℓ_1, si $x_n \xrightarrow{w}_{\mathcal{F}} 0$, entonces para cada $A \in \mathcal{F}^+$ existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $B = \{n_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}^+$, $B \subseteq A$ y $x_{n_k} \xrightarrow{\pi} 0$.*

Teorema 30. **[13]** *Sea $\mathcal{F}$ un filtro libre sobre $\mathbb{N}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *$\mathcal{F}$ es un P–filtro débil.*
2. *Para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en ℓ_1, si $x_n \xrightarrow{w}_{\mathcal{F}} 0$, entonces existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $B = \{n_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}^+$ y $x_{n_k} \xrightarrow{\pi} 0$.*

Teorema 31. **[13]** *Para un filtro libre $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{N}$ las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *$\mathcal{F}$ es un Q–filtro.*

2. *Para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en ℓ_1, si $x_n \xrightarrow{\pi} 0$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existen $B = \{n_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}$ y una sucesión esctrictamente creciente de números naturales $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\ell_{k-1}} |x^i_{n_k}| &< \varepsilon\,, \\ \sum_{i=\ell_k+1}^{\infty} |x^i_{n_k}| &< \varepsilon\,, \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 32. **[13]** *Para un filtro libre $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{N}$ las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *$\mathcal{F}$ es un Q–filtro$^+$.*

2. *Para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en ℓ_1, si $A \in \mathcal{F}^+$ y $x_n \xrightarrow{\pi} 0$ en A, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $B = \{n_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}^+$, y una sucesión creciente de números naturales $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $B \subseteq A$ y*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\ell_{k-1}} |x^i_{n_k}| &< \varepsilon \\ \sum_{i=\ell_k+1}^{\infty} |x^i_{n_k}| &< \varepsilon\,, \end{aligned} \tag{6.1}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 33. **[13]** *Para un filtro libre $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{N}$ las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *$\mathcal{F}$ es un Q–filtro débil.*

2. *Para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en ℓ_1 y para cada $\varepsilon > 0$ se cumple que si $x_n \xrightarrow{\pi} 0$, entonces existen $B = \{n_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}^+$ y una sucesión creciente de números naturales $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$\sum_{i=1}^{\ell_{k-1}} |x_{n_k}^i| \; < \; \varepsilon\,,$$
$$\sum_{i=\ell_k+1}^{\infty} |x_{n_k}^i| \; < \; \varepsilon\,,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 34. **[13]** *Para un filtro libre* $\mathcal{F}$ *sobre* $\mathbb{N}$ *las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. $\mathcal{F}$ *es selectivo.*

2. *Para cada sucesión sin ceros* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* ℓ_1*, si* $x_n \xrightarrow{w}_{\mathcal{F}} 0$*, entonces existen una subsucesión* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *y una sucesión creciente de números naturales* $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *tales que* $B = \{n_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}$ *y*

$$\frac{1}{m_{k+1}} \leq \|x_{n_k}\| < \frac{1}{m_k}\,,$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 35. **[13]** *Para un filtro libre* $\mathcal{F}$ *sobre* $\mathbb{N}$ *las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. $\mathcal{F}$ *es selectivo*$^+$.

2. *Para cada sucesión sin ceros* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* ℓ_1*, si* $x_n \xrightarrow{w}_{\mathcal{F}} 0$*, entonces para cada* $A \in \mathcal{F}^+$ *existen una subsucesión* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$*, una sucesión creciente de números naturales* $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$*, y* $B = \{n_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}^+$ *tal que* $B \subseteq A$ *y*

$$\frac{1}{m_{k+1}} \leq \|x_{n_k}\| < \frac{1}{m_k}\,,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Las caracterizaciones anteriores se pueden realizar dentro de un contexto mucho más general reemplazando ℓ_1 por una espacio de Banach con una base de Schauder[4]. El lector puede consultar el artículo [13] para ver los detalles de estas generalizaciones. Adicionalmente en [13], se introducen principios de selección y de perturbación usando convergencia con respecto a un filtro libre sobre $\mathbb{N}$, por supuesto considerando solamente espacios de Banach con una base de Schauder. El siguiente problema podría ser interesante para algún lector.

Problema 6.1. [13] *Caracterizar los filtros débilmente selctivos usando convergencia con respecto a un filtro de sucesiones de ℓ_1.*

7 Topologías en el espectro de un anillo

Todos nuestros anillos serán conmutativos con elemento identidad. El *espectro* de un anillo R se denota por el símbolo $Spec(R)$. Recordemos que $Spec(R)$ es el conjunto de todos los ideales primos propios de anillo R. El ideal de un anillo R generado por un subconjunto A se denota por $\langle A\rangle$. Si I es un ideal de R, entonces definimos $V(I) = \{P \in Spec(R) : I \subseteq P\}$ y $D(a) = Spec(R) \setminus V(a)$, donde $V(a) = V(\langle a\rangle) = \{I \in Spec(R) : a \in I\}$, para cada $a \in R$. La *topología de Zariski* ($=\tau_Z$) es la primera topología que se definió en $Spec(R)$ que se tiene registrada en la literatura matemática. Esta topología fué introducida por Zariski [23] en 1944. Posteriormente, en el año de 1969, apareció la *topología de parche* ($=\tau_\pi$). La topología de parche es maś fina que la de Zariski. Recordemos que la topología de Zariski es aquella cuyos conjuntos cerrados son de la forma $V(I)$, para algún ideal I del anillo R. Por otra parte, la topología de parche es la topología más pequeña de $Spec(R)$ en la cual los conjuntos $V(I)$, para un ideal arbitrario I de R, y $D(a)$, para un elemento arbitrario $a \in R$, son cerrados. Es así evidente que $\tau_z \subseteq \tau_\pi$. Se sabe que la topología de parche es siempre de Hausdorff y que la topología de Zariski es de Hausdorff si y sólo si cada ideal primo de R es máximo.

Para definir otras topologías en el espectro de una anillo necesitamos la siguiente noción.

Definición 7.1. [12] *Sea R un anillo y $p \in \mathbb{N}^*$. El p–límite de una sucesión $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ideales de R es el ideal*

[4] Una sucesión $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de un espacio de Banach X se dice que es una *base de Schauder* de X, si para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n = x$

$$p - lim_{n\in\mathbb{N}} P_n = \{a \in R : \{n \in \mathbb{N} : a \in P_n\} \in p\}\,.$$

Efectivamente, no es difícil ver que si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de ideales primos de R y $p \in \mathbb{N}^*$, entonces $p - lim_{n\in\mathbb{N}} P_n$ es también un ideal primo de R. Vale la pena observar que

$$p - lim_{n\in\mathbb{N}} P_n = \bigcup_{A\in p} \left(\bigcap_{n\in A} P_n \right)\,.$$

Los conjuntos que nos ayudan a definir las nuevas topologías son los siguientes.

Definición 7.2. [**12**] *Sea R un anillo y sea $p \in \mathbb{N}^*$. Decimos que $C \subseteq Spec(R)$ es p–cerrado si para cada sucesión $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en C, se cumple que $p - lim_{n\in\mathbb{N}} I_n \in C$.*

En base a la definición anterior, nuestra nueva topología es la siguiente.

Definición 7.3. [**12**] *Sea R un anillo y $p \in \mathbb{N}^*$. Los subconjuntos p–cerrados de $Spec(R)$ forman los subconjuntos cerrados de una topología τ_p en $Spec(R)$.*

Sea R un anillo. Para cada $p \in \mathbb{N}^*$, la topología τ_p se denota como la *p–topología* en $Spec(R)$. Nótese que $\tau_\pi \subseteq \tau_p$, para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$. Por ello, sabemos que la topología τ_p es de Hausdorff, para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$.

El siguiente lema nos conecta con la noción de punto p–límite.

Lema 7.1. [**12**] *Sean R un anillo y $p \in \mathbb{N}^*$. Si $\{I_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq Spec(R)$ es un conjunto infinito, entonces el ideal $p - lim_{n\in\mathbb{N}} P_n$ es un punto de acumulación del conjunto $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ dentro de la topología τ_p.*

Como consecuencia del lema anterior se tiene el siguiente resultado.

Teorema 36. [**12**] *Sea R un anillo. La topología τ_p es numerablemente compacto, para todo $p \in \mathbb{N}^*$.*

La idea principal para definir la topología τ_p se puede extender para definir topologias en $\beta(\mathbb{N})$. En efecto, un subconjunto C de $\beta(\mathbb{N})$ es *p–cerrado* si para cada sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en C se cumple que $p - \lim_{n\to\infty} p_n \in C$. También se cumple que los conjuntos p–cerrados son los cerrados de una topología σ_p en $\beta(\mathbb{N})$. Con estas topologías y usando los P–puntos débiles de Kunen [18] podemos garantizar que estas topologías τ_p's son realmente nuevas y distintas a las de Zariski y parche (los detalles se pueden consultar en [12]). Efectivamente, en el siguiente resultado podemos ver cómo se distinguen.

Teorema 37. [12] *Para cada $p \in \mathbb{N}^*$, el espacio topológico $(Spec(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}), \tau_p)$ no es compacto.*

Con pequeñas modificaciones y siguiendo la idea principal de la demostración del teorema anterior, es también posible demostrar que el espacio topológico $(Spec(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}), \tau_p)$ tampoco puede ser compacto, para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$. La siguiente pregunta fue formulada por el árbitro del artículo [12].

Pregunta 7.1. [12] *Dado $p \in \mathbb{N}^*$, ¿es la p–topología del espectro de un anillo numerable compacta ?*

Veamos qué relación guardan las topologiía τ_p's con las topologías σ_p's.

Teorema 38. [12] *Sean p y q dos ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) $p \leq_C q$;

(2) $\tau_q \subseteq \tau_p$ *en* $Spec(R)$, *para cualquier anillo* R;

(3) $\tau_q \subseteq \tau_p$ *en* $Spec(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})$;

(4) $\sigma_q \subseteq \sigma_p$ *en* $\beta(\mathbb{N})$;

(5) $cl_{\sigma_p}\mathbb{N} \subseteq cl_{\sigma_q}\mathbb{N}$;

(6) σ_q *es* p*–compacto;*

(7) τ_q *es* p*–compacto en* $Spec(R)$, *para cualquier anillo* R; *y*

(8) τ_q *es* p*–compacto en* $Spec(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})$.

Como mencionamos anteriormente Kunen [18] demostró la existencia de P–puntos débiles en $\mathbb{N}^*$. Simon [20] estableció la existencia de $2^{\mathfrak{c}}$ P–puntos débiles de N^* que son RK–incomparables entre sí. Denotemos por W el conjunto de estos P–puntos débiles. Por otra parte, sabemos que el pre–órden de Rudin–Keisler es equivalente al pre–órden de Comfort en el conjunto de P–puntos débiles de $\mathbb{N}^*$ (Teorema 24). De acuerdo con el Teorema 38 las topologías $\{\tau_p : p \in W\}$ de $Spec(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})$ no son homeomorfos entre sí.

Teorema 39. **[12]** *Existen* $2^{\mathfrak{c}}$ τ_p*–topologías en* $Spec(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})$ *no homeomorfos entre sí.*

8 Sistemas dinámicos discretos

Un *sistema dinámico* es un par (X, f) en donde X es un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ es una función continua. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^n : X \to X$ denota la n*–iterada* de f. Usando puntos p–límites es posible generalizar esta noción de iteración.

Definición 8.1. *Sea* $f : X \to X$ *una función y supongamos que* X *es un espacio compacto. Para cada* $p \in \mathbb{N}^*$*, definimos* $f^p : X \to X$ *como* $f^p(x) = p - lim_{n\to\infty} f^n(x)$*, para cada* $x \in X$*. La función* f^p *es la* p*–iterada de* f*, para cada* $p \in \mathbb{N}^*$*.*

Como X es un espacio compacto, la función f^p está bien definida en todo punto de X, para todo $p \in \mathbb{N}^*$. El siguiente resultado, que establece la principal relación entre estas p–iteradas, aparece en [3].

Teorema 40. *En cualquier sistema dinámico* (X, f) *se cumple la relación*

$$f^p \circ f^q = f^{q+p} ,$$

para todo $p, q \in \beta(\mathbb{N})$*.*

Contrario a las n–iteradas de una función continua f, las p–iteradas f^p no son en general continuas. Por ejemplo, pongamos $X = [0, 1]$ y definimos $f : X \to X$ por $f(x) = x^2$ para todo $x \in X$. Si $p \in \mathbb{N}^*$, entonces tenemos que $f^p(x) = 0$, para todo $x \in [0, 1)$, y $f^p(1) = 1$. Lo cual nos asegura que la función f^p es discontinua en 1, para todo $p \in \mathbb{N}^*$. Aún se desconoce la existencia de un ejemplo de una función continua $f : X \to X$ y dos ultrafiltros $p, q \in \mathbb{N}^*$ tales que f^p sea continua y f^q sea discontinua. Para el caso cuando $X = [0, 1]$ es el intervalo unitario Szuca [21] demostró que la continuidad de una p–iterada implica la continuidad de todas.

Ahora enunciamos una caracterización muy útil de la continuidad de una p–iterada.

Teorema 41. **[14]** *Sea* (X, f) *un sistema dinámico con* X *y* $p \in \mathbb{N}^*$*. Para un punto* $x \in X$*, las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. f^p *es continua en* x*.*

2. Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $y \in X$ y $d(x,y) < \delta$, entonces $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon\} \in p$.

Veamos a continuación una propiedad de tipo uniforme cuando suponemos la continuidad de una p–iterada en todo el espacio.

Teorema 42. **[14]** *Sea (X, f) un sistema dinámico y $p \in \mathbb{N}^*$. Entonces, f^p es continua si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in X$ y $d(x,y) < \delta$, entonces se cumple que $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon\} \in p$.*

Enseguida analizaremos algunas propiedades de continuidad de las p–iteradas.

Definición 8.2. *Una familia de funciones $\mathcal{F}$ entre espacios métricos (X, d_X) y (Y, d_Y) es equicontinua en un punto $x \in X$ si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $y \in X$ y $d_X(x,y) < \delta$, entonces $d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$, para todo $f \in \mathcal{F}$. La familia $\mathcal{F}$ es equicontinua si es equicontinua en todo punto de X.*

Esta noción de equicontinuidad nos asegura la continuidad de algunas p–iteradas en algunos casos.

Teorema 43. **[14]** *Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Sea $\{p_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \beta(\mathbb{N})$ y supongamos que la familia $\{f^{p_n} : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua en el punto x. Entonces, f^q es continua en x, para todo $q \in cl_{\mathbb{N}^*}(\{p_n : n \in \mathbb{N}\})$.*

Otras funciones importantes asociadas a los puntos p–límites son las siguientes.

Definición 8.3. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Para cada $x \in X$, la función $f_x := p \mapsto f^p(x) : \beta(\mathbb{N}) \to X$ denota la extensión de Stone de la función (continua) $n \mapsto f^n(x) : \mathbb{N} \to X$.*

Cuando el espacio X es métrico y compacto, muchas de estas funciones coinciden en subconjuntos grandes de $\mathbb{N}^*$.

Teorema 44. **[14]** *Sea (X, f) un sistema dinámico. Para cada $Y \in [X]^\omega$ y para cada $p \in \mathbb{N}^*$ existe un subconjunto $N \subseteq \mathbb{N}^*$ de tamaño $2^{\mathfrak{c}}$ tal que $f_x(p) = f^p(x) = f^q(x) = f_x(q)$ para todo $q \in N$ y para todo $x \in Y$.*

También muchas p–iteradas coinciden en algunos casos.

Teorema 45. **[14]** *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto numerable. Para cada $p \in \mathbb{N}^*$ existe un subconjunto $N \subseteq \mathbb{N}^*$ de tamaño $2^{\mathfrak{c}}$ tal que $f^p = f^q$ para todo $q \in N$.*

Veamos a continuación cómo la propiedad combinatoria de un P–punto influye en la continuidad o discontinuidad de las p–iteradas.

Teorema 46. **[14]** *Sea (X, f) un sistema dinámico con X espacio métrico compacto numerable y $p \in \mathbb{N}^*$. Si f^p es continua en $x \in X$, entonces existe $A \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que f^q es continua en x para todo $q \in \hat{A}$. Si p es un P–punto, entonces el conjunto A se puede elegir dentro de p.*

Ahora veremos el comportamiento de la discontinuidad de una p–iterada en un punto del espacio.

Teorema 47. **[14]** *Sea (X, f) un sistema dinámico y $p \in \mathbb{N}^*$. Si f^p no es continua en $x \in X$, entonces existe $A \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que f^q no es continua en x para cualquier $q \in A^*$. En particular, si p es un P–punto, entonces A se puede elegir dentro de p.*

Corolario 8.1. **[14]** *Sea (X, f) un sistema dinámico. Si el conjunto $\{p \in \mathbb{N}^* : f^p es\ continua\ en x\}$ es denso en $\mathbb{N}^*$, entonces f^p es continua en x para todo $p \in \mathbb{N}^*$.*

En el libro [10] el lector puede encontrar diversas propiedades de continuidad de las p–iteradas.

Para pasar a otra aplicación recordemos la noción de proximidad entre dos puntos de un sistema dinámico.

Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico. Dos puntos $x, y \in X$ son *proximales* si para cada $\epsilon > 0$, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x)), f^n(y)) < \epsilon\}$ es infinito. La siguiente propiedad de dos puntos proximales aparece en el libro de Furstenberg [8, Lemma 8.1] y nos conduce a una propiedad de combinatoria.

Teorema 48. *Sea (X, f) un sistema dinámico y $x, y \in X$. Si x y y son proximales, entonces para cada $\epsilon > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x)), f^n(y)) < \epsilon\}$ es grueso*[5]

La noción de proximidad se puede definir usando ultrafiltros.

Teorema 49. **[3]** *Sea (X, f) un sistema dinámico. Para $x, y \in X$, las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *x y y son proximales.*
2. *Existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^p(x) = f^p(y)$.*

[5] Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ es *grueso* si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $a \in A$ tal que $a+i \in A$ para toda $i < n$.

La siguiente noción fué introducida en [14].

Definición 8.4. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $p \in \mathbb{N}^*$. Dos puntos $x, y \in X$ son p–proximales si $f^p(x) = f^p(y)$.*

Teorema 50. **[14]** *Sea (X, f) un sistema dinámico. Para dos puntos cualesquiera $x, y \in X$ y $p \in \mathbb{N}^*$, las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *x y y son p–proximales.*
2. *Para cada $\epsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon\} \in p$.*

El siguiente resultado es una consecuencia directa de los Teoremas 40 y 49.

Corolario 8.2. *Sea (X, f) un sistema dinámico.*

1. *Si $p \in \mathbb{N}^*$ es un idempotente, entonces x es p–proximal a $f^p(x)$, para todo $x \in X$.*
2. *Si $x, y \in X$ son p–proximales para algún $p \in \mathbb{N}^*$, entonces x y y son $(p + q)$–proximales para todo $q \in \beta(\mathbb{N})$.*

La noción de p–proximidad es útil para distinguir dos puntos proximales. Para ver que realmente esto es cierto necesitamos generalizar el sistema dinḿico conocido como el shift (esta generalización y sus propiedades dinámicas aparecen en el artículo [11]).

El conjunto de Cantor se identifica con el espacio topológico $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ equipado con la topología producto. Para cada función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definimos la función $\sigma_f : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ como $\sigma_f(x) = x \circ f$ para cualquier $x \in \Sigma_2$. Más detalladamente, si $x \in \Sigma_2$, entonces $\sigma_f(x)(k) = x(f(k))$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En particular, si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es la traslación hacia la derecha ($f(n) = n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$), entonces $\sigma_f : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es la función *shift*.

Teorema 51. **[11]** *Para toda función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la función $\sigma_f : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es un homomorfismo continuo.*

Es facíl ver que la p–iterada $\sigma_f^p : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ de la función σ_f es siempre un homomorfismo aunque su continuidad puede fallar como lo veremos más adelante. Para estudiar las propiedades de las p–iteradas de la función σ_f necesitamos la siguiente fórmula que se obtiene de manera directa de la definición.

Teorema 52. [11] *Para cada $p \in \mathbb{N}^*$ se cumple la identidad*

$$\sigma_f^p(x) = p - \lim_{n\to\infty} \sigma_f^n(x) = p - \lim_{n\to\infty} x \circ f^n\,,$$

para todo $x \in \Sigma_2$, en donde el punto p–límite se toma dentro del conjunto de Cantor.

Las siguientes condiciones garantizan la continuidad de las p–iteradas de la función σ_f.

Teorema 53. [11] *Las siguientes condiciones son equivalentes para una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.*

1. *La función f tiene órbitas finitas.*
2. *$\sigma_f^p : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es continua para todo $p \in \mathbb{N}^*$.*
3. *$\sigma_f^p : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es continua para algún $p \in \mathbb{N}^*$.*

Teorema 54. [11] *Las siguientes condiciones son equivalentes para una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.*

1. *La función f tiene una órbitas infinita.*
2. *$\sigma_f^p : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es discontinua para todo $p \in \mathbb{N}^*$.*
3. *$\sigma_f^p : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es discontinua para algún $p \in \mathbb{N}^*$.*

De ambos teoremas concluimos que si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función arbitraria, entonces o bien todas las funciones σ_f^p's son continuas o todas son discontinuas.

Para determinar y distinguir los puntos proximales del sistema dinámico (Σ_2, σ_f) es necesario considerar los siguientes subconjuntos de $\mathbb{N}$.

Definición 8.5. [11] *Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función. Decimos que $A \subseteq \mathbb{N}$ es f–grueso si para cada $k \in \mathbb{N}$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \forall i \leq k(f^n(i) \in A)\}$ es no vacío.*

Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es la traslación hacia la derecha (es decir, $f(k) = k + 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$), entonces todo conjunto f–grueso es grueso y vice versa. Es trivial ver que si $A \subseteq \mathbb{N}$ y $f : \mathbb{N} \to A$ es una función arbitraria, entonces A es f–grueso. En particular, la imagen $f[\mathbb{N}]$ es f–gruesa para cualquier función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Ahora determinaremos las parejas de puntos proximales del sistema dinámico (Σ_2, σ_f) con la ayuda de los conjuntos f–gruesos.

Teorema 55. **[11]** *Sea* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *una función y consideremos el sistema dinámico* (Σ_2, σ_f). *Dos puntos* $x, y \in \Sigma_2$ *son proximales si y sólo si el conjunto* $I(x, y)$[6] *es* f*–grueso.*

El teorema anterior generaliza el Lema 8.2 del libro [8].

Corolario 8.3. **[11]** *Sea* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *una función y consideremos el sistema dinámico* (Σ_2, σ_f). *Dados un subconjunto* f*–grueso* A *de* $\mathbb{N}$ *y* $x \in \Sigma_2$, *el punto* $y \in \Sigma_2$ *definido por*

$$y(k) = \begin{cases} x(k) & \text{si } k \in A \\ x(k) + 1 & \text{si } k \notin A. \end{cases}$$

es proximal a x *y* $I(x, y) = A$.

Para el estudio de los puntos p–proximales del sistema dinámico (Σ_2, σ_f) se requiere considerar la siguiente clase de subconjuntos de $\mathbb{N}$.

Definición 8.6. **[11]** *Sean* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *una función y* $p \in \mathbb{N}^*$. *Decimos que* $A \subseteq \mathbb{N}$ *es* (f, p)*–grueso si* $\{n \in \mathbb{N} : f^n(k) \in A\} \in p$ *para toda* $k \in \mathbb{N}$.

Si $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$, entonces A es (f, p)–grueso para toda función $f : \mathbb{N} \to A$ y para todo ultrafiltro $p \in \mathbb{N}^*$. Si $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{N}$ y $a \in A \setminus B$, entonces la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ constante que manda a todo número natural en a satisface que A es (f, p)–grueso para todo $p \in \mathbb{N}^*$, pero B no es (f, p)–grueso para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$. Es fácil ver que todo conjunto (f, p)–grueso es f–grueso, para cualquier función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$. En [11] se demostró que todo conjunto f–grueso es (f, p)–grueso para algún $p \in \mathbb{N}^*$.

Teorema 56. **[11]** *Sea* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *una función y* $p \in \mathbb{N}^*$. *Consideremos el sistema dinámico* (Σ_2, σ_f). *Dos puntos* $x, y \in \Sigma_2$ *son* p*–proximales si y sólo si el conjunto* $I(x, y)$ *es* (f, p)*–grueso.*

Procedemos ahora a describir un ejemplo de dos puntos proximales que no son q–proximales para algunos ultrafiltros $q \in \mathbb{N}^*$ (un ejemplo más complicado se dió en [14]).

Ejemplo 8.1. **[11]** *Consideremos el sistema dinámico* (Σ_2, σ_f), *en donde* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *es la función definida por* $f(k) = k + 1$, *para todo* $k \in \mathbb{N}$. *Pongamos* $a_0 = 0$ *y tomemos* $b_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_0 < b_0$. *Enseguida elejimos dos números* $a_1, b_1 \in \mathbb{N}$ *que satisfagan la condición* $b_0 < a_1 < a_1 + 1 < b_1$.

[6] Para $x, y \in \Sigma_2$, definimos $I(x, y) = \{k \in \mathbb{N} : x(k) = y(k)\}$.

Inductivamente, para cada $k \in \mathbb{N}$ elejimos $a_k, b_k \in \mathbb{N}$ de tal modo que $b_{k-1} + k - 1 < a_k < a_k + k < b_k$. Definimos $A = \{a_k + i : i \leq k \in \mathbb{N}\}$. Si $i \in \mathbb{N}$, entonces $a_k \in \{n \in \mathbb{N} : f^n(i) = n + i \in A\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $i \leq k$. Fijemos $p \in \{a_k : k \in \mathbb{N}\}^*$. Tenemos entonces que A es (f, p)–grueso. Ahora definimos $B = \{b_k : k \in \mathbb{N}\}$. Si $k \in \mathbb{N}$, entonces $b_k + i \notin A$ para todo $i \in \mathbb{N}$ con $i < k$. Por consiguiente la intersección

$$B \cap \{n \in \mathbb{N} : f^n(i) = n + i \in A\},$$

es finita, para todo $i \in \mathbb{N}$. Lo anterior implica que A no puede ser (f, q)–grueso para cualquier $q \in B^*$. Sean $x, y \in \Sigma_2$ diferentes tales que $I(x, y) = A$. Por el Teorema 56, obtenemos que los puntos x y y son p–proximales para todo $p \in \{a_k : k \in \mathbb{N}\}^*$ y no pueden ser q–proximales para cualquier $q \in B^*$.

En lo que sigue, dirigimos nuestra atención a los puntos recurrentes de un sistema dinánimco. Dado un sistema dinámico (X, f), decimos que $x \in X$ es *recurrente* si para cada $V \in \mathcal{N}(x)$, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in V\}$ es infinito. Veamos cómo se pueden usar los ultrafiltros para determinar los puntos recurrentes.

Teorema 57. [3] *Sea (X, f) un sistema dinámico. Para un punto $x \in X$, las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *x es recurrente.*
2. *Existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^p(x) = x$.*

Para ver que todo sistema dinámico (X, f) tiene puntos recurrentes fijemos un punto $x \in X$ y un ultrafiltro idempotente $p \in \mathbb{N}^*$, como consecuencia de los Teoremas 40 y 57 obtenemos que el punto $f^p(x)$ es recurrente.

El teorema anterior nos sugiere considerar la siguiente noción que fue introducida en [8] y se estudió para ultrafiltros en [14].

Definición 8.7. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto y sea $p \in \mathbb{N}^*$. Decimos que un punto $x \in X$ es p–recurrente si $f^p(x) = x$.*

Usaremos un sistema dinámico de la forma (Σ_2, σ_f) para mostrar que la p–recurrencia puede ayudar a distinguir dos puntos recurrentes de un sistema dinámico. Para nuestro propósito el siguiente lema es crucial.

Lema 8.1. **[11]** *Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función, $A, B \in [\mathbb{N}]^\omega$ y$p \in \mathbb{N}^*$. En el sistema dinámico (Σ_2, σ_f), las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. $\sigma_f^p(\chi_A) = \chi_B$.

2. *$n \in B$ si y sólo si $\{k \in \mathbb{N} : f^k(n) \in A\} \in p$.*

Estamos listos para usar el shift y encontrar el punto deseado.

Ejemplo 8.2. **[11]** *Consideremos la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = n+1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $f^k(n) = n+k$, para cada $n, k \in \mathbb{N}$. De aquí observamos que $\sigma_f^k(\chi_{2\mathbb{N}}) = \chi_{2\mathbb{N}} \circ f^k = \chi_{2\mathbb{N}}$ para cada $k \in 2\mathbb{N}$. De donde encontramos que $\sigma_f^p(\chi_{2\mathbb{N}}) = \chi_{2\mathbb{N}}$ para todo $p \in \widehat{2\mathbb{N}}$. De este modo se obtiene que $\chi_{2\mathbb{N}}$ es p–recurrente para todo $p \in \widehat{2\mathbb{N}}$. Ahora fijemos un ultrafiltro $q \notin \widehat{2\mathbb{N}}$ y supongamos que $\sigma_f^q(\chi_{2\mathbb{N}}) = \chi_{2\mathbb{N}}$. A partir del Lema 8.1 vemos que $n \in 2\mathbb{N}$ si y sólo si $\{k \in \mathbb{N} : n+k \in 2\mathbb{N}\} \in q$. Sea $n \in 2\mathbb{N}$. Entonces, existe un número natural impar $k \in \mathbb{N}$ tal que $n+k \in 2\mathbb{N}$, lo cual es imposible. Por tanto, $\chi_{2\mathbb{N}}$ no puede ser q–recurrente para cualquier $q \notin \widehat{2\mathbb{N}}$.*

Desafortunadamente, aún no sabemos la respuesta a la siguiente pregunta.

Pregunta 8.1. **[11]** *Dados dos ultrafiltros $p, q \in \mathbb{N}^*$, ¿ es posible encontrar un sistema dinámico que contenga un punto p–recurrente que no sea q–recurrente ?*

Arriba comentamos que todo sistema dinámico adimite por lo menos un punto recurrente, pero para los puntos p–recurrentes no lo sabemos.

Pregunta 8.2. **[11]** *Sea (X, f) un sistema dinámico. ¿ Contiene X un punto p–recurrente para cada $p \in \mathbb{N}^*$?*

Para terminar con esta sección veremos la utilidad de los puntos p–límites para describir el semigrupo de Ellis de un sistema dinámico y con ello estudiar algunas de sus propiedades.

Definición 8.8. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto. El semigrupo de Ellis $E(X, f)$ de (X, f) es la cerradura del conjunto de funciones $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ en el espacio producto X^X.*

El semigrupo de Ellis de un sistema dinámico fué introducido por Ellis [5] como una herramienta para el estudio y comprensión de propiedades dinámicas. Actualmente el semigrupo de Ellis juega un papel fundamental en la teoría general de los sistemas dinámicos.

Por ser X compacto y $E(X, f)$ un cerrado dentro del espacio compacto X^X, el semigrupo de Ellis resulta ser siempre un espacio compacto. Las p–iteradas de la función de un sistema dinámico ayudan a describir el semigrupo de Ellis.

Teorema 58. *Si (X, f) es un sistema dinámico con X un espacio compacto, entonces*

$$E(X, f) = \{f^p : p \in \beta(\mathbb{N})\},$$

y $f^p \circ f^q = f^{q+p}$ para cada $p, q \in \beta(\mathbb{N})$.

El resultado que a continuación enunciamos es una consecuencia directa del teorema anterior.

Corolario 8.4. *Sea X un espacio compacto. Una función $g : X \to X$ pertenece a $E(X, f)$ para alguna función continua $f : X \to X$ si y sólo si existe $p \in \beta(\mathbb{N})$ tal que $g(x) = f^p(x) = p - \lim_{n\to\infty} f^n(x)$ para todo $x \in X$.*

Basándonos en el Teorema 58 podemos reformular un problema de la página 3 de la notas de clase [22] como sigue.

Pregunta 8.3. *¿ Existe un espacio métrico compacto X en el cual se pueda definir una función $g \in X^X$ que no pertenezca a ningún semigrupo de Ellis cuyo espacio de fase sea X ?*

A continuación describiremos los semigrupos de Ellis de algunos sistemas dinámicos conocidos.

Ejemplo 8.3. *Sea $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ una sucesión convergente con su punto de acumulacón, y $f : X \to X$ la función definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ x = 0 \\ \frac{1}{n+1} & si\ x = \frac{1}{n}\ y\ 1 \le n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

En este caso se obtiene que $E(X)$ es una sucesión convergente con su punto límite.

Ejemplo 8.4. *Sea X un espacio compacto. Si $f : X \to X$ es una función continua tal que f^n es la función identidad para algún $n \in \mathbb{N}$, es entonces evidente que*

$$E(X, f) = \{identidad, f, \cdots ., f^{n-1}\}.$$

Ejemplo 8.5. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y f una contracción*[7]*. De acuerdo con el Teorema del Punto Fijo de Banach [6, 4.3.J], la función f tiene un único punto fijo $z \in X$. Sea $g : X \to X$ la función constante que envía a todo punto de X en z. El lector puede verificar sin problema alguno que $f^p = g$ para todo $p \in \mathbb{N}^*$. Por tanto, $E(X, f) = \{f^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{g\}$ es o bien finito o la compactación por un punto de $\mathbb{N}$.*

Ejemplo 8.6. *Sea $\mathbb{S}$ el círculo unitario y sea $\alpha \in [0, 1)$. Sea $T_\alpha : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ la rotación en un ángulo α de $\mathbb{S}$ en sentido contrario a las menecillas del reloj. En el caso en el cual α es racional, existe un número entero $n \in \mathbb{N}$ tal que T_α^n es la función identidad. Si n es el menor número con esta propiedad, entonces $E(\mathbf{S}, T_\alpha)$ es un grupo cíclico de orden n. Ahora elejimos un número irracional $\alpha \in [0, 1)$. En este caso, T_α tiene orden infinito. Dejamos al lector que investigue el hecho de que $E(\mathbf{S}, T_\alpha)$ es el grupo ortogonal especial $SO(2, \mathbb{R})$ de todas las rotaciones de $\mathbb{S}$ el cual es a la vez isomorfo al mismo $\mathbb{S}$.*

En el siguiente teorema daremos una condición para que el semigrupo de Ellis sea una compactación de $\mathbb{N}$.

Teorema 59. **[15]** *Sea (X, f) un sistema dinámico tal que X es compacto y $f^n \neq f^m$ para cada par de números distintos $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces, $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto discreto de $E(X)$ si y sólo si $f^n \neq f^p$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y para todo $p \in \mathbb{N}^*$.*

Como vimos en el Ejemplo 8.3, $E(X)$ es una sucesión convergente con su punto límite y X solo tiene a 0 como un punto periódico que es de hecho un punto fijo de la función f. En relación a ésto tenemos el siguiente resultado.

Teorema 60. **[15]** *Sea (X, f) un sistema dinámico tal que $E(X)$ sea una compactación de $\mathbb{N}$ equipado con la topología discreta. Si $E(X)$ tiene exactamente k puntos de acumulación, para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $E(X)$ no tiene puntos periódicos de periódo mayor que k.*

[7] Se dice que una función entre espacios métricos $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ es una *contracción* si existe $r \in [0, 1)$ tal que $d_Y(f(x), f(y)) \leq r d_X(x, y)$ para todo $x, y \in X$.

Pregunta 8.4. [**10**] *¿Dada una compactación K de $\mathbb{N}$, ¿ es posible hallar un sistema dinámico (X, f) tal que $E(X, f)$ y K sean homeomorfos?*

Finalmente describiremos el semigrupo de Ellis de algunos sistemas dinámicos de la forma $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma_f)$. Para ésto necesitaremos las siguientes funciones.

Dada una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{N}^p$, definimos la función $f : \mathbb{N} \to \beta(\mathbb{N})$ como

$$f^p(m) = p - \lim_{n\to\infty} f^n(m)\,,$$

para cada $m \in \mathbb{N}$. La relación entre la dinámica de la función σ_f y de la función f se establece en el siguiente lema.

Lema 8.2. [**10**] *Sean $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función y $p, q \in \beta(\mathbb{N})$. Entonces, $\sigma_f^p = \sigma_f^q$ si y sólo si $f^p = f^q$.*

Con la afirmación de este lema podemos describir el semigrupo de Ellis del sistema dinḿico $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma_f)$.

Teorema 61. [**10**] *Para cualquier función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $E(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma_f)$ es homeomorfo al subespacio $\{f^p : p \in \beta(\mathbb{N})\}$ de $\beta(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$.*

Teorema 62. [**10**] *Si la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tiene una órbita infinita, entonces $E(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma_f)$ es homeomorfo a $\beta(\mathbb{N})$.*

Supongamos que la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tiene órbitas finitas. Entonces, para cada $p \in \beta(\mathbb{N})$ se cumple que $f^p(n) \in \mathcal{O}_f(n)$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\{f^p : p \in \beta(\mathbb{N})\} \subseteq \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_f(n)$ y es claro que este último espacio es métrico. De aquí obtenemos el siguiente teorema,

Teorema 63. [**10**] *Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función con órbitas finitas, entonces $E(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma_f)$ es métrico. En particular, tenemos que*

$$|E(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma_f)| \leq \mathfrak{c}\,.$$

Corolario 8.5. [**10**] *Para cualquier función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *f tiene órbitas finitas.*
2. *La función σ^p es discontinua para todo $p \in \mathbb{N}^*$.*

3. *$E(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma_f)$ es homeomorfo a $\beta(\mathbb{N})$.*

Corolario 8.6. **[10]** *Para cualquier función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ las siguientes condiones son equivalentes.*

1. *Todas las órbitas de f son finitas.*
2. *La función σ^p es continua para todo $p \in \mathbb{N}^*$.*
3. *$E(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma_f)$ es metrizable.*

En el siguiente ejemplo daremos una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ para la cual $E(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma_f)$ es homeomorfo al conjunto de Cantor.

Ejemplo 8.7. **[10]** *Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función para la cual existe una sucesión de números enteros $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que satisfacen las siguientes condiciones.*

1. *n_k es un punto periódico de f de periódo 2^k, para cada $k \in \mathbb{N}$.*
2. *$\{\mathcal{O}_f(n_k) : k \in \mathbb{N}\}$ es una partición de $\mathbb{N}$.*

Para esta función f se cumple que $E(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma_f)$ es homeomorfo al conjunto de Cantor.

Veamos a continuación cómo se obtiene la compactación de Alexandroff de $\mathbb{N}$ con la topología discreta.

Ejemplo 8.8. **[10]** *Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función para la cual existe una sucesión estrictamente creciente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números enteros positivos tales que satisfacen las siguientes condiciones.*

1. *$a_0 = 0$.*
2. *$a_n = a_{n-1} + n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*
3. *$f(a_n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*
4. *$f(k) = k + 1$ si $a_{n-1} < k < a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

A partir de la definición podemos ver que $f^n(k) = a_n$ siempre que $a_{n-1} < k < a_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo cual, si $p \in \mathbb{N}^*$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $f^p(k) = p - lim_{m\to\infty} f^m(k) = a_n$ siempre que $a_{n-1} < k < a_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Así, $f^p = f^q$ para todo $p, q \in \mathbb{N}^*$. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{f^n\} = [a_n + 1, a_{n+1} - 1] \cap \{f^m : m \in \mathbb{N}\}$. Por tanto, $\{f^m : m \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto discreto de $\{f^p : p \in \beta(\mathbb{N})\}$ y por ello $E(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma_f)$ es la compactación de Alexandroff de $\mathbb{N}$.

Pregunta 8.5. **[10]** *¿Cuáles espacios compactos, métricos y de dimensión cero son de la forma $E(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma_f)$ para algún $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$?*

Agradecimientos

El autor da las gracias por el apoyo recibido a la organización de *Un Encuentro de Matemáticas* que se celebró en la Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia, 5–7 de julio de 2011. La investigación del autor ha sido apoyada mediante los proyectos CONACYT no. 165366 y PAPIIT no. IN–101911.

Referencias

[1] E. Akin, *Recurrence in topological dynamics. Furstenberg families and Ellis actions*, The University Series in Mathematics (Plenum Press, New York, 1997).

[2] A. R. Bernstein, *A new kind of compactness for topological spaces*, Fund. Math. **66**, 185 (1970).

[3] A. Blass, *Ultrafilters: where topological dynamics=algebra=combinatorics*, Topol. Proc. **18**, 33 (1993).

[4] W. W. Comfort and S. Negrepontis, *The Theory of Ultrafilters* (Springer–Verlag, Berlin, 1974).

[5] R. Ellis, *Lectures on Topological Dinamics* (Benjamin, New York, 1969).

[6] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics **6** (Heldermann Verlag, 1989).

[7] Z. Frolík, *Sums of ultrafilters*, Bull. Am. Math. Soc. **73**, 87 (1967).

[8] H. Furstenberg, *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory* (Princeton University Press, 1981).

[9] S. García Ferreira, *Three orderings on $\beta(\omega) - \omega$*, Top. Appl. **50**, 199 (1993).

[10] S. García Ferreira, *Ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$ y sistemas dinámicos discretos*, XXII Escuela Venezolana de Matemáticas (Ediciones del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Caracas, 2010).

[11] S. García Ferreira, *Dynamical properties of certain continuous self maps of the Cantor set*, submitted for publication (2011).

[12] S. García Ferreira y L. M. Ruza M., *The $\mathcal{F}$–limit of a sequence of prime ideals*, Comm. Alg. **39**, 1 (2011).

[13] S. García Ferreira and H. S. Pino V., *Characterizing filters by filter convergence in Banach spaces*, submitted for publication (2011).

[14] S. García Ferreira and M. Sanchis, *Ultrafilter–limit points in metric dynamical systems*, Comment. Math. Univ. Carolin. **48**, 465 (2007).

[15] S. García Ferreira and M. Sanchis, *Some remarks on the metrizability of the Ellis semigroup* (2011), in progress.

[16] J. Ginsburg y V. Saks, *Some applications of ultrafilters to topology*, Pacific J. Math. **57**, 403 (1975).

[17] N. Hindman and D. Strauss, *Algebra in the Stone–Čech Compactification* (Walter de Gruyter, 1998).

[18] K. Kunen, *Weak P–points in ω^**, Colloq. Math. Soc. János Bolyai **23**, 741 (1978).

[19] K. Kunen, *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs* (North–Holland, 1980).

[20] P. Simon, *Applications of independent linked families*, in *Topology, Theory and Applications* (Eger, 1993), Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai **41** (North–Holland, Amsterdam, 1985); p. 561.

[21] P. Szuca, *Ultrafilter–limit points in dynamical systems defined on the interval*, manuscript (2011).

[22] T. K. Subrahmonian–Moothathu, *The algebra of topological dynamics*, classroom notes (2009).

[23] O. Zariski, *The compactness of the Riemann manifold of an abstract field of algebraic functions*, Bull. Am. Math. Soc. **50**, 683 (1944).