Grandes corrientes de la matemática en el siglo XX. VI. Panorama de los Premios Abel (2003–2013)[1]

Fernando Zalamea[2]

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá

Este artículo final de la serie *Cátedra Granés* 2008 ofrece una mirada transversal sobre las matemáticas de la segunda parte del siglo XX ("matemáticas contemporáneas"), gracias a un estudio global de los Premios Abel. Se revisan ciertos aportes de tres galardonados —Serre, Atiyah, Gromov— y se ofrecen algunas conclusiones globales de la *Cátedra Granés* 2008.

Palabras claves: Premios Abel, estilo matemático, multiplicidad y unidad, geometrización.

This last article of the *Cátedra Granés* 2008 series offers a transversal view on the mathematics of the period 1950–today ("contemporary mathematics"), thanks to an overview of the Abel Prizes. After reviewing major conceptual shifts along three Abel Prizes —Serre, Atiyah, Gromov— we offer some global conclusions of the *Cátedra Granés* 2008.

Keywords: Abel Prizes, mathematical style, multiplicity and unity, geometrization.

MSC: 01A60

Recibido: 18 de junio de 2013 Aceptado: 19 de junio de 2013

---

[1] Las cinco primeras partes de esta serie han aparecido en Boletín de Matemáticas **16**(2), 95–114 (2009), **17**(1), 13–26 (2010), **18**(2), 109–122 (2011), **19**(1), 19–36 (2012) y **19**(2), 119–132 (2012).

[2] www.docentes.unal.edu.co/fzalameat/

1 Una visión global de los Premios Abel

Los Premios Abel, en homenaje a Niels Henrik Abel (1802–1829) (ver figura 1), se otorgan desde 2003 por parte de la Academia Noruega de Ciencias y Letras, como reconocimiento a la *vida y obra* de un matemático excepcional. Como tales, se han convertido en los equivalentes de los Premios Nobel en otras disciplinas y se asocian a *largas trayectorias*, distinguiéndose así de las Medallas Fields que se entregan a matemáticos jóvenes de excepcional técnica y notable potencial.

Figura 1. Medalla del Centenario de Abel (Heggtveit, 1929)

Los Premios Abel han permitido recompensar así a creadores matemáticos de primera línea que abrieron espacios originales para el desarrollo de la matemática y que, en muchos casos, no habían obtenido la Medalla Fields (de los 13 Premios Abel, sólo 5 de ellos consiguieron a su vez la Fields: Serre, Atiyah, Thompson, Milnor y Deligne).

La tabla 1 incluye los datos de aquellos matemáticos que han recibido el Premio Abel hasta el momento. Como puede observarse, todos los matemáticos galardonados han nacido antes de 1950 y han desarrollado sus trabajos en la segunda mitad del siglo XX. Una primera mirada se sorprende de la *distribución geográfica* de los Premios Abel: si bien la aparición de Estados Unidos con 4 premiados resulta natural, llaman la atención Hungría y Bélgica con 2 galardonados cada uno, y, sobre todo, la escasa aparición de Francia y Rusia, con 1 Premio Abel por parte. Si se contrasta esta situación con aquella de las Medallas Fields (ver artículo anterior de esta serie), donde las presencias de Francia y Rusia conforman un claro liderazgo del panorama, nos encontramos ante lo que podríamos llamar el *peculiar punto de vista* de la Academia Noruega, dispuesta a un reconocimiento de la “otredad” (localismo en 2006, apertura en 2007).

Año	Nombre	Áreas principales de trabajo	País y fecha de nacimiento
2003	Jean–Pierre Serre	geometría algebraica topología y haces teoría de números	Francia 1926
2004	Michael Atiyah Isadore Singer	geometría diferencial geometría algebraica análisis armónico	Gran Bretaña 1929 USA 1924
2005	Peter Lax	ecuaciones no lineales hiperbólicas computabilidad sistemas integrables y scattering	Hungría 1926
2006	Lennart Carleson	análisis armónico análisis complejo sistemas dinámicos	Suecia 1928
2007	Srinivasa Varadhan	teoría de la probabilidad procesos estocásticos grandes desviaciones	India 1940
2008	John Thompson Jacques Tits	grupos finitos grupos lineales clasificación grupos simples	USA 1932 Bélgica 1930
2009	Mikhael Gromov	geometría riemanniana geometría global simpléctica grupos hiperbólicos	Rusia 1943
2010	John Tate	teoría algebraica de números análisis armónico formas automorfas y funciones L	USA 1925
2011	John Milnor	topología diferencial geometría en 3 y 4 dimensiones singularidades y sistemas dinámicos	USA 1931
2012	Endre Szmerédi	teoría de números matemáticas discretas teoría de la computación	Hungría 1940
2013	Pierre Deligne	geometría algebraica teoría de números haces y teoría de Hodge	Bélgica 1944

Tabla 1. Premios Abel 2003–2013.

Como puede observarse en la tabla 1, todos los Premios Abel (como todos los Medallistas Fields) tienden siempre a *trascender las fronteras* de las diversas subregiones del universo matemático. Grandes especialistas en sus diversos campos de acción, los Premios Abel consiguen sin embargo ir más allá de la subespecialización y hacen suya la famosa frase de Banach: "Los buenos matemáticos ven analogías entre teoremas o teorías, los matemáticos supremos ven *analogías entre analogías*" [Ulam 1976, p. 203] (un caso "supremo" es, por supuesto, Grothendieck: ver cuarto artículo de nuestra serie). Si volvemos a recordar la "tabla fenomenológica" que guía esta serie (ver tabla 2), se confirma aquí también (como en el caso de los Medallistas Fields) la dialéctica fundamental entre los "modos" (transformaciones, regulaciones) y las "razones" (obstrucciones, singularizaciones) del hacer matemático "contemporáneo". *Todo es tránsito, movimiento, dinámica, en la matemática de la segunda mitad del siglo* XX.

tránsito matemático

qué	*cómo*	*por qué*	*cuándo*	*dónde*
objetos	modos	razones	momentos	lugares
ejemplos problemas	*transformaciones regulaciones*	*obstrucciones singularizaciones*	*diagramas temporales*	*diagramas culturales*
ontología	epistemología	metafísica	historia	geografía

cuestionamiento filosófico y cultural

Tabla 2. Perspectivas de la Cátedra Granés 2008–I.

Si miramos las temáticas de trabajo de los Premios Abel, cuatro grandes núcleos se observan sin dificultad: *teoría de números* (Serre, Tate, Szmerédi, Deligne), *geometría algebraica* (Serre, Atiyah, Deligne), *geometría y topología diferenciales* (Singer, Gromov, Milnor), *probabilidad y procesos estocásticos* (Lax, Carleson, Varadhan). Tangencialmente, aparecen trabajos en temas clásicos (grupos: Thompson, Tits, Gromov) o ligados a nuevas herramientas (computabilidad: Lax, Szmerédi). De manera central, así como sucede en el Panorama Fields, el Panorama Abel detecta entonces el *poderoso influjo de la geometría* en la matemática del último medio siglo. Las técnicas invasivas de la geometría algebraica (Zariski, Weil, Serre, Grothendieck, entre otros) y de la geometría diferencial (Thom, Milnor, Thurston, Gromov, entre otros) penetran en el "corazón" mismo de las matemáticas: la teoría de números, la variable compleja, la teoría de representaciones. Una buena cantidad de información sobre los Premios Abel se encuentra disponible, tanto en la página oficial de la Academia [Abel 2003–2013], como en la recopilación [Holden & Piene 2010] que cubre los cinco primeros galardones, de Serre a Varadhan (reseña del volumen en [Zalamea 2009a]).

2 Algunos ganadores del Premio Abel: Serre, Atiyah, Gromov

Gran propulsor de la obra de Grothendieck —educador y suerte de *punching partner* de su amigo— Jean–Pierre Serre puede considerarse, por su cuenta, como uno de los mayores matemáticos del siglo XX. Los principales trabajos de Serre cubren un muy extenso espectro matemático: *(i)* estudio de los grupos de homotopía de hiperesferas mediante espacios fibrados de caminos (con cálculos espectaculares, como la determinación de las doce aplicaciones continuas entre una esfera de dimensión 6 y una esfera de dimensión 3); *(ii)* trabajos fundacionales en el cruce de la geometría algebraica y la geometría analítica, basados en la emergente teoría de haces: FAC [Serre 1955] y GAGA [Serre 1956]; *(iii)* representaciones de Galois asociadas a grupos formales, variedades abelianas y formas modulares (que enlazarían, entre otras conjeturas, el Teorema de Fermat con Taniyama–Shimura, vía avances centrales en geometría algebraica y teoría de números). Serre señala cómo sus trabajos, *aparentemente dispersos*, responden no obstante a un mismo modo de observar y transformar las problemáticas, gracias al uso de herramientas *transversales* y a la aparición de *mixtos* (Lautman) donde lo uno y lo múltiple se conjugan técnicamente:

> Trabajo en varios temas aparentemente diversos, pero en realidad están todos relacionados entre sí. No siento que yo esté realmente cambiando. Por ejemplo, en teoría de números, teoría de grupos o geometría algebraica, uso ideas provenientes de la topología, como cohomología, haces y obstrucciones. Desde ese punto de vista, disfruto especialmente al trabajar sobre representaciones l–ádicas y formas modulares: se requiere allí teoría de números, geometría algebraica, grupos de Lie (tanto reales como l–ádicos), q–expansiones (estilo combinatorio) — una maravillosa mixtura. [Raussen & Skau 2004, p. 211]

Diversos *transvases de la forma* surgen en la obra de Serre. Cuando en el GAGA establece una equivalencia entre haces algebraicos (coherentes) sobre una variedad proyectiva y haces analíticos (coherentes) sobre el espacio analítico asociado a la variedad —equivalencia en donde los grupos de cohomología aparecen como invariantes—, Serre está acotando de manera precisa el *tránsito* entre formas algebraicas y analíticas, con un cuidadoso control de las ósmosis u obstrucciones en juego. Cuando, al final de la década de los cincuenta, ensaya diversas estructuras para intentar producir una "buena" cohomología para las variedades definidas sobre cuerpos finitos (procurando acercarse así a las conjeturas de Weil), y cuando surge entonces el grupo de cohomología con valores en un haz de vectores de Witt —algunas de cuyas transposiciones y obstrucciones inspirarán las cohomologías l–ádica, cristalina y *étale* de Grothendieck—, Serre está de nuevo realizando un esfuerzo ingente de precisión en el manejo y el traslado de las formas.

El matemático francés resalta una honda continuidad en su camino creativo, allende ciertas *apariencias* de corte o de ruptura: enlace de grupos de homotopía y C–teoría; ósmosis entre ciertas estructuras de la variable compleja (haces/cohomología en el ámbito de las funciones de varias variables complejas o de las variedades complejas proyectivas) y del álgebra (haces/cohomología en el ámbito de las funciones racionales o de las variedades algebraicas); estudio de la geometría algebraica sobre campos arbitrarios (desde clausuras algebraicas hasta campos finitos, pasando por generalizaciones de la teoría de cuerpos de clases) mediante grupos y álgebras de Lie como estructuras "madre" donde se intersecta la información contextual existente. De hecho, al asomarse sobre ciertas contigüidades/continuidades entre la hipótesis de Riemann, cálculos sobre formas modulares y cálculos de características de subgrupos discretos del grupo lineal, Serre afirma que tales cuestiones no son ni teoría de grupos, ni topología, ni teoría de números: "son simplemente matemáticas", donde ocurren sofisticados *tránsitos técnicos sobre un fondo conceptual continuo.*

Los trabajos de Sir Michael Atiyah han otorgado un impulso definitivo a la eventual aplicabilidad de sofisticadas herramientas de la matemática "contemporánea" para la comprensión de fenómenos físicos asociados. El Premio Abel consagra su famoso *teorema del índice* [Atiyah & Singer 1963], un resultado muy profundo que puede considerarse como uno de los teoremas mayores del siglo XX. En efecto, el teorema combina *(i)* un enunciado de gran sencillez y universalidad (enlace preciso de transferencias y obstrucciones en el dominio de las ecuaciones elípticas); *(ii)* una colección de pruebas muy diversas, provenientes de ámbitos aparentemente contrastantes de la matemática (K–teoría, teoría de Riemann–Roch, cobordismo, ecuación del calor, etc.); *(iii)* una notable irradiación hacia un espectro matemático muy amplio (ecuaciones diferenciales, física matemática, análisis funcional, topología, variable compleja, geometría algebraica, etc.)

En términos conceptuales latos, el teorema del índice enuncia que el *balance* entre tránsitos y obstrucciones en ciertos cambios de la naturaleza está completamente caracterizado por la *geometría* del entorno donde se realiza el cambio. En términos más precisos, dado un operador diferencial elíptico ("cambio"), el índice ("balance") —definido como el número de soluciones ("tránsitos") *menos* el número de restricciones ("obstrucciones") del operador— está completamente determinado por adecuados invariantes topológicos ("geometría del entorno"). En términos aún más acotados, si nos damos un operador diferencial elíptico D, y si definimos el *índice analítico* de D por $ind_{analit}(D) = dim\,Ker(D) - dim\,coKer(D)$ (*núcleo* $Ker(D)$: "soluciones", es decir, funciones armónicas; conúcleo $coKer(D)$: "obstrucciones", es decir, restricciones en ecuaciones no homogéneas del tipo $Df = g$), el teorema del índice afirma que el índice analítico puede caracterizarse mediante un *índice topológico* $ind_{top}(D)$ ligado a invariantes puramente cohomológicos del entorno geométrico del operador. Un hecho de sumo interés que se deriva de este teorema consiste en observar cómo las soluciones y las obstrucciones, que son completamente *inestables por separado* (gran variación local de las ecuaciones diferenciales), resultan ser no obstante *estables en su diferencia* (unificación global de los índices).

El teorema del índice provee un impactante tránsito entre el análisis y la topología, con aplicaciones de todo tipo, ya que las ecuaciones elípticas sirven para modelar múltiples situaciones de la física matemática. Pero más asombroso aún es el *sostén arquetípico ideal* de ese tránsito, el cual radica en los *escondidos fondos de geometría algebraica* subyacentes a la prueba del teorema. En ese sentido, la génesis del teorema del índice es reveladora. El teorema de Riemann–Roch (1850) propone controlar algebraicamente (dimensión) el espacio de funciones meroformas asociadas a una curva *mediante* el control topológico (género) de las superficies de Riemann asociadas a la curva. Se presenta así una primera *gran translación* de conceptos matemáticos, que da lugar a la *problemática general* de cómo controlar globalmente las soluciones de ciertos sistemas lineales con parámetros algebraicos *mediante* invariantes topológicos apropiados. Las generalizaciones del teorema de Riemann–Roch resultan ser entonces legión, y se sitúan en la frontera (diacrónica) de las matemáticas "modernas" y "contemporáneas": Schmidt (1929, para curvas algebraicas), Cartan–Serre–Hirzebruch (1950–1956, para *un* sistema de haces), Grothendieck (1957, para *todos* los sistemas de haces con parámetros algebraicos: K–teoría), Hirzebruch–Atiyah (1958, para haces con parámetros continuos: K–teoría topológica). Como consecuencia de estos avances en la *problemática genérica* del tránsito entre lo algebraico y lo topológico sobre el fondo de la variable compleja (Riemann–Roch), Gelfand propone en 1960 un enunciado genérico acerca de la invarianza homotópica del índice. La ruptura emerge finalmente en 1963, cuando —al trabajar con ecuaciones diferenciales elípticas en vez de sistemas lineales con parámetros y al considerar las funciones algebraicas como holomorfas que satisfacen elipticidad (ecuaciones de Cauchy–Riemann)— Atiyah y Singer introducen el cambio radical de perspectiva que lleva a combinar el enunciado del teorema del índice (*à la* Gelfand) con todo el instrumentario de conceptos intermedios en la herencia de Riemann–Roch (*à la* Grothendieck).

La obra de Mikhael Gromov confirma, por otros caminos totalmente distintos, la riqueza de ciertas conexiones "arquetípicas" que se develan dentro de la matemática "contemporánea". Considerado posiblemente como el mayor geómetra de las últimas décadas, Gromov ha revolucionado completamente los diversos campos de estudio en los que ha incursionado: *(i)* geometría riemanniana, introduciendo nuevas perspectivas de "suavización" y "globalización" ligadas a *métricas por doquier*; *(ii)* ecuaciones diferenciales parciales, introduciendo cálculos homotópicos gracias a *relaciones diferenciales parciales ("pde vía pdr")*; *(iii)* variedades simplécticas, introduciendo *curvas pseudo–holomorfas* y, con ello, nuevas técnicas de la variable compleja dentro de la variable real; *(iv)* grupos, introduciendo nociones de crecimiento polinomial, comportamiento asintótico e *hiperbolicidad*. En buena medida, las ideas de Gromov se elevan sobre un complejo contrapunto entre redes refinadas de *desigualdades* y series de *invariantes* dentro de esas redes. Es el caso de las desigualdades triangular, isoperimétrica y sistólica, y es el caso de muy diversos constructos *arquetípicos* como los volúmenes simplicial y minimal, los L^2–invariantes, los invariantes homotópicos ligados a la geometría de las relaciones diferenciales parciales, los invariantes de Gromov–Witten, etc.

La emergencia de estos últimos invariantes es particularmente interesante desde un punto de vista filosófico. Dada una variedad simpléctica, pueden definirse múltiples estructuras cuasi–complejas sobre la variedad, que no tienen por qué corresponder a una variedad compleja; para intentar estudiar no obstante lo simpléctico/real mediante técnicas de la variable compleja, Gromov consigue superar la *obstrucción* introduciendo una nueva noción de *curva pseudo–holomorfa*, que se comporta magníficamente en el plano proyectivo complejo n–dimensional (dos puntos cualesquiera pueden conectarse mediante una curva pseudo–holomorfa apropiada); pasando luego a buscar *invariantes* para esas curvas, Gromov muestra que los espacios *moduli* de las curvas son compactos, y que puede realizarse entonces una teoría natural de la homología, que lleva a los invariantes de Gromov–Witten; en última instancia, los nuevos invariantes permiten distinguir, por un lado, toda una serie de variedades simplécticas que hasta entonces no habían podido ser clasificadas, y, por otro lado, ayudan a modelar aspectos insospechados de la teoría de cuerdas. De esta manera, un intento de tránsito (real–complejo), una obstrucción en el tránsito (multiplicidad de lo pseudo–complejo), una saturación parcial de la obstrucción (curvas pseudo–holomorfas), una profundización arquetípica detrás del nuevo concepto saturador (invariantes de Gromov–Witten), muestran cómo la matemática —muy lejos de querer “alisar” analíticamente las oscilaciones contradictorias de los fenómenos— *necesita esa topografía fuertemente quebrada* para su pleno desarrollo. De hecho, en un análisis brillante de este tipo de situaciones, Gromov ha señalado cómo el “árbol de Hilbert” (conjunto de ramificaciones de la matemática), lejos de ser sencillamente planar y deductivo, se encuentra atravesado por objetos geométricos multidimensionales: *nodos exponenciales* (lugares del árbol con grandes oscilaciones ampliativas: número, espacio, simetría, infinitud, etc.), *nubes* (“guías”, o pegamientos coherentes, como los núcleos geométricos *à la* Zilber, dentro de un árbol a priori desconectado por razones de complejidad y de indecidibilidad), *pozos locales* (lugares donde se “hunde” y se pierde la información matemática), etc.

El *estilo* geométrico de Gromov recoge (implícitamente) dos estrategias *sintéticas* propias de Grothendieck —una mirada global a clases de estructuras y una observación de propiedades a gran escala—, y las suplementa con una incisiva virtuosidad *analítica* comparativa, gracias a una *doble fragmentación y reintegración* de las redes de desigualdades bajo estudio. Gromov produce en efecto una nueva comprensión de la geometría riemanniana al contemplar la clase de *todas* las variedades riemannianas y al trabajar con *múltiples* métricas dentro de esa clase: al mover entonces las variedades y al encontrar adecuados invariantes relativos dentro de ese movimiento. En forma similar, sus trabajos en el ámbito de las relaciones diferenciales parciales se inscriben dentro de una *doble matriz* que permite efectuar asombrosos pegamientos a lo largo de dos ejes primordiales: sintético/analítico y global/local. En efecto, el h–principio ("h–principle", h por homotopía [Gromov 1986]) postula la existencia, en ciertos ámbitos geométricos, de deformaciones homotópicas entre secciones continuas de un haz (ligadas a correlaciones diferenciales locales que codifican las condiciones locales en una ecuación diferencial parcial) y secciones *holonómicas* del haz (ligadas a soluciones globales, mediante diferenciales globales). El trabajo monumental de Gromov en su *Partial Differential Relations* consigue, por un lado, exhibir la *ubicuidad* del h–principio en las áreas más remotas de la geometría (riqueza sintética del principio), y, por otro lado, construir una multitud de métodos y prácticas locales para validar el h–principio en condiciones particulares (riqueza analítica).

La estructura de grupo, que rejuvenece en las manos de un Connes o un Zilber, parece gozar de infinitas vidas en las manos de Gromov. Su programa en *teoría geométrica de grupos* puede describirse como el intento de caracterización de los grupos finitamente generados, módulo cuasi–isometrías, es decir, módulo deformaciones 'infinitesimales" de distancias tipo Lipschitz. Dentro de ese programa, Gromov ha demostrado que muchas propiedades de los grupos resultan ser *invariantes* cuasi–isométricos; en particular, la *hiperbolicidad* (por palabras) de un grupo es un tal invariante, con el cual se consigue caracterizar la *complejidad lineal* del problema de palabras asociado a un grupo. Por otro lado, gracias a la definición de una *métrica* en el grafo de Cayley de un grupo finitamente generado, Gromov define una noción de "crecimiento polinomial" del grupo y estudia las correlaciones de ese crecimiento asintótico con propiedades clásicas: solubilidad, nilpotencia, subrepresentaciones de Lie, etc. Nos encontramos así ante una situación muy típica en las matemáticas "contemporáneas", donde *ciertos núcleos clásicos se ven como límites de deformaciones* (lógicas, algebraicas, topológicas, cuánticas) dentro de muy amplias clases de espacios. Gracias a estos grandes procesos sintéticos (al estilo de los "grupos por doquier" en

Zilber, o de las “métricas por doquier” en Gromov) se recuperan entonces, por un lado, los invariantes clásicos, pero se descubren también, por otro lado, múltiples nuevos invariantes (estructuras *arquetípicas*) que una mirada restringida —local, analítica o clásica— *no* dejaba entrever.

3 Conclusiones globales de la Cátedra Granés 2008

Mirando en perspectiva el siglo XX, la *Cátedra Granés* 2008 plantea un corte fundamental entre el “hacer” [De Lorenzo 1977] de las matemáticas “modernas” (hasta 1950) y aquel de las matemáticas “contemporáneas” (desde 1950). La *Cátedra Granés* propone la noción de *haz* como frontera técnica entre los dos haceres, frontera que permite pasar del enunciado “moderno” de las conjeturas de Weil (en el ámbito restringido de las variedades algebraicas y la topología de Zariski) a su plena resolución “contemporánea” (en el ámbito extendido de los esquemas y los topos de Grothendieck). Dos matemáticos *supremos*, en el sentido de Banach, marcan definitivamente el siglo XX: Hilbert, en la primera mitad, Grothendieck, en la segunda. El mejor resumen filosófico del entorno *moderno* (centrado en Hilbert) se encuentra sin duda en [Lautman 2011], mientras que un primer intento global de compendio filosófico del espacio *contemporáneo* (centrado en Grothendieck) aparece en [Zalamea 2009/2012].

El balance de *acciones fundamentales* de la matemática a lo largo del siglo XX (metáfora extendida, a partir de una acción monoidal sobre un espacio) puede verse en la tabla 3.

Algunos hitos técnicos mayores ligados a la “modernidad” (1900–1950/Hilbert) consisten en la aparición de diversas teorías de representación (álgebra abstracta), mediaciones infinitas (teoría de conjuntos), espacios generales (análisis funcional), colecciones de estructuras (órdenes, topologías, variedades). Por otro lado, algunos avances notables ligados a la “contemporaneidad” (1950–hoy/Grothendieck) abren otras compuertas generales: enlace de lo local y lo global (haces), variaciones de la negación (no linealidad, no conmutatividad, lógicas no clásicas), asintotías generales (h–principio, modelos monstruos), deformaciones (sistemas dinámicos, cuantización). De una manera más visual, el siglo XX produce para la matemática una suerte de *diamante de la inteligencia* (ver figura 2), donde muchas *contaminaciones, mediaciones e inversiones* —a la manera misma de los Premios Abel— han impulsado la vida plena de la matemática.

	matemáticas modernas (1900–1950)	matemáticas contemporáneas (1950–hoy)
(i) compleja jerarquización sistemas de mediaciones	√	√
(ii) riqueza semántica irreducibilidad a gramáticas	√	√
(iii) unidad estructural múltiples polaridades	√	√
(iv) dinámica movimientos libertad–saturación	√	√
(v) mixturación teoremática ascensos y descensos	√	√
	• tránsitos/obstrucciones • jerarquías/estructuras • modelización/mixturación	
(vi) impureza estructural aritmética vía continuo		√
(vii) geometrización ubicua núcleos geométricos arqueales		√
(viii) esquematización caracterizaciones categóricas		√
(ix) fluxión y deformación revés de propiedades usuales		√
(x) reflexividad formas complejas de autorreferencia		√
		fluxiones/alternaciones esquemas/núcleos reflexión/hacificación

Tabla 3. Rasgos característicos de las matemáticas a lo largo del siglo XX.

Figura 2. El diamante de las matemáticas modernas (1900–1950) y contemporáneas (1950–hoy).

Bibliografía

[Abel 2003–2013] http://www.abelprize.no/

[Atiyah & Singer 1963] M. Atiyah and I. Singer *The index of elliptic operators on compact manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **69**, 322 (1963).

[De Lorenzo 1977] J. de Lorenzo, *La matemática y el problema de su historia* (Tecnos, Madrid, 1977).

[Gromov 1986] M. Gromov, *Partial Differential Relations* (Springer, New York, 1986).

[Holden & Piene 2010] H. Holden and R. Piene (eds.), *The Abel Prize.* 2003–2007*, The First Five Years* (Springer, Berlín, 2010).

[Lautman 2011] A. Lautman, *Ensayos sobre la dialéctica, estructura y unidad de las matemáticas modernas (*1935–1939*)* (ed. F. Zalamea) (Universidad Nacional, Bogotá, 2011).

[Raussen & Skau 2004] M. Raussen and C. Skau, *Interview with Jean–Pierre Serre*, Notices AMS **51**, 210 (2004).

[Serre 1955] J.–P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérentes*, Ann. Math. **61**, 197 (1955).

[Serre 1956] J.–P. Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier **6**, 1 (1956).

[Ulam 1976] S. M. Ulam, *Adventures of a mathematician* (Scribner's, New York, 1976).

[Zalamea 2009/2012] F.Zalamea, *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas* (Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2009); traducción inglesa, revisada y completada: *Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics* (Urbanomic/Sequence, London/New York, 2012)].

[Zalamea 2009a] F. Zalamea, *Reseña de Helge Holden y Ragni Piene (eds.), The Abel Prize.* 2003–2007*, The First Five Years*, Bol. Mat. **16**(2), 185 (2009).