

Aproximación numérica a la propagación de ondas de tsunami y caso de estudio en la costa Caribe Colombiana

Numerical approximation for the tsunami waves propagation and study case of Colombian caribbean coast

Mario A. Yandar^{1,a}, Richard A. De la cruz^{2,b}

Resumen. El estudio del fenómeno de tsunami ha sido de gran interés, especialmente en la última década. La utilización de modelos matemáticos para simular los efectos de tsunami en océanos y costas ha sido posible, al punto de calcular con gran detalle y fidelidad, los tiempos de llegada y las alturas de ola en zonas específicas de interés. El presente trabajo muestra los elementos matemáticos y computacionales generales de la propagación de tsunami para la cuenca del mar Caribe con enfoque especial a la Bahía de Cartagena, Colombia.

Palabras claves: tsunami, modelamiento matemático, métodos numéricos, ecuaciones de aguas rasas.

Abstract. The study of tsunami has been of great interest in the last decade. Due to the use of mathematical models to simulate the effects of tsunami on oceans and coasts, it has been possible to compute accurately arrival times and wave heights on specific areas of interest. This paper presents a general mathematical introduction and computational elements of the modeling of propagation of tsunami waves for the basin of the Caribbean Sea with special focus on the bay of Cartagena, Colombia.

Keywords: tsunami, mathematical modelling, numerical methods, Shallow Waters equations, Finite Volume Method.

Mathematics Subject Classification: 76B15.

Recibido: agosto de 2015

Aceptado: noviembre de 2015

¹Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

²Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, UPTC, Tunja, Colombia

^amayandarl@unal.edu.co

^bradelacruzg@unal.edu.co

1. Introducción

Los tsunamis son algunos de los fenómenos que se manifiestan más dañinos para las costas y, por lo tanto, el entendimiento de fenómenos físicos similares es de particular importancia. La utilización de modelos matemáticos para estudiar eventos como los tsunamis, han permitido comprender con un alto grado de detalle el peligro en las comunidades expuestas. La simulación matemática puede modelar las características más importantes del desarrollo del tsunami y, eventualmente, escenarios de afectación plausibles para el caso de poblaciones costeras.

La simulación de los procesos físicos asociados a un tsunami se puede realizar por medio de la solución numérica de un sistema de ecuaciones de derivadas parciales. La solución de este sistema representa el movimiento del cuerpo de agua y su eventual desplazamiento sobre el relieve costero en forma de inundación [4, 9]. Cabe mencionar que la simulación de tsunamis, para casos realistas, se presenta como un escenario donde los datos conocidos del sistema de ecuaciones diferenciales parciales son representadas por un conjunto de datos batimétricos (fondo marino) irregulares y por las características de la fuente generadora. La presencia de estos términos irregulares puede dificultar el análisis matemático y numérico de estos sistemas, debido a que causan diversos tipos de discontinuidades y pérdida de regularidad en la solución exacta (cuando se pueda garantizar su existencia) e incrementa la complejidad del cálculo eficiente de una solución numérica [4].

En este documento se presentará la estructura matemática general necesaria para entender el proceso de propagación de ondas en un escenario particular y con las condiciones de fondo marino y costa del caribe Colombiano. La fuente generadora (terremoto submarino) se establece con base en referencias externas. Se analizarán los detalles del modelo y software utilizados [13].

Este artículo introducirá algunas generalidades del sistema de ecuaciones de aguas rasas en dos dimensiones, seguido de la derivación del método numérico y el método de Godunov. A continuación se presentarán algunas características de la implementación del modelo en su aplicación con el Software Clawpack (Conservation Laws Package) y finalmente se muestran algunos resultados sobre el escenario de la cuenca del mar Caribe.

2. El Sistema de ecuaciones de aguas rasas en dos dimensiones espaciales

El efecto de la propagación de ondas tipo tsunami se puede modelar con las ecuaciones de aguas rasas (Shallow Water -SW-, por sus siglas en inglés), ver [9]. La formulación de este modelo tiene en cuenta el balance de las fuerzas que actúan sobre el volumen de agua y las características del fondo marino. Adicionalmente puede tenerse en cuenta los diversos elementos que intervienen en la interacción de la onda con la parte seca de la costa [4]. Debido a la

complejidad matemática y numérica de este modelo, y la importancia de sus posibles aplicaciones teóricas y prácticas, el estudio analítico y numérico de los sistemas de ecuaciones de aguas rasas, se presenta como un problema de amplio interés de estudio e investigación para diversas disciplinas.

El sistema de aguas rasas es considerado un sistema de ecuaciones diferenciales apropiado para representar la propagación de ondas cuyas amplitudes son mayores que la frecuencia [5]. Se presentarán algunos elementos teóricos y algunas soluciones aplicadas sobre las profundidades variables y la rugosidad del fondo bajo las condiciones iniciales.

La formulación del sistema en dos dimensiones de la profundidad promedio de las ecuaciones de aguas rasas no lineales está dada por:

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x + (hv)_y &= 0, \\ (hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)_x + (huv)_y &= -ghB_x - D_u, \\ (hv)_t + (huv)_x + \left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)_y &= -ghB_y - D_v, \end{aligned} \quad (1)$$

donde h es la profundidad del cuerpo de agua, u y v son las componentes horizontales de los flujos de descarga, B es la batimetría o topografía y $D(h, u, v)$ es el coeficiente de arrastre, definido por:

$$D = \frac{gM^2 \sqrt{(u^2 + v^2)}}{h^{5/3}}. \quad (2)$$

Los valores de h , hu , y hv representará los componentes de la profundidad del agua y momento en las direcciones horizontales. Es importante mencionar que los métodos utilizados en este trabajo son conservativos para masa y momento con batimetría plana, y conservativo de masa para batimetría arbitraria, cuando se utiliza una malla fija [9]. La formulación empírica de Manning M es utilizada para modelar la fricción del fondo marino y depende de su rugosidad, la cual se asigna con valor de $M = 0,025$ definido por defecto en la aplicación GeoClaw [13].

Para el sistema de ecuaciones aplicado a la solución de la propagación del tsunami, se considera la relación de longitud de onda H (cientos de kilómetros) sobre la profundidad h (miles de metros), en la Figura 1 se presenta una visión general relacionando los términos de las ecuaciones (1).

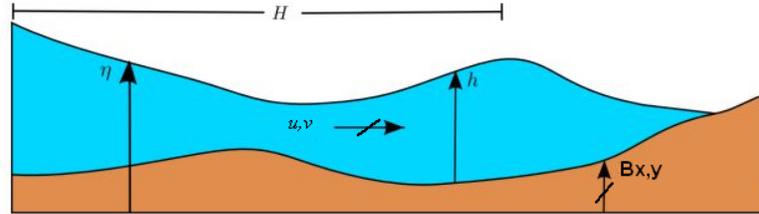


Figura 1: Relación de longitud de ondas.

Para facilitar referencias posteriores escribimos el sistema (1) en forma canónica,

$$q_t + f(q)_x + g(q)_y = \psi(x, y, t), \quad (3)$$

donde

$$q(x, y, t) = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}, \quad f(q) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix},$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \psi = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghB_x - Du \\ -ghB_y - Dv \end{bmatrix}.$$

3. Método numérico

En esta sección se define el método de Godunov para el sistema hiperbólico de aguas rasas en 2D dado por las ecuaciones (1) con fuente $\psi(x, y, t) \equiv 0$, escrito en la forma canónica (3). Para resolver el sistema (1) de aguas rasas en 2D con fuente $\psi(x, y, t) \neq 0$, se utiliza un método de paso fraccional. Ver la Sección 3.2.

3.1. El método de Godunov

Presentamos el método de Godunov siguiendo [9]. Para derivar el método de volúmenes finitos se divide la región Ω en celdas rectangulares de la forma $C_{ij} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$ donde $x_{i+1/2} - x_{i-1/2} = \Delta x$ y $y_{j+1/2} - y_{j-1/2} = \Delta y$. De este modo se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}q(x, y, t)dxdy &= \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} f(q(x_{1+1/2}, y, t)) dy \\ &\quad - \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} f(q(x_{i-1/2}, y, t)) dy \\ &\quad + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(q(x, y_{j+1/2}, t)) dx \\ &\quad - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(q(x, y_{j-1/2}, t)) dx. \end{aligned} \tag{4}$$

Ahora, integrando la expresión (4) de t_n a t_{n+1} y dividiendo por el área de la celda $\Delta x \Delta y$ se obtiene

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{n+1} &= Q_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+1/2,j}^n - F_{i-1/2,j}^n] \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} [G_{i,j+1/2}^n - G_{i,j-1/2}^n] \end{aligned} \tag{5}$$

donde se ha denotado

$$\begin{aligned} Q_{ij}^n &\approx \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x, y, t_n) dx dy, \\ F_{i-1/2,j}^n &\approx \frac{1}{\Delta t \Delta y} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} f(q(x_{i-1/2}, y, t)) dy dt, \\ G_{i,j-1/2}^n &\approx \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(q(x, y_{j-1/2}, t)) dx dt \end{aligned}$$

con $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. El método (5) se conoce como método de Godunov. Para el análisis del método de Godunov en 2D, es conveniente escribirlo primero en 1D. Para el caso de un sistema de leyes de conservación 1D en la forma canónica

$$w_t + \phi(w)_x = 0, \tag{6}$$

el método de Godunov se obtiene de dividir dominio Ω en celdas $\mathcal{C}_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ y procediendo como antes se obtiene

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Phi_{i+1/2}^n - \Phi_{i-1/2}^n), \tag{7}$$

con

$$\begin{aligned} W_i^n &\approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} w(x, t_n) dx \text{ y} \\ \Phi_{i-1/2}^n &\approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi(w(x_{i-1/2}, t)) dt. \end{aligned}$$

Aquí el paso del tiempo Δt se escoge de manera que el número de Courant sea menor o igual a $1/2$ (para más detalles sobre el número de Courant el lector puede consultar [3, 9]). Para el problema hiperbólico (6) la información se propaga con velocidad finita, por lo que es razonable suponer que $\Phi_{i-1/2}^n$ se puede obtener con W_{i-1}^n y W_i^n . Así, se puede usar una fórmula de la forma

$$\Phi_{i-1/2}^n = \mathcal{F}(W_{i-1}^n, W_i^n)$$

para alguna *función de flujo numérico*. El método de Godunov (7) es

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}(W_i^n, W_{i+1}^n) - \mathcal{F}(W_{i-1}^n, W_i^n)).$$

Es esencial que el método numérico sea *convergente*, es decir, la solución numérica debe converger a la verdadera solución de la ecuación diferencial cuando se hace un refinamiento de las celdas (cuando $\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$). Esto generalmente requiere de dos condiciones [12]:

1. El método debe ser consistente con la ecuación diferencial, es decir, la solución se aproxima bien localmente.
2. El método debe ser estable en algún sentido apropiado, es decir que los pequeños errores cometidos en cada paso de tiempo no crecen demasiado rápido en los pasos de tiempo posteriores.

Afortunadamente, para sistemas estrictamente hiperbólicos con dato inicial de variación total pequeña el método es convergente [1] (es importante que el lector también consulte el clásico teorema de Lax-Wendroff [8, 9]). Para el caso 1D, el sistema de leyes de conservación para las ecuaciones de aguas rasas está dado por

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x = 0, \\ (hu)_t + (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x = 0, \end{cases}$$

el cual puede ser escrito en la forma canónica (6). El problema de Riemann para este sistema centrado en $x_{i-1/2}$ tiene una solución auto-similar que es constante a lo largo de los rayos $(x-x_{i-1/2})/(t-t_n) = \text{constante}$, y para $(x-x_{i-1/2})/t = 0$ da el valor de $\tilde{w}^n(x_{i-1/2}, t)$. Denote este valor por $W_{i-1/2}^* = w^*(W_{i-1}^n, W_i^n)$. Esto sugiere definir el flujo numérico $\Phi_{i-1/2}^n$ por

$$\begin{aligned} \Phi_{i-1/2}^n &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi(w^*(W_{i-1}^n, W_i^n)) dt \\ &= \phi(w^*(W_{i-1}^n, W_i^n)). \end{aligned} \tag{8}$$

Así se obtiene un algoritmo simple para implementar el método de Godunov para el sistema de aguas rasas 1D:

1. Resolver el problema de Riemann en $x_{i-1/2}$ para obtener $w^*(W_{i-1}^n, W_i^n)$.

2. Defina el flujo $\Phi_{i-1/2}^n = \mathcal{F}(W_{i-1}^n, W_i^n)$ mediante (8).

3. Aplicar el método de Godunov (7) al sistema de aguas rasas 1D.

Finalmente, para implementar el método de Godunov (5) para el sistema de aguas rasas 2D, se procede de forma natural como en caso 1D, resolviendo el problema de Riemann $q_t + f(q)_x = 0$ con dato $Q_{i-1,j}$ y $Q_{i,j}$ para obtener $Q_{i-1/2,j}^*$, mientras que $Q_{i,j-1/2}^*$ se obtiene de resolver el problema de Riemann $q_t + g(q)_y = 0$ con dato $Q_{i,j-1}$ y $Q_{i,j}$. Los flujos se obtienen por

$$F_{i-1/2,j} = f(Q_{i-1/2,j}^*) \quad \text{y} \quad G_{i,j-1/2} = g(Q_{i,j-1/2}^*).$$

3.2. Un método de paso fraccional con fuente $\psi \neq 0$

Para el sistema (1) de aguas rasas en 2D, se considera el siguiente *método de paso fraccional* que consiste en resolver numéricamente

$$\begin{aligned} q_t + f(u)_x &= 0, \\ q_t + g(u)_y &= 0, \\ q_t &= \psi, \end{aligned} \tag{9}$$

en cada paso de tiempo. Para las celdas $\mathcal{C}_{i-1,j}$ y $\mathcal{C}_{i,j}$ se debe resolver el problema de Riemann 1D en la dirección de x , es decir,

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0, \\ (hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)_x &= -ghB_x - Du, \\ (hv)_t + (huv)_x &= -Dv. \end{aligned} \tag{10}$$

Observe que las primeras dos ecuaciones en (10) se pueden separar de la tercera y son justamente el sistema de aguas rasas 1D con término fuente. Para aproximar la solución del sistema, utilizando el método de Godunov se tiene

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{n+1/2} &= Q_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i+1/2,j}^n - F_{i-1/2,j}^n\right) \\ &= Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f(Q_{i+1/2,j}^*) - f(Q_{i-1/2,j}^*)\right) \end{aligned}$$

con $Q_{ij}^{n+1/2} = \left(h_{ij}^{n+1/2}, m_{ij}^{n+1/2}, s_{ij}^{n+1/2}\right)^\top$, para $m = hu/h$ y $s = hv/h$, y el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es aproximado por el método explícito de Euler (por ejemplo),

$$\begin{aligned} h_{ij}^{n+1} &= h_{ij}^{n+1/2}, \\ m_{ij}^{n+1} &= m_{ij}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} gh_{ij}^{n+1/2} \left(\frac{B_{i+1} - B_i}{2}\right) \\ s_{ij}^{n+1} &= s_{ij}^{n+1/2} - \Delta t \left(D_{ij}^{n+1/2}\right) \frac{s_{ij}^{n+1/2}}{h_{ij}^{n+1/2}}. \end{aligned}$$

De forma similar se aproxima el problema de Riemann 1D en la dirección de y . Otra versión del método de paso fraccional para el sistema de aguas rasas en 2D puede ser consultado en [10].

4. Características generales y modelo

Las características generales tenidas en cuenta para el desarrollo del presente ejercicio, son:

- La topografía y batimetría pueden ser especificadas mediante múltiples configuraciones de datos para diferentes resoluciones en el análisis del flujo.
- La mayoría de las aplicaciones hechas en *Geoclaw* requiere el uso de coordenadas geográficas, aunque tiene la opción de usar coordenadas cartesianas.
- Las celdas pueden cambiar dinámicamente entre húmeda y seca.
- Se utiliza un oceano en reposo como condición inicial para la propagación del tsunami.
- El código facilita la ubicación de indicadores, con ayuda de sus coordenadas, para medir la variación de superficie libre del mar respecto al tiempo.

4.1. Batimetría

El proceso de propagación de ondas sobre la cuenca se vé afectado de forma compleja si se tiene en cuenta la disparidad del fondo marino, forma de costa, entre otros. La información batimétrica utilizada en este ejercicio se obtuvo de la base de datos “Grid Viewing and Data Acces” del GEBCO [7] (General Bathymetric Chart of the Oceans), un modelo global de 30 segundos de arco de resolución.

4.2. Clawpack

El aplicativo *Clawpack* (Conservation Laws Package) [13] de la Universidad de Washington es un conjunto de métodos de volúmenes finitos para sistemas de leyes de conservación lineales y no lineales. Este aplicativo concebido en 1994 por el profesor Randall LeVeque, tiene como principales funcionalidades:

- Solución de ecuaciones diferenciales parciales tipo hiperbólico proporcionando un solucionador de Riemman.
- Hay balance hidrostático.
- Aplicación de refinamiento adaptativo de mallas.

4.3. Refinamiento adaptativo de mallas

Los métodos de alta resolución tipo Godunov solucionan los problemas de Riemman en cada interface de malla [5]. El mecanismo de refinamiento de malla adaptativo (Adaptative Mesh Refinement - AMR-, por sus siglas en inglés) es utilizado para emplear mallas de mas fina resolución en regiones de particular interés, la cual puede asignarse para una ventana geográfica específica o, dinámicamente siguiendo los flujos y alturas de ola [5]. El refinamiento adaptativo se presenta como una utilidad eficiente para el modelamiento: las mallas gruesas pueden capturar la propagación del tsunami en aguas profundas, mientras mallas finas son necesarias en áreas costeras. En la medida que las ondas ingresan al área costera, la velocidad decrece y las ondas son comprimidas, lo cual hace más larga su amplitud que en aguas profundas.

Los métodos de refinamiento adaptativo usan diferentes tamaños de mallas en diferentes dominios. Estos esquemas pueden ser aplicados a problemas altamente localizados, como normalmente ocurre en sistemas hiperbólicos. El aplicativo *ClawPack* implementa este método mediante el paquete *GeoClaw* [13], algunas propiedades requeridas incluyen la conservación de masa y momento y la preservación de estados estacionarios.

4.4. Deformación del subsuelo: Okada

Mediante el modelo de dislocación elástica [11] se muestra la deformación del fondo marino por efecto de un movimiento sísmico. Los parámetros utilizados para calcular dicha deformación son:

- la localización del hipocentro d ,
- la geometría de la falla: ancho, largo, orientación e inclinación,
- la dirección del movimiento,
- el desplazamiento medio de los bloques (dislocación),
- el momento sísmico.

La deformación inicial generadora del tsunami se realiza mediante el modelo propuesto por Okada [11], con lo que se determina la componente vertical del desplazamiento en la superficie.

5. Caso de estudio: Caribe Colombiano

Para el caso del caribe no se tienen registros de eventos sísmicos recientes (últimos 100 años o más) que hayan generado tsunamis en esta zona. Sin embargo, no significa que no exista el riesgo por este tipo de eventos y constituye un caso de interés [2].

Para el presente ejercicio se pretende representar las condiciones de un evento ocurrido en la costa caribe panameña el 7 de septiembre de 1882, el cual se presenta en el ejercicio de Alerta de tsunami para el Caribe de la Comisión Oceanográfica Intergubernamental [6], mostrando el escenario inicial y la propagación sobre la cuenca del Caribe. Los parámetros para el cálculo de la ruptura inicial, de acuerdo a dicho ejercicio [6], corresponde a dos secciones con la información general presentada en la Tabla 1.

	Segmento Oeste	Segmento Este
Latitud	9.7 <i>N</i>	9.83 <i>N</i>
Longitud	77.9 <i>W</i>	79.32 <i>W</i>
Ancho	60 <i>Km</i>	40 <i>Km</i>
Largo	182 <i>Km</i>	120 <i>Km</i>
Profundidad	5 <i>Km</i>	5 <i>Km</i>
Strike	71 <i>g</i>	120 <i>g</i>
Slip	11 <i>m</i>	11 <i>m</i>
Rake	90 <i>g</i>	90 <i>g</i>
Dip	40	40

Tabla 1: Parámetros de generación evento sísmico Panamá.

Con la aplicación del modelo de deformación Okada, mediante el aplicativo del mismo nombre de ClawPack, se utilizan los parámetros anteriores obteniendo un cálculo una Magnitud de momento $M_w = 8,5266$, en concordancia con lo calculado en el ejercicio de alerta de tsunami [6]. El resultado se presenta en la Figura 2.

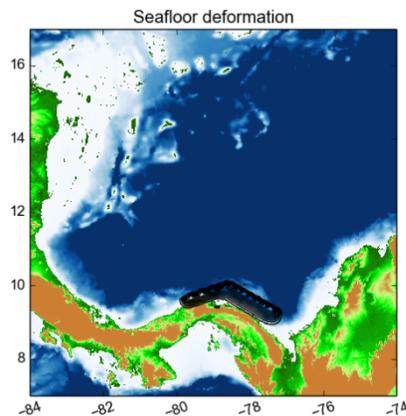


Figura 2: Batimetría y Topografía general Mar Caribe. Resolución 30 segundos - GEBCO. Se presenta deformación inicial por sismo en dos segmentos para el evento propuesto en [6] y con $M_w = 8,5266$.

Estos parámetros se tomaron y ajustaron a *GeoClaw* para compararse con el ejercicio de respuesta de Tsunami de la Comisión Oceanográfica Intergubernamental de la Unesco para Marzo 2015 [6], donde se presenta las características del mismo evento generador presentado en este modelo. El mapa general de máximas amplitudes en la Figura 3, muestra la tendencia de propagación de energía en la cuenca Caribe [6].

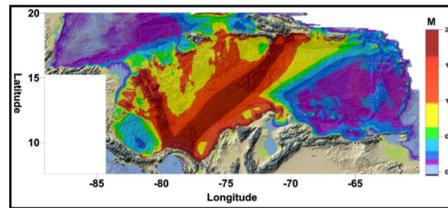


Figura 3: Amplitudes máximas para la Cuenca Caribe. Fuente: Caribe Wave 2015. Se muestran las alturas máximas entre 0 y 2m [6].

Los resultados obtenidos presentan las amplitudes máximas y los tiempos aproximados de arribo en diferentes puntos, ver figuras 4, 5 y 6, donde se observa el efecto de la propagación, el efecto de la batimetría en zonas costeras. Para este caso de estudio, el interés se sitúa en la bahía de Cartagena, indicada en la Figura 7, mostrando las alturas máximas en el detalle de la Bahía, en efecto reduciendo la velocidad de llegada y aumentando la amplitud de la onda. Aquí es importante observar como la forma de la costa y, efectivamente, la batimetría afectan la llegada del frente de olas del tsunami.

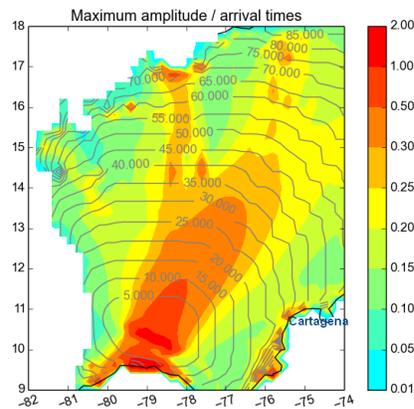


Figura 4: Amplitudes máximas y tiempos de llegada para la cuenca del mar Caribe. Se presentan las alturas máximas (en metros) y tiempos estimados de llegada (en minutos). Los ejes presentan la localización en Latitud y Longitud.

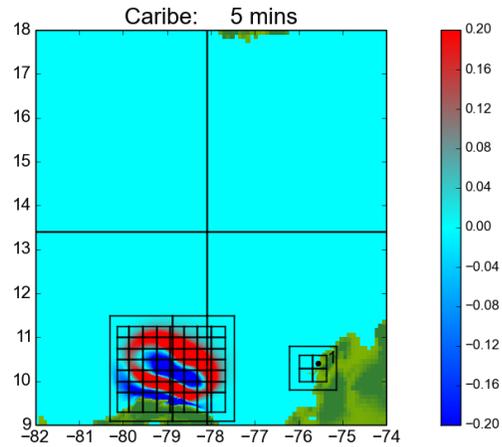


Figura 5: Propagación tsunami cuenca del Caribe. Se presenta el estado de la propagación del tsunami 5 minutos después del sismo. En la cuadrícula se presenta la zona de interés (Bahía de Cartagena), definida previamente en el aplicativo a fin de obtener un detalle del modelo en esta área (AMR). Las alturas se muestran entre -20 cms y 20 cms debido a las bajas amplitudes de las ondas en aguas profundas.

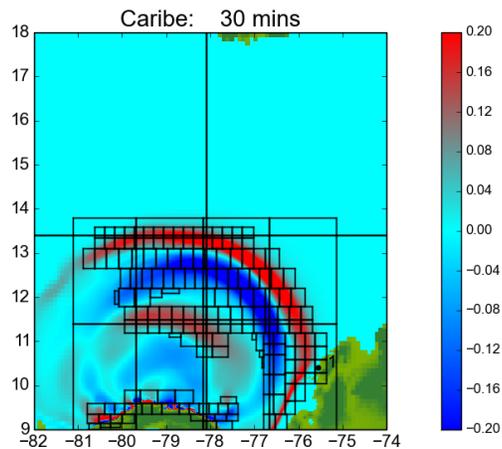


Figura 6: Propagación tsunami cuenca del Caribe. Se presenta el estado de la propagación del tsunami 30 minutos después del sismo. En las cuadrículas se presentan diferentes niveles de resolución de las mallas (AMR). En la medida que las ondas se aproximan a las costas reducen su velocidad pero su amplitud se hace mayor.

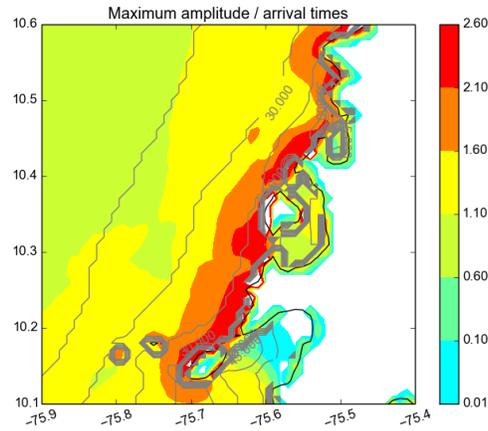


Figura 7: Amplitudes máximas y tiempos de llegada para Bahía de Cartagena. Se presentan las alturas máximas de entre 0 y 2.6 metros y tiempos estimados de llegada de entre 30 y 40 minutos luego de la generación del tsunami. El área detallada corresponde a las latitudes 10.1 N y 10.6 N, longitudes 75.4 W y 75.9 W.

6. Conclusiones

La comprensión de la estructura matemática y su aplicación a casos reales, definen la utilidad de modelos como el aquí presentados. Características computacionales incorporadas en software como *ClawPack*, consideradas desde sus inicios con el análisis numérico, la eficiencia y la eficacia computacional, han permitido empatar el requisito indispensable de analizar y comprender la base matemática para cualquier modelo, con la base algorítmica y computacional diseñada para propósito general y como mecanismo confiable de apropiación del conocimiento y retroalimentación oportuna al mismo modelo.

El proceso de comprender el fenómeno de la generación y propagación de un tsunami dá una visión amplia sobre el uso de los modelos numéricos y su relevancia para evaluar escenarios plausibles de riesgo. El presente modelo es un caso general de uso de las herramientas matemáticas y computacionales, aplicados con las restricciones de datos del terreno, en este caso, la batimetría y topografía utilizadas para la cuenca del Caribe y la bahía de Cartagena.

El ejercicio de la Comisión Oceanográfica Intergubernamental muestra un escenario de riesgo por un evento generador de tsunami para la cuenta del Caribe y su posible impacto a escala regional. A su vez, el caso de estudio presentado, muestra un detalle de propagación también sobre la cuenca Caribe y especialmente sobre la bahía de Cartagena, utilizando las mismas características del evento generador obteniendo resultados equivalentes, con la posibilidad

de observar el detalle de los tiempos y el espacio geográfico con la llegada de los frentes de olas.

Es importante resaltar que estos resultados solo pueden interpretarse en virtud del detalle de la resolución batimétrica y topográfica a la que se tuvo acceso, y no constituyen fuente relevante para diseño o toma de decisiones asociadas al evento de tsunami en esta región. Sin embargo, tanto el modelo numérico y aplicaciones computacionales muestran que los escenarios y condiciones simuladas coinciden con otros estudios como los referidos en este trabajo.

Con la observación de los resultados de la propagación de ondas y su llegada a las costas, la pregunta obligada es, Qué ocurrirá en las poblaciones costeras. El proceso de potencial inundación en zonas de interés es parte de un trabajo futuro de vital importancia para efectos de preparación y toma de decisiones; el eventual proceso de inundación requiere considerar distintos elementos con efectos locales de relevancia, entre ellos algunos como los señalados en [14]. Para estos modelos de inundación, se debe contar con batimetría y topografía de alta resolución, distribución de la infraestructura local (casas, puertos, calles) y aspectos geomorfológicos, por ejemplo el impacto de transporte de sedimentos, como se ha realizado en estudios de gran detalle [3, 4].

Agradecimientos

Se extiende un agradecimiento al profesor Rui Ferreira del Instituto Superior Técnico de Lisboa y Juan Carlos Galvis de la Universidad Nacional de Colombia sede Bogotá, cuya orientación, respectivamente, práctica sobre el comportamiento de la inundación y teórica en Leyes de Conservación, ecuaciones de aguas rasas, permitieron este trabajo.

De igual manera al profesor HansJürgen Meyer de la Corporación OSSO cuyo conocimiento y experiencia sobre tsunamis en Colombia ha permitido interpretación de resultados para el caso de estudio planteado.

Finalmente al profesor Rafael Hurtado y al Grupo de Campos y Partículas del Departamento de Física - Universidad Nacional de Colombia, por facilitarnos el uso de los servidores para la generación de los modelos aquí presentados.

Referencias

- [1] A. Bressan and H. K. Jenssen, *On the convergence of Godunov scheme for nonlinear hyperbolic systems*, Chinese Ann. Math. **21** (2000), 1–16.
- [2] J. Caicedo, B. Martinelli, H. Meyer, and R. Steer, *Efecto de tsunami del mar caribe en la costa de Colombia*, Alerta Tsunami-Modelamiento, Corporación OSSO, 1996.

- [3] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy, *On the partial difference equations of mathematical physics*, IBM Journal **11**, **S** (1967), 215–234, (originally appeared in Math. Ann., vol. 100, pp. 32–74, 1928).
- [4] R. M. Ferreira, M. J. Franca, J. G. Leal, and A. H. Cardoso, *Mathematical modelling of shallow flows: Closure models drawn from grain-scale mechanics of sediment transport and flow hydrodynamics*, Can. J. Civil. Eng. **36** (2009), 1604–1621.
- [5] D. L. George, *Finite volume methods and adaptative refinement for tsunami propagation and inundation*, 2006, Ph.D. Thesis, University of Washington.
- [6] Intergovernmental Oceanographic Commission (IOC), *A caribbean and northwestern atlantic tsunami warning exercise 2014*, Exercise Caribe Wave/LANTEX 15.
- [7] ———, *General bathymetric chart of the oceans*, International Hydrographic Organization (IHO)GEBCO, 2013.
- [8] P-D. Lax and B. Wendroff, *Systems of conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960), 217–237.
- [9] R. LeVeque, *Numerical methods for conservation laws*, Lectures in Mathematics ETH Zurich (1992).
- [10] ———, *Balancing Source Terms and Flux Gradients in High-Resolution Godunov Methods: The Quasi-Steady Wave-Propogation Algorithm*, J. Comp. Phys. **146** (1998), no. 1, 346–365.
- [11] Y. Okada, *Internal Deformation due to shear and tensile faults in a half-space*, Bull. Seism. Soc. Am. **82** (1992), no. 2, 1018–1040.
- [12] J-M. Hérard T. Gallouët and N. Seguin, *Some approximate godunov schemes to compute shallow-water equations with topography*, Computers & Fluids **32** (2003), 479–513.
- [13] Clawpack Development Team, *Clawpack software*, 2014, Version 5.2.2.
- [14] M. A. Yandar, *Propagación de olas e inundación por tsunami: Análisis numérico de una solución*, Universidad Nacional de Colombia, 2015, Tesis de Maestría-En preparación.