

Reseña del Encuentro de Análisis Global 2019

Leonardo A. Cano García^{1,a}

RESUMEN. Hacemos una breve reseña del *Encuentro de Análisis Global 2019* realizado alrededor de la visita del Profesor Georges Skandalis.

El profesor Georges Skandalis de la Universidad Paris Diderot visitó la Universidad Nacional la semana del 9 al 13 de diciembre. Alrededor de su visita la profesora Carolina Neira y yo, con la colaboración del Departamento de Matemática y la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia sede Bogotá, organizamos el *Encuentro de Análisis Global 2019* que se llevó a cabo los días 11 y 12 de Diciembre de 2019. La idea del encuentro fue generar un ambiente que permitiera a la comunidad académica local aprovechar al máximo la visita del profesor Skandalis y catalizara positivamente la interacción de estudiantes y profesores interesados en los temas del análisis global. Para ello invitamos a los profesores Alexander Cardona y Andrés Reyes de la Universidad de los Andes, al profesor Jorge Plazas de la Universidad Javeriana y al profesor Alexander Cruz de la Universidad Nacional de Colombia a dar charlas que mostraran a los estudiantes el interés de expertos nacionales en los temas a tratar y que fomentaran la interacción objetivo del encuentro que giró alrededor del minicurso *The Baum-Connes conjecture and applications* que dió el profesor Skandalis.

Brevísimo resumen del minicurso

El profesor Skandalis es un experto internacional en geometría no conmutativa y la conjetura de Baum-Connes es una de las más relevantes de esta rama de la matemática. En su primera charla el profesor Skandalis explicó los fundamentos para entender la conjetura y su importancia. Empezó explicando la C^* -álgebra asociada a un grupo y el *producto cruzado* de una C^* -álgebra en la que debidamente actúa un grupo G (una G -álgebra), también esbozó la periodicidad

¹Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

^alcanog@unal.edu.co

de Bott y la invarianza homotópica, entre otras propiedades importantes de la K -teoría como un invariante de la categoría de C^* -álgebras. Luego dió una breve descripción de KK -teoría, otro invariante de la categoría de C^* -álgebras, mencionó qué es el producto de Kasparov y dijo que las definiciones y resultados podían extenderse, teniendo los debidos cuidados técnicos, al caso equivariante. Luego nos recordó qué son los espacios clasificantes de grupos discretos.

Con lo dicho en el párrafo anterior, estamos preparados para entender, al menos de forma muy rudimentaria, la formulación de la conjetura de Baum–Connes que se dió en el minicurso. Sean G un grupo discreto, A una G -álgebra, y BG el espacio clasificante de G con G -haz principal $\xi_0 : \underline{E}G \rightarrow BG$. Denotamos $K_0(A \rtimes_r G)$, la K -teoría del *producto cruzado* $A \rtimes_r G$ y definimos la K -teoría topológica del grupo G como $K_{0,top}(G; A) := \lim_{\rightarrow} KK_G(C_0(Y), A)$ donde el límite inductivo es tomado sobre todos los subconjuntos cerrados y G -invariantes $Y \subset \underline{E}G$. Con el producto de Kasparov es posible definir el homomorfismo $\mu_G : K_{0,top}(G) \rightarrow K_0(C_r^*(G))$ donde el rango de la función μ_G es la K -teoría de $C_r^*(G)$ la C^* -álgebra reducida de G . La conjetura de Baum–Connes afirma que μ_G es un isomorfismo. De manera similar es posible formular la conjetura de Baum–Connes con coeficientes. Para todo lo anterior Skandalis recomendó la revisión de los temas realizada en [2].

En la segunda charla titulada *K-theory with real coefficients and a Baum–Connes conjecture localized at the group trace*, Skandalis explicó más profundamente hasta qué punto la conjetura ha sido probada y refutada y empezó a explicar la conjetura de Baum–Connes localizada en la traza del grupo, uno de sus resultados recientes (ver [1]). Un resumen más detallado de lo realizado en esta charla esta fuera no sólo del interés de esta reseña sino de mis capacidades actuales.

Las charlas nacionales

La charlas de los profesores nacionales estuvieron fuertemente relacionadas con sus áreas de investigación y en intersección con la geometría no conmutativa. Andrés Reyes dió la charla *Fases topológicas de la materia y la representación de espín* relacionada con el trabajo publicado en [3]. Alexander Cardona dió la charla *Operadores pseudo-diferenciales globales y el cálculo de invariantes espectrales* que está relacionada con su proyecto de investigación reciente y que está en proceso de publicación. Alexander Cruz dió la charla *Integral structures in the context of non-commutative Hodge structures* que también está relacionada con sus proyectos de investigación actuales. Finalmente la charla de Jorge Plazas fue titulada *Conway's Big Picture and quantum statistics of modular curves* y está relacionada con su trabajo en [5].

Otras actividades

Con Skandalis también discutimos de manera más personal la importancia de la noción de grupoide tangente como marco para entender y extender diferentes trabajos en teoría del índice. El grupoide tangente debidamente adaptado permite dar pruebas del teorema de Atiyah–Singer para un operador elíptico, para familias, para foliaciones y para operadores hipoeelípticos en variedades de contacto, así como otros teoremas del índice y en sí mismo da un contexto abstracto para entender y extender estos resultados. Gran parte del contenido de estas charlas está en [4]. En algunas de las charlas alrededor de estos temas participaron la profesora Carolina Neira y el estudiante de maestría Juan Agudelo.

Con el fin de incentivar una mayor interacción con el profesor visitante organizamos unas horas de café y galletas en la sala de profesores del departamento de matemáticas.

Reflexiones personales

En lo personal la visita del profesor Skandalis y el Encuentro de Análisis Global resultaron altamente estimulantes, ya que me mostraron posibles rumbos no sólo para dar dirección a mis proyectos de investigación sino también para esclarecer los temas básicos que los estudiantes interesados en el análisis global deberían aprender.

En mi opinión la asistencia de varios profesores de Bogotá al encuentro y las charlas que se dieron en el mismo muestran que hay un interés local en los temas tratados. Sin embargo, lastimosamente, hubo poca participación de estudiantes. Esto puede ser debido a lo avanzado de los temas tratados pero también creo que faltó una mejor divulgación de parte de nosotros los organizadores.

Por último, en un mundo ideal, las charlas tratadas deberían servir de acicate para consolidar grupos de investigación que prepararen a los estudiantes más jóvenes en la comprensión de los principales resultados del análisis global y al mismo tiempo expresen la colaboración mutua con la obtención de nuevos resultados publicables.

Referencias

- [1] P. Antonini, S. Azzali, and G. Skandalis, *The Baum–Connes conjecture localised at the unit element of a discrete group*, arXiv:1807.05892, 2018.
- [2] M. P. Gómez Aparicio, P. Julg, and A. Valette, *The baum-connes conjecture: an extended survey*, arXiv:1905.10081, 2019.
- [3] S. Calderón and A. F. Reyes-Lega, *Majorana fermions and orthogonal complex structures*, Modern Physics Letters A, 2018.

- [4] C. Debord and G. Skandalis, *Lie groupoids, pseudodifferential calculus and index theory*, <https://arxiv.org/abs/1907.05258>, 2019.
- [5] J. Plazas, *Noncommutative Geometry of Groups Like $\Gamma_0(N)$ p -Adic Numbers*, *Ultrametric Analysis and Applications* **11** (2019).