Reseña de tesis

Reseñas de algunos trabajos de pregrado de la carrera de Matemáticas Universidad Nacional de Colombia Sede Bogotá. 2020-I

Carolina Neira Jiménez[1,a]

1. **Algunas relaciones entre el funtor de compactación de Stone-Čech y el funtor espectro en el contexto de los retículos**

   Estudiante **Hernán Santiago Angarita García***

   Director *Lorenzo Acosta Gempeler***

   Emails *hsangaritaga@unal.edu.co, **lmacostag@unal.edu.co

   Resumen. Dado un retículo L, podemos dotar al conjunto de los ideales primos de L con la topología de la envolvente del núcleo (conocida también como topología de Zariski o topología de Stone) obteniendo un espacio topológico $spec(L)$, llamado espectro primo de L. Esta construcción es, en realidad, un funtor (contravariante) de una cierta categoría de retículos en la categoría **Top** de los espacios topológicos. Si nos restringimos a los retículos acotados, los espacios topológicos correspondientes se llaman *espacios espectrales* y se caracterizan por ser *compactos, sobrios* (todo cerrado irreducible es la adherencia de un único punto) y *coherentes* (tienen una base de abiertos-compactos que es cerrada para intersecciones finitas).

   Una clase muy importante de retículos es la de los *retículos de Boole* (retículos distributivos y complementados). Los espacios topológicos correspondientes se llaman *espacios de Stone* y son exactamente los espacios de Hausdorff, compactos y totalmente disconexos. Cada retículo distributivo y acotado L tiene asociados dos retículos de Boole: $C(L)$ (retículo de los elementos complementados de L) y $B(L)$ (extensión booleana libre de B). $C(L)$ es el retículo de Boole "más grande" por debajo de L y $B(L)$ es el retículo de Boole "más pequeño" por encima de L. C y B son funtores de la categoría $\mathfrak{D}_0^1$ de los retículos distributivos acotados en la categoría $\mathfrak{B}$ de los retículos de Boole.

   Por otro lado, dado un espacio topológico X, podemos asociarle un espacio de Hausdorff y compacto $\beta(X)$, subespacio de un hipercubo,

[1]Coordinadora Carrera de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

[a]cneiraj@unal.edu.co

$\prod_{f\in C(X,I)} I_f$, producto de copias del intervalo $[0,1]$. Esta construcción es un funtor de **Top** en la categoría **HComp** de los espacios de Hausdorff compactos. Este funtor β se conoce como el funtor de Stone-Čech y cuando se restringe a los espacios de Tychonoff corresponde a la construcción llamada *compactación de Stone-Čech*.

Cuando $\beta(X)$ resulta ser totalmente disconexo, este espacio es entonces homeomorfo al espectro de un retículo de Boole. Se sabe, por ejemplo, que si X es un espacio discreto entonces $\beta(X)$ es homeomorfo al espectro del retículo de Boole $\wp(X)$ de las partes de X, y por lo tanto es totalmente disconexo.

Inspirados en una de las construcciones clásicas del funtor de Stone-Čech, introducimos, para cada objeto Z de una categoría $\mathfrak{C}$ con productos, un funtor Π_Z, que a cada objeto X de $\mathfrak{C}$ le asocia un producto de copias de Z, análogo al hipercubo mencionado arriba. En el caso particular de la categoría **Top**, esta construcción es natural, en el sentido en que si los espacios Z y W están conectados de cierta manera, los funtores Π_Z y Π_W también están conectados. Reproduciendo la construcción del funtor β en este contexto, se obtiene un funtor β_Z, para cada espacio topológico Z, subfuntor de Π_Z. Mostramos que si Z es de Hausdorff, el funtor β_Z tiene una propiedad universal como la del funtor de Stone-Čech. Estudiamos los casos particulares en que Z es $[0,1]$, $\mathbf{2} = \{0,1\}$ discreto y el espacio de Sierpinski $\mathbb{S}$. Notamos que el funtor de Stone-Čech es un caso particular de nuestra construcción, y que cuando se restringen los funtores β y $\beta_{\mathbf{2}}$ a la categoría **FZD** de los espacios fuertemente z-dimensionales, $\beta_{\mathbf{2}}$ y β resultan isomorfos. El funtor $\beta_{\mathbf{2}}$ es especialmente interesante, pues permite construir compactaciones de espacios de Hausdorff totalmente disconexos.

Finalmente, apoyados en el funtor $\beta_{\mathbf{2}}$, construimos un nuevo funtor $B_{\mathbf{2}}$ de la categoría de los retículos distributivos acotados $\mathfrak{D}_0^1$ en la categoría de los retículos booleanos $\mathfrak{B}$, y que resulta diferente al funtor de los complementados $C\colon \mathfrak{D}_0^1 \to \mathfrak{B}$ y al funtor de extensión booleana libre $B\colon \mathfrak{D}_0^1 \to \mathfrak{B}$.

2. **Gráficos existenciales Alfa de Pierce sobre el toro**

Estudiante **Daniel Camilo Arana Hernández***

Director *Arnold Oostra***

Emails *dcaranah@unal.edu.co, **aaoostra@gmail.com

Resumen. Los *gráficos existenciales*, inventados y desarrollados por Charles Sanders Peirce (1839-1914), constituyen una representación de la lógica clásica mediante diagramas bidimensionales. En particular, los gráficos *Alfa* son una representación gráfica del cálculo proposicional clásico; los gráficos *Beta* corresponden a la lógica de primer orden; los gráficos *Gama*

incluyen representaciones de lógicas de orden superior y lógicas modales. Los elementos para desarrollar los gráficos Alfa son una superficie plana llamada *hoja de aserción*, que es el lugar donde se trazan los gráficos; *letras* que representan las proposiciones; y *cortes*, que son curvas de Jordan. El sistema de los gráficos Alfa se completa con un conjunto de *reglas de transformación* que permiten cambiar un gráfico en otro de manera coherente con la lógica, lo cual conduce a una auténtica relación de deducción gráfica. Cabe mencionar que estas mismas reglas se adaptan a los gráficos Beta y Gama.

Una inquietud que surge en el contexto de los gráficos existenciales es: ¿Qué sucede si la superficie donde se trazan los gráficos no es un plano? ¿Cuáles elementos se requieren? ¿Qué interpretación se les puede dar a estos elementos? ¿Qué reglas de transformación se pueden adoptar en este caso? En este trabajo de grado, en particular, se aborda el problema específico de los gráficos existenciales Alfa tomando como hoja de aserción la superficie del toro.

3. **Extensiones de la Topología de Furstenberg**

Estudiante **Miguel Botero Aulestia***

Director *Germán Preciado López***

Emails *miboteroau@unal.edu.co, **gpreciadol@unal.edu.co

Resumen. Este documento expone los conocidos espacios topológicos de Fürstenberg y Golomb, así como sus propiedades más importantes: propiedades de separación, conexidad, compacidad y metrizabilidad. Explora extensiones de dichos espacios sobre los enteros gaussianos y sobre los números racionales, estudiando las mismas propiedades. Cuenta con algunos ejemplos que muestran cómo importantes teoremas de la teoría de números pueden atacarse desde una perspectiva topológica.

Palabras clave: Base Topológica, Espacio Regular, Compacidad, Conexidad, Teorema de Metrización de Urysohn, Ultramétrica, Enteros Gaussianos, Teorema de Sierpinski.

4. **Análisis de viabilidad de la aplicación del modelo de Machine Learning en la Imprenta de Billetes del Banco de la República de Colombia**

Estudiante **Marco Fidel Caro Durán***

Director *Jorge Mauricio Ruiz Vera***

Emails *mfcarod@unal.edu.co, **jmruizv@unal.edu.co

Resumen. El presente trabajo es producto de la Pasantía realizada en 2020 en la imprenta de Billetes del Banco de la República. En el marco de la pasantía se implementó un modelo de Machine Learning con el objetivo de pronosticar la demandas de dos de los productos que fabrica

la planta de acuerdo con las características específicas y la información histórica de la producción. El lenguaje de programación que se utilizó para procesar y filtrar los datos fue Python. Una vez se analizaron los datos, se aplicó regresión lineal múltiple para que el algoritmo obtuviera un modelo predictivo. Una vez se obtuvieron los modelos se realizaron algunas pruebas con datos conocidos para establecer la fiabilidad de los resultados. Cabe mencionar que, por las condiciones del manejo de confidencialidad de la información del Banco, los datos presentados fueron alterados en su magnitud sin perder la naturaleza de su comportamiento; y que tampoco se tiene en cuenta el impacto de la pandemia causado por el COVID-19.

5. **Sobre las Leyes de reciprocidad: cuadrática, cúbica y bicuadrática**

Estudiante **Iván René Cuéllar Rodríguez***

Director *John Jaime Rodríguez Vega***

Emails *ircuellarr@unal.edu.co, **jjrodriguezv@unal.edu.co

RESUMEN. *Sobre las Leyes de reciprocidad: cuadrática, cúbica y bicuadrática* es un trabajo que traslada al lector a la época de Gauss. En este periodo estuvo en auge la teoría de números y se realizaron enormes avances en las extensiones para trabajar esta materia. La formulación y las demostraciones de esas leyes constituyeron la teoría. Este trabajo se realizó a partir de unas nociones básicas de la teoría de números, algunos conceptos de álgebra abstracta, acompañados de las sumas de Gauss, y las sumas de Jacobi. Estas herramientas sirvieron para demostrar las leyes. La ley de reciprocidad cuadrática se demostró con sumas de Gauss. La ley de reciprocidad cúbica se hizo de dos maneras distintas: al estilo que lo hizo Eisenstein y también utilizando las sumas de Jacobi. Por último, se demostró la ley de reciprocidad bicuadrática, se gestaron definiciones y teoría análoga.

6. **Un operador integral en espacios de (φ, α)-variación en el sentido de Riesz**

Estudiante **Juan Felipe González Ostos***

Director *René Erlin Castillo***

Emails *jufgonzalezos@unal.edu.co, **recastillo@unal.edu.co

RESUMEN. En este trabajo se estudia el espacio de funciones de variación acotada llamada la (φ, α)-variación en el sentido de Riesz. Se muestran propiedades y resultados dentro de este espacio en el conjunto de los reales, entre los cuales se encuentran teoremas de convergencia, que resultan ser análogos a los que se tienen en espacios de φ-variación, dado que este es una generalización de dichos espacios cambiando la derivada usual a la α-derivada. Por último se estudia el comportamiento de un operador integral de convolución en este espacio funcional, buscando resultados importantes que se puedan aplicar a la teoría de aproximación donde este espacio y operador juegan un papel trascendental.

Palabras clave: Variación acotada de Riesz, operadores integrales de convolución, convergencia, (φ, α)-variación, α-derivada.

7. **Sobre la clasificación de variedades Fano de dimensión 3**

Estudiante **Diana Estefania Pulido***

Director *John Alexander Cruz Morales***

Emails *depulidod@unal.edu.co, **jacruzmo@unal.edu.co

Resumen. Las variedades proyectivas suaves cuyo haz anticanónico $-K_X$ es amplio son conocidas como variedades Fano, espacios proyectivos y cuádricas suaves son ejemplos comunes de estas. En cuanto a su clasificación, Kollar, Miyaoka y Mori demostraron que existe solo un número finito de topologías posibles para variedades suaves Fano en cualquier dimensión dada. En dimensiones bajas se sabe que la única curva Fano es $\mathbb{P}^1_k$, las superficies Fano son cuadráticas o blow-ups del plano proyectivo en d ($d \leq 8$) puntos genéricos. La clasificación completa de las variedades Fano de dimensión 3 se debe a Iskovskikh, Mori y Mukai. Sin embargo, no hay clasificación o descripción conceptual de las variedades Fano en dimensiones superiores a 3.

En este trabajo se presentarán algunos aspectos geométricos de este tipo de variedades y un bosquejo de los métodos utilizados para la clasificación de variedades Fano de dimensión 3 con nómero de Picard 1.

Palabras clave: Variedad Fano, Geometría algebraica, divisor canónico, Clasificación, sistema lineal

8. **Lógicas cuantal valuadas**

Estudiante **David Reyes Gaona***

Director *Pedro Hernán Zambrano***

Emails *davreyesgao@unal.edu.co, **phzambranor@unal.edu.co

Resumen. En este trabajo introducimos y estudiamos propiedades básicas de una clase de lógicas finitarias que toman valores de verdad sobre un tipo de retículos completos llamados cuantales valuados (ver [2]) utilizados para llevar a contextos topológicos más generales las nociones y métodos de la teoría de espacios pseudo métricos. Con base en estos objetos generalizamos la propuesta de lógica continua presentada en [1], encontrando condiciones suficientes en los cuantales valuados para que las lógicas asociadas tengan propiedades deseables, más precisamente obtenemos un Test de Tarski-Vaught sobre cuantales valuados co-Girard y una versión restringida del teorema de Łos sobre cuantales co-divisibles que tengan una topología asociada en la que son compactos y Hausdorff.

Como consecuencias inmediatas aparece un teorema de compacidad en la lógica asociada y la existencia de modelos ω_1-saturados módulo un condición de descendencia contable.

Tales resultados los tomamos como preguntas test para la formulación de un marco teórico en lógica matemática en el estudio de espacios topológicos. Los resultados del capítulo 3 son originales, fruto de una investigación durante el último año.

Palabras clave: Cuantales valuados, lógica cuantal valuada, cuantales co-Girard, cuantales co-divisibles, Test de Tarski-Vaught, Teorema de Łos.

Referencias

[1] I. Ben-Yaacov, A. Berenstein, C. W. Henson, A Usvyatsov, *Model Theory for Metric Structures*, Volume 2 London Mathematical Society Lecture Note Series pg 315-427, *Cambridge University Press*, 2008.

[2] R. Flagg, *Quantales and continuity spaces*, Algebra universalis, Volume 37 pg 257-276, 1997.

9. **Solución Numérica de la Ecuación de Schrödinger mediante el Método Libre de Malla de Conjuntos Finitos de Puntos**

Estudiante **Juan Diego Rojas Zambrano***

Director *Jorge Mauricio Ruiz Vera***

Emails *jdrojasz@unal.edu.co, **jmruizv@unal.edu.co

Resumen. En este trabajo se aplica el método de conjuntos finitos de puntos (FPM) para solucionar numéricamente la ecuación de Schrödinger dependiente e independiente del tiempo. Este método es la combinación de varias técnicas numéricas que permiten resolver la ecuación sin el uso de una malla. Para aplicar FPM se siguen los siguientes tres pasos: En primer lugar, la discretización del dominio y la identificación de los puntos vecinos se realizan teniendo en cuenta la reducción del costo computacional y la menor pérdida de precisión posible. En segundo lugar, la aproximación de la función de onda y sus derivadas espaciales en cada punto se realiza por el método de mínimos cuadrados móviles (MLS). Para la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo se llega a un problema de valores propios cuya solución es la aproximación del espectro discreto de las autoenergías y las autofunciones. Y en tercer lugar, para la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, el problema con valor inicial se soluciona usando el método de Euler implícito, lo que permite obtener un sistema iterativo que aproxima la solución en cada instante de tiempo.

El método se prueba para solucionar el pozo de potencial infinito, y se comparan los resultados con las soluciones analíticas mostrando gran precisión y estabilidad. El método es de primer orden de aproximación como consecuencia de la aproximación de la segunda derivada de la función por el método MLS. La extensión del método a sistemas de més dimensiones es inmediata teniendo en cuenta la expansión en series de Taylor en dos o tres dimensiones. Además, como ventaja al no usar una malla, el método presentado puede ser aplicado para potenciales móviles.

10. **Teoría de Morse-Bott y aplicaciones momento generalizadas**

Estudiante **Yelvis Joel Soler Rios***

Director *Nicolas Martinez Alba***

Emails *yjsolerr@unal.edu.co, **nmartineza@unal.edu.co

Resumen. En este trabajo se estudia la teoría de *Morse-Bott* en el caso particular de las aplicaciones momento generalizadas en geometría poli-simpléctica. Las aplicaciones momento generalizadas para estructuras poli-simplécticas son funciones con valores en un espacio vectorial de dimensión mayor que 1, por ese motivo la teoría clásica de Morse-Bott no se puede aplicar de forma directa.

Para lograr el objetivo principal, se necesita construir una nueva definición de funciones Morse-Bott con valores en $\mathbb{R}_m$, lo cual a su vez requiere entender otro tipo de conceptos asociados como aplicación Hessiana no degenerada $\mathbb{R}_m$-valuada y subvariedades críticas. Considerando estas nuevas definiciones, que son aportes novedosos en este trabajo, se lograron obtener nuevos resultados consistentes con la teoría usual. Finalmente, los nuevos aportes en este documento se pudieron implementar en el caso especial de aplicaciones momento tóricas para variedades hyperkähler.

Palabras clave: Teoría de Morse, Teoría de Morse-Bott, Aplicaciones momento, Acciones hamiltonianas, variedades hyperKähler.