

Reseñas de trabajos de grado de pregrado del Programa de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia – Sede Bogotá presentados en el período 2019-II

Carolina Neira Jiménez^a

1. Un cambio a la fórmula del precio de la opción desarrollada por el Modelo de Difusión de Salto con volatilidad aleatoria

Estudiante **Guillermo León Beltrán Quiceno***

Director *Viswanathan Arunachalam***

Emails *glbeltranq@unal.edu.co, **varunachalam@unal.edu.co

RESUMEN. Existe evidencia empírica que muestra que los derivados financieros de renta variable, ya sean acciones, índices, monedas o tasas de interés, no siguen los modelos de caminata aleatoria log-normal, que han sido la base de la teoría de la valoración de opciones. Estudiaremos el problema matemático concerniente a la valoración de opciones (call europeas) basado en el modelo Black-Scholes el cual se implementa bajo el supuesto de la volatilidad del rendimiento constante y un modelo de difusión con salto y volatilidad estocástica para capturar la dinámica de los retornos de activos con riesgo en periodos de crisis, los cuales están caracterizados por un efecto de contagio.

La dinámica de los saltos se representa mediante un proceso Hawkes el cual es un caso particular de un proceso puntual que es caracterizado por la propiedad de self-exciting.

2. Grupos topológicos de Krull

Estudiante **Oscar Alejandro Chaparro Gutiérrez***

Director *Lorenzo María Acosta Gempeler***

Emails *oachaparro@unal.edu.co, **lmacostag@unal.edu.co

RESUMEN. Dada una extensión de Galois finita E de un cuerpo F , el Teorema Fundamental de la Teoría de Galois establece una correspondencia

¹Coordinadora del Programa Curricular de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

^acneiraj@unal.edu.co

biyectiva entre las extensiones intermedias entre E y F y los subgrupos del grupo de Galois $G(E/F)$. Esta correspondencia es, en realidad, el isomorfismo de adjunción asociado a un par de funciones entre dos conjuntos ordenados. Para el caso en que la extensión es infinita esta correspondencia ya no es biyectiva. Introduciendo una topología adecuada sobre el grupo de Galois $G(E/F)$ puede generalizarse el resultado anterior, estableciendo una correspondencia entre el conjunto de todas las extensiones intermedias y el conjunto de los subgrupos cerrados del grupo de Galois $G(E/F)$. La topología mencionada fue introducida por Wolfgang Krull hacia 1928 y se conoce como la topología de Krull.

En este trabajo realizamos el estudio de la generalización del Teorema Fundamental de la Teoría de Galois y hacemos un estudio del grupo topológico $G(E/F)$ dotado de la topología de Krull.

3. Geometría de 4 variables y aplicaciones a modelos atómicos

Estudiante **Carolina Colmenares Celis***

Director *John Alexander Cruz Morales***

Emails *ccolmenaresc@unal.edu.co, **jacruzmo@unal.edu.co

RESUMEN. La idea principal es poder describir la superficie algebraica $M = M(E)$ que se le puede asociar al Helio-4. Para ello, fue necesario entender y trabajar los siguientes puntos:

- a) E es un toro complejo 1-dimensional.
- b) Su grupo fundamental es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- c) Su cubrimiento universal es \mathbb{C} .
- d) Su módulo es, respecto a la acción de $SL_2(\mathbb{Z})$, un punto en el plano superior complejo.
- e) El subgrupo de torsión, el grupo simétrico S_3 , tienen un punto fijo de orden 2 y dos puntos fijos de orden 3.

Hay dos propiedades adicionales que es importante tener presentes, ya que son parte de las características físicas necesarias que debe tener el modelo. Una de ellas es que existen cuatro estructuras de espín sobre E correspondientes a los cuatro puntos de período 2 sobre el jacobiano $J(E)$, 0 y otras tres. La otra es que en el nivel de espín, el grupo $SL_2(\mathbb{Z})$ es reemplazado por su cubrimiento doble y su subgrupo de torsión se convierte en la parte par del grupo octaédrico binario, y tiene orden 24.

De la teoría de superficies de Riemann obtenemos que $\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{C}/\Lambda$, donde Λ es un retículo. Consideremos el toro \mathbb{T}^2 . La idea es que dado $z \in \mathbb{T}^2$ podamos encontrar una carta que cubra a z . La forma de relacionar el toro y el plano \mathbb{C} es cortando el toro de forma vertical a él, de donde obtenemos un cilindro, luego si realizamos un corte vertical en el cilindro obtenemos una región bidimensional. De esta forma podemos partir el plano \mathbb{C}

en copias trasladadas del paralelogramo anterior. Para esto, fijamos dos números $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, linealmente independientes sobre \mathbb{R} . Defina

$$\Lambda := \mathbb{Z}z_1 + \mathbb{Z}z_2 = \{nz_1 + mz_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}$$

A Λ se le conoce como el retículo generado por z_1 y z_2 . Veamos que $\Lambda \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Consideremos el siguiente isomorfismo, $\alpha : \Lambda \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ donde $\alpha(nz_1 + mz_2) = (n, m)$. Luego, $\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{C}/\Lambda \simeq \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$.

Esto nos permite considerar la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}/\Lambda \\ z &\mapsto [z] \end{aligned}$$

y así otorgarle a \mathbb{C}/Λ la topología cociente determinada por π . Luego, para $w \in \mathbb{T}^2$ fijamos $z \in \mathbb{C}$ con $\pi(z) = w$ y escogemos un disco D centrado en z , de donde $\pi(D)$ es una vecindad abierta de w y da la carta $(\pi(D), (\pi|_D)^{-1})$. Estas cartas son compatibles y por tanto otorgan estructura de superficie de Riemann al toro \mathbb{T}^2 . Finalmente, sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ el círculo unitario. Si definimos

$$\gamma : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow S^1 \times S^1$$

donde se asocia a un punto de \mathbb{C}/Λ representado por $\lambda w_1 + \mu w_2$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, el punto $(e^{2\pi i \lambda}, e^{2\pi i \mu}) \in S^1 \times S^1$, obtenemos un homeomorfismo de \mathbb{C}/Λ sobre $S^1 \times S^1$.

Por otro lado, sea $\Lambda^* = \Lambda - \{(0, 0)\}$, luego la función \wp de Weierstrass está dada por la serie

$$\begin{aligned} \wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Lambda^*} \left[\frac{1}{(z+w)^2} - \frac{1}{w^2} \right] \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{(n,m) \neq (0,0)} \left[\frac{1}{(z+n+m\tau)^2} - \frac{1}{(n+m\tau)^2} \right] \end{aligned}$$

Observe que la derivada de \wp esta dada por

$$\wp'(z) = -2 \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n+m\tau)^3}$$

Ahora, definamos el siguiente conjunto

$$E(\mathbb{C}) = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 : y^2z + a_1xyz + a_3yz^2 = x^3 + a_2x^2z + a_4xz^2 + a_6z^3\}$$

luego, al deshomogenizar $y^2z + a_1xyz + a_3yz^2 = x^3 + a_2x^2z + a_4xz^2 + a_6z^3$ obtenemos que $y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$. Si además hacemos las siguientes sustituciones:

$$X = x + \frac{a_1^2 + 4a_2}{12} \quad y \quad Y = y + \frac{a_1x + a_3}{2}$$

Resulta la curva $Y^2 = X^3 + AX + B$ donde $4A^3 - 27B^2 \neq 0$. Por lo tanto, podemos decir que una curva elíptica es un conjunto

$$E(\mathbb{C}) = \{[X : Y : 1] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 : Y^2 = X^3 + AX + B\} \cup \{P\}$$

donde $P = [0 : 1 : 0]$ es un punto en el infinito.

De lo anterior obtenemos que dada la función sobreyectiva $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$, si consideramos la función $\varphi : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow E(\mathbb{C})$ dada por

$$w = \pi(z) := \begin{cases} [\wp(z) : \wp'(z) : 1] & \text{si } z \notin \Lambda \\ [0 : 1 : 0] & \text{si } z \in \Lambda \end{cases}$$

Entonces, φ es holomorfa y biyectiva, para $E(\mathbb{C})$ siendo definida por $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$.

Recordemos que el conjunto de las clases de equivalencia de homotopías de caminos basados en x_0 , es decir, las clases de los lazos basados en x_0 , se llama grupo fundamental de X , y se denota por $\Pi_1(X, x_0)$.

Observación:

- a) $\Pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, como $\Pi_1(S^1)$ es un grupo cíclico y además es infinito, y por la teoría de grupos sabemos que su única opción es ser isomorfo a \mathbb{Z} .
- b) Sean X y Y espacios topológicos, y denote $X \times Y$ como el producto de estos espacios. Entonces, $\Pi_1(X \times Y, (x, y))$ es isomorfo a $\Pi_1(X, x) \times \Pi_1(Y, y)$.

Ejemplo: Teniendo en cuenta la observación previa, obtenemos que

$$\Pi_1(S^1 \times S^1, (x, y)) \cong \Pi_1(S^1, x) \times \Pi_1(S^1, y) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Las 4-variedades que se consideraron para modelar átomos neutrales son compactas, y se restringieron las variedades a superficies algebraicas, cuyos números de Chern se relacionan con los números del protón y el neutrón.

Note que la importancia de la compacidad en los modelos a considerar reside en que si las partículas están eléctricamente cargadas, no se puede modelar con variedades no compactas, debido a que no se pueden asociar invariantes topológicos adecuados a las variedades para que conserven las características físicas y químicas del isótopo.

Ahora, dado un fibrado vectorial complejo $E \rightarrow X$ de rango ℓ , escoja una conexión ∇ sobre E , con su forma de curvatura F^∇ . La clase total de Chern es de la forma

$$\det \left(I + \frac{i}{2\pi} F^\nabla \right) = 1 + c_1 + c_2 + \dots$$

donde

$$c_k = c_k(E, \nabla) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k \sigma_k(F^\nabla)$$

y se le llama la **k-ésima forma de Chern** (que resulta ser un representante de cada clase de Chern). Luego, existe una clase de cohomología de De Rham bien definida:

$$c_k(E) = [c_k(E, \nabla) \in H^{2k}(X)]$$

que depende únicamente de E , llamada la **k-ésima clase de Chern** de E .

Para cada fibrado vectorial complejo $\pi : E \rightarrow X$ sobre una variedad X y para cada entero $k \geq 0$, la k -ésima clase de Chern $c_k(E) \in H^k(X, \mathbb{R})$ está definida, y $c_0(E) = 1$. Fije un fibrado vectorial complejo de rango k , $E \rightarrow X$ sobre una variedad compacta orientable X . Para cada colección de enteros ℓ_1, ℓ_2, \dots , existe un **número de Chern** entero:

$$c_1(E)^{\ell_1} c_2(E)^{\ell_2} \dots c_k(E)^{\ell_k} [X] \in \mathbb{Z}$$

que se obtiene al evaluar sobre la clase fundamental de homología $[X]$ de X . Para una 4-variedad compacta orientable X , existen dos números de Chern asociados a cada fibrado complejo $E \rightarrow X$, y cada uno es una integral de curvatura:

$$c_1(E)^2[X] = \frac{-1}{4\pi^2} \int_X \text{tr}(F) \wedge \text{tr}(F) \text{ y } (c_2(E) - 2c_1(E)^2)[X] = \frac{-1}{8\pi^2} \int_X \text{tr}(F \wedge F)$$

donde para cada conexión ∇ sobre E , $F = F^\nabla$ es la curvatura.

Note que de lo anterior se concluye que las 4-variedades complejas están principalmente clasificadas por dos invariantes topológicos, denotados c_1^2 y c_2 . Para una superficie X , c_1 y c_2 son las clases de Chern del fibrado tangente complejo. Existen otros invariantes topológicos de una superficie X , pero muchos de ellos están relacionados con c_1^2 y c_2 ; entre los más importantes están los números de Hodge.

En dos dimensiones complejas los números de Hodge se denotan como $h^{i,j}$ con $0 \leq i, j \leq 2$, a este arreglo de números se le conoce como el diamante de Hodge (vea Fig. 1). En particular, para una superficie conexa $h^{0,0} = h^{2,2} = 1$.

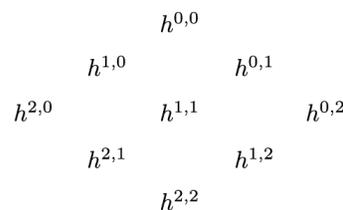


Figura 1: El diamante de Hodge para una superficie compleja general.

Los números de Hodge $h^{p,q}(X)$ de una variedad están dados por los rangos de los respectivos grupos de cohomología de Dolbeault, de otra forma

$$h^{p,q} := \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} H^q(X, \Omega_X^p)$$

donde Ω_X^q es el haz de q -formas holomorfas sobre X y $H^q(X, \Omega_X^q)$ es el correspondiente haz de cohomología abeliano.

Los números de Hodge $h^{p,q}(X)$ son invariantes importantes de una variedad proyectiva compleja suave; no cambian cuando la estructura compleja de X varía continuamente y, sin embargo, en general no son invariantes topológicos. Una de las propiedades importantes de los números de Hodge es la simetría de Hodge: $h^{p,q} = h^{q,p}$.

Es de particular interés el *número de Euler*² χ , ya que es un invariante topológico, y un número que describe la forma o estructura de un espacio topológico independientemente de la forma en que se dobla. Puede verse además como una suma alternada de las entradas en la diagonal superior derecha del diamante de Hodge, y la cantidad análoga para la diagonal del medio, se denota θ , de forma más precisa:

$$\chi = h^{0,0} - h^{0,1} + h^{0,2}, \quad \theta = -h^{1,0} + h^{1,1} - h^{1,2}$$

De hecho, la característica de Euler es el invariante topológico más antiguo. La relevancia de la característica de Euler para la clasificación de superficies *orientables*³ conexas cerradas es: dos superficies de este tipo son homeomorfas si y solo si las características de Euler concuerdan.

Teorema (Clasificación de homeomorfismos de 4-variedades cerradas suaves 1-conexas (Donaldson-Freedman))

Dos 4-variedades cerradas orientables suaves simplemente conexas M y N son homeomorfas si y solo si

- a) Ambas son o pares o impares,
- b) La característica de Euler es igual para ambas,
- c) Sus signaturas son compatibles.

El resultado anterior es de alguna forma una de las motivaciones por las cuales Atiyah y Manton consideraron buscar una relación para los valores del protón P y el neutrón N en términos de e y τ . En vista de que el número de Euler e y la signatura τ ayudan a clasificar cierto tipo de 4-variedades, esto resultará útil cuando se esté buscando un modelo para el Helio-4. Además, es posible expresar ambos valores en términos de χ y θ como sigue:

$$e = 2\chi + \theta, \quad \tau = 2\chi - \theta$$

²Para las variedades cerradas, la característica de Euler coincide con el número de Euler, es decir, la clase de Euler de su fibrado tangente evaluado en la clase fundamental de la variedad.

³Una variedad es orientable si tiene una elección consistente de orientación.

Por otro lado, es posible relacionar los números de Chern con χ y θ de la siguiente manera:

$$c_1^2 = 2e + 3\tau = 10\chi - \theta, \quad c_2 = e = 2\chi + \theta.$$

La idea es modelar átomos neutrales a través de superficies algebraicas e interpretar χ como el número del protón P y θ como el número de baryon, B . Luego el número del neutrón sería $N = \theta - \chi$. Esta propuesta encaja con $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ haciendo $P = 1$ y $N = 0$. En términos de e y τ ,

$$P = \frac{1}{4}(e + \tau), \quad B = \frac{1}{2}(e - \tau), \quad N = \frac{1}{4}(e - 3\tau)$$

También se puede verificar que en términos de P y N , tenemos lo siguiente:

$$c_1^2 = 9P - N, \quad c_2 = 3P + N, \quad \tau = P - N$$

Uno de los resultados más importantes sobre la geometría de las superficies algebraicas son ciertas desigualdades que los números de Chern de superficies minimales de tipo general tienen que satisfacer. Las desigualdades básicas son que c_1^2 y c_2 son positivos. También esté la desigualdad de Bogomolov-Moyaoka-Yau (BMY) que requiere $c_1^2 \leq 3c_2$, y finalmente está la desigualdad de Noether $5c_1^2 - c_2 + 36 \geq 0$. Dichas desigualdades se pueden transformar en términos de P y N :

$$P > 0, \quad 0 \leq N < 9P, \quad N \leq 7P + 6$$

Todos los valores enteros de P y N que satisfacen las desigualdades están permitidos. Existen superficies elípticas donde $c_1^2 = 0$ y c_2 es no negativo, este tipo de superficies también se incluyen dentro de los posibles modelos.

La utilidad de las 4-variedades reside en que ofrecen estabilidad a modelos clásicos para la materia. Además, las secciones de fibrados adecuados sobre 4-variedades pueden modelar estados cuánticos, capturando energías y espines. Lo que finalmente se obtiene es un modelo geométrico particular para el Helio-4, el modelo $M(E)$ es una superficie compleja construida a partir de una curva elíptica E con la simetría de un cuadrado $y^2 + x^4 - 1 = 0$. Por otro lado $M(E)$ tiene un cubrimiento universal $M^*(E) = \mathbb{C}$. Además, los invariantes topológicos asociados al número del protón P y al número de neutrón N , son $P' = \frac{1}{4}(e + \tau)$ y $N' = \frac{1}{4}(e - 3\tau)$, respectivamente. Tomando $e = 8$ y $\tau = 0$, obtenemos $P' = 2$ y $N' = 2$, lo cual concuerda con los números del protón y neutrón del Helio-4. Por otro lado, la variedad $M(E)$ tiene una simetría cúbica y otras características del átomo físico, haciéndolo un modelo bastante útil para estudiar este elemento.

Referencias

- [1] MM.F. Atiyah, N.S. Manton, *Complex Geometry of Nuclei and Atoms*. (2016) arXiv:1609.02816 (en línea) <https://arxiv.org/pdf/1609.02816.pdf>
- [2] MM.F. Atiyah, *Geometric Models of Helium*. (2017) arXiv:1703.02532 (en línea) <https://arxiv.org/pdf/1703.02532.pdf>

4. Beyond Turing Computing

Estudiante **Ciro Iván García López***

Director *Rodrigo de Castro Korgi***

Emails *cigarcial@unal.edu.co, **rdecastrok@unal.edu.co

RESUMEN. La noción de función computable surge con el mismo ser humano. Desde sus orígenes, el ser humano ha tenido que enfrentar algoritmos o rutinas. De hecho, los algoritmos han jugado un papel importante en el desarrollo de las civilizaciones y sociedades, es común y sencillo encontrar ejemplos de operaciones o dispositivos de cómputo tales como el ábaco. Sin embargo, para el estudio de estas rutinas y dispositivos se hace necesario precisar el significado de ser computable, así como qué es computable y qué no lo es.

El estudio formal de la computación tiene su origen en la conferencia dada por Hilbert en 1900, en donde se pide a la comunidad dar una definición de algoritmo [Rob15]. En esta búsqueda, surgen de manera independiente tres teorías:

- Turing y las máquinas de Turing.
- Gödel y las funciones parciales recursivas.
- Church y el cálculo Lambda.

Es usual referirse a estos tres modelos como los *modelos clásicos de computación*, cada uno cuenta con una particular riqueza y a su vez con desventajas. Por ejemplo considere una función aritmética, usando funciones parciales recursivas puede resultar sencillo mostrar que es computable. No obstante, la manipulación de cadenas de símbolos mediante funciones parciales recursivas puede resultar difícil y con detalles muy oscuros. Estas diferencias nos pueden llevar a pensar que los modelos clásicos son diferentes, pero no es el caso.

Posteriormente, se ha establecido que los modelos clásicos son equivalentes [Kle36]. Este hecho es aceptado por muchos autores sin prueba alguna y en otros casos la prueba es muy técnica, haciéndose imposible de leer. El objetivo del presente trabajo es llenar este vacío, presentando una prueba con un estilo actual y sencillo, sin olvidar los detalles matemáticos.

Por otro lado, los modelos clásicos han mostrado gran capacidad para computar funciones y procedimientos interesantes. Sin embargo, no resulta difícil exhibir un procedimiento cotidiano que no se puede calcular

usando los modelos clásicos [EGW04]. Esta limitación hace necesario discutir y poner sobre la mesa nuevas ideas que nos permitan superar esta barrera e ir más allá del cómputo tradicional. Es por ello que se incluye una discusión sobre modelos súper Turing [Syr10, LN15], su origen y motivaciones particulares.

Referencias

- [EGW04] Eugene Eberbach, Dina Goldin, and Peter Wegner. *Turing's Ideas and Models of Computation*, pages 159-194. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [Kle36] S. C. Kleene. λ -definability and recursiveness. *Duke Math. J.*, 2(2): 340-353, 06 1936.
- [LN15] J. Longley and D. Normann. *Higher-Order Computability*. Theory and Applications of Computability. Springer Berlin Heidelberg, 2015.
- [Rob15] B. Robjç. *The Foundations of Computability Theory*. Springer Berlin Heidelberg, 2015.
- [Syr10] Apostolos Syropoulos. *Hypercomputation: Computing Beyond the Church-Turing Barrier*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2010.

5. Compactificaciones equivariantes de G -espacios fibrados

Estudiante **Brahyam Ricardo Maldonado Ibagué***

Directora *Clara Marina Neira Uribe***

Emails *brmaldonadoi@unal.edu.co, **cmneirau@unal.edu.co

RESUMEN. Considere un espacio fibrado (X, p) sobre un espacio base B , se dice que este es un espacio compacto si la función p es propia, es decir, es una función continua, cerrada y $p^{-1}(b)$ es compacto para cada $b \in B$. Por lo tanto, en caso de que el espacio no sea compacto, podemos considerar su compactificación, la cual resulta ser una tripla (Z, φ, q) , donde q es propia y $\varphi : X \rightarrow Z$ es un homeomorfismo entre X y $\varphi(X)$, este último resulta ser un espacio abierto y denso en Z .

Se pueden construir estas compactificaciones a partir de las C^* -subálgebras A de $C_0(X, p)$, definiendo Z como el espectro Gelfand de estas subálgebras, las cuales deben contener a $C_0(X)$ como un ideal esencial.

Si X es un espacio localmente compacto y G es un grupo topológico que además de actuar sobre el espacio X a izquierda lo hace sobre $C_b(X)$, se dice que es un G -espacio. En este caso, se consideran los grupoides, los cuales se pueden ver como un espacio fibrado con una función específica r sobre su conjunto de unidades, denotado como \mathcal{G}^0 . En este caso, si (X, p) también es un espacio fibrado sobre \mathcal{G}^0 y el grupoide actúa a

izquierda sobre él, este es un G -espacio fibrado, en el cual se define un producto fibrado entre G y X en el que se define una función continua de multiplicación.

En particular, se busca estudiar las compactificaciones fibradas de (X, p) a las que se puede extender la acción del grupoide étale de una manera única, previamente definiendo una operación denominada convolución, la cual toma elementos de $C_c(G)$ y de $C_b(X)$, el resultado será que se tiene nuevamente una relación con las C^* -subálgebras de $C_0(X, p)$ las cuales sean invariantes bajo la convolución por elementos de $C_c(G)$.

6. Funciones zeta de Dedekind, una prueba de la Fórmula del Número de Clases y aplicaciones

Estudiante **José Luis Mora Potes***

Director *Guillermo Arturo Mantilla Soler***, Codirector *John Jaime Rodríguez Vega****

Emails *jlmrap@unal.edu.co, **gmantelia@gmail.com,
***jjrodriguezv@unal.edu.co

RESUMEN. El objetivo de este trabajo es hacer una recopilación de todos los conceptos y resultados necesarios para comprender lo que se conoce como las funciones zeta de Dedekind. Para poder definir estas funciones es necesario primero definir qué es un cuerpo de números. Un cuerpo K es llamado un cuerpo de números si es una extensión algebraica de dimensión finita del cuerpo de los racionales \mathbb{Q} . El conjunto O_K de enteros algebraicos que pertenecen a K (llamado el anillo de enteros de K) tiene la propiedad de que sus ideales se factorizan de manera única como producto de ideales primos. Además, como para todo ideal $I \in K$ el tamaño de O_K/I es finito, entonces es posible definir una norma N_K para los ideales en K donde $N_K(I) = |O_K/I|$. Usando esta norma es posible construir la función $\zeta_K(s)$ (llamada función zeta de Dedekind) sobre el semiplano $\sigma > 1$ para $s = \sigma + it$ y definida por

$$\zeta_K(s) = \sum_{0 \neq I \subseteq O_K} \frac{1}{N_K(I)^s}.$$

Más aún, como la norma resulta ser completamente multiplicativa entonces se tiene que

$$\zeta_K(s) = \prod_P (1 - N_K(P)^s)^{-1},$$

en el semiplano $\sigma > 1$. Cuando $K = \mathbb{Q}$ esta función coincide con la función zeta de Riemann ζ y por lo tanto es una generalización de esta. Además, ζ_K puede ser extendida a una función en todo el plano complejo meromorfa con un único polo simple en $s = 1$. Lo importante de este polo es que su residuo guarda información relevante del propio cuerpo de números K . En este trabajo se profundizará esta idea a través de un

conocido teorema llamado La Fórmula del Número de Clases el cual logra hacer explícita la relación entre algunos invariantes de K y el residuo de $\zeta_K(s)$ en $s = 1$.

En el primer capítulo presentaremos los preliminares pertinentes para definir qué es un cuerpo de números, enfocados más en resultados de la teoría de cuerpos (se supondrá conocimiento de nociones básicas de anillos y álgebra). En el segundo capítulo se introducirán propiedades e invariantes de los cuerpos de números que tendrán relevancias en el resto del trabajo. El tercer capítulo está dedicado a la definición de la función zeta de Dedekind de un cuerpo de números K , propiedades de esta función y finalizaremos mostrando una demostración del teorema mencionado anteriormente. Por último, en el cuarto capítulo se presentarán aplicaciones de el teorema, explorando los alcances de este y de la función zeta de Dedekind.

7. Un acercamiento combinatorio a las composiciones matriciales

Estudiante **Andrés Ricardo Moreno Garzón***

Director *José Luis Ramírez Ramírez***

Emails *armorenog@unal.edu.co, **jlr Ramirezr@unal.edu.co

RESUMEN. En el presente trabajo se estudian los conceptos básicos de la teoría de composiciones de números enteros y la extensión al caso 2-dimensional. Se presentan los principales resultados referentes al número de composiciones y 2-composiciones de un entero positivo n y con m partes (columnas), algunas identidades, fórmulas recursivas y funciones generatrices. Posteriormente se estudian las definiciones y resultados básicos de los poliminós y se muestra la biyección existente entre los poliminós L -convexos y las 2-composiciones. Finalmente se muestra algunos códigos en el software Wolfram Mathematica que permiten generar los diferentes objetos abordados en esta monografía, como son las composiciones, las 2-composiciones, las 2-composiciones libres de permutaciones y permutaciones circulares y las N -composiciones matriciales.

8. Estudio de la característica de Euler como invariante topológico para la clasificación de superficies

Estudiante **Iván Andrés Orozco Macana***

Directora *Carolina Neira Jiménez***

Emails *iaorozcom@unal.edu.co, **cneiraj@unal.edu.co

RESUMEN. Este trabajo está dedicado al estudio de la característica de Euler y su relevancia en teoremas referentes a la clasificación de superficies. En el primer capítulo definimos un tipo de estructura sobre las superficies llamada complejo simplicial, la cual usamos para calcular la característica de Euler y probar que esta es un invariante topológico de

las superficies. En el segundo capítulo revisamos la demostración del Teorema de clasificación de superficies cerradas usando la característica de Euler. Finalmente estudiamos cómo se relacionan la geometría y la topología de las superficies mediante el Teorema de Gauss-Bonnet, en el cual está involucrada la característica de Euler, y cómo se puede dar otra clasificación de superficies, esta vez restringiéndonos a las superficies orientables, en términos de estructuras geométricas que se pueden definir sobre ellas.

9. Problema de Riemann para un sistema de leyes de conservación hiperbólicas

Estudiante **Erika Paola Ortiz Bernal***

Director *Leonardo Rendón Arbeláez***

Emails *eportizb@unal.edu.co, **lrendona@unal.edu.co

RESUMEN. En este trabajo desarrollaremos elementos teóricos necesarios para avanzar en el entendimiento de las leyes de conservación. Para esto, empezaremos estudiando el problema de Riemann para una ley de conservación escalar, después analizaremos el problema de Riemann para un p -sistema y finalizaremos mostrando el teorema de existencia y unicidad de la solución al problema de Riemann para una ley de conservación hiperbólica.

10. Some remarks about the geometry of toric varieties

Estudiante **Alejandro Rodríguez Matta***

Director *Milton Armando Reyes Villamil***

Emails *alrodriguezma@unal.edu.co, **mareyesv@unal.edu.co

RESUMEN. En geometría algebraica existe una clase importante de objetos conocidos como variedades tóricas. Su relevancia surge principalmente del hecho de que pueden ser construidas a partir de ciertos objetos combinatorios, lo cual constituye un puente entre la geometría convexa y la geometría algebraica. En este trabajo se presentan varias de las formas en que se pueden construir variedades tóricas haciendo énfasis en las correspondencias que constituyen el diccionario de álgebra-geometría-combinatoria. En el lado algebraico, el cálculo clásico de sicigias mediante resoluciones libres se puede particularizar al caso de ideales tóricos, lo cual da resultados muy interesantes sobre la propiedad N_p y brinda un método para calcular números de Betti a partir de información combinatoria. Finalmente, son presentados algunos problemas abiertos y desarrollos recientes relacionados con las variedades tóricas, principalmente sobre de la regularidad de ideales tóricos.

Bibliografía

- [CLS11] D. A. Cox, J. B. Little, H.K. Schenck, *Toric Varieties*, Grad. Stud. Math. **124**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.
- [MS05] E. Miller and B. Sturmfels, *Combinatorial Commutative Algebra*, Graduate Texts in Math. **227**, Springer, New York, 2005.
- [Pee10] I. Peeva, *Graded Syzygies*, Algebra and Applications Vol. 14. Springer, 2010.
- [Stu96] B. Sturmfels, *Gröbner Bases and Convex Polytopes*, University Lecture Series **8**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [MP17] J. McCullough and I. Peeva, *Counterexamples to the Eisenbud-Goto regularity conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **31**, no. 2, 473-496, 2017.

11. Encuentros con la sucesión de Farey (visuales)

Estudiante **Angélica María Salcedo Cortés***

Director *Gustavo Nevardo Rubiano***

Emails *amsalcedoc@unal.edu.co, **gnrubiano@unal.edu.co

RESUMEN. El propósito del trabajo es estudiar la sucesión de Farey, sus relaciones con distintos tópicos matemáticos, tales como sistemas dinámicos y fracciones continuas, viendo cuáles son sus representaciones gráficas y las características de estas.

Definición. Se define a F_n como el conjunto de fracciones irreducibles menores que 1 cuyo denominador es menor que n , es decir,

$$F_n = \left\{ \frac{p}{q} \mid mcd(p, q) = 1, \quad q < n \quad y \quad 0 \leq \frac{p}{q} \leq 1 \right\}$$

La sucesión de Farey va a ser $\{F_n\}_{n \in \mathbb{R}}$

Esta sucesión cumple la propiedad de la mediana, que dice que si $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p}{q} < \frac{p_2}{q_2}$ son elementos consecutivos en F_n y $q_1 + q_2 < n$ entonces $\frac{p}{q} = \frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2}$. Esto se cumple también en las representaciones

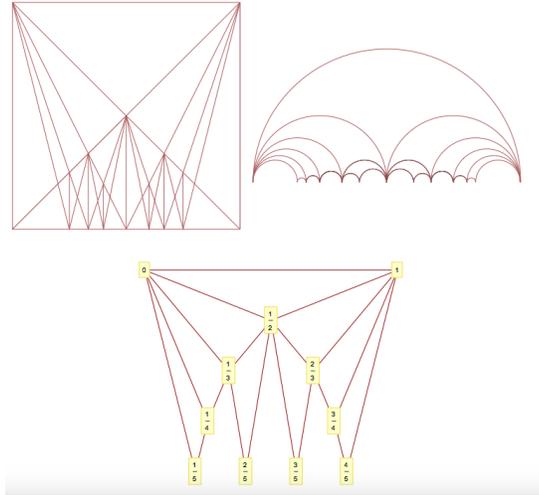


Figura 1: Representaciones de la sucesión de Farey

La más importante es el diagrama circular de Farey (Figura 2) la cual nace de encontrar todos los puntos del círculo unitario a los cuales al hacerle la proyección estereográfica su imagen son puntos $(r, 0)$ donde r es una fracción irreducible. Dos puntos del diagrama $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ estarán conectados por unas “aristas” semi-circulares si y sólo si el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ es ± 1

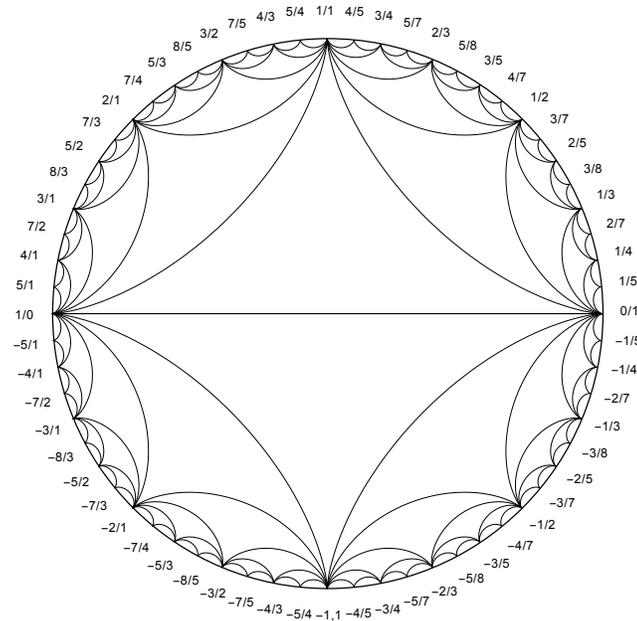


Figura 2: Diagrama circular de Farey

Una fracción continua es una expresión de la forma

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

donde a_i es entero para todo $i \in \mathbb{N}$, llamaremos a los a_i coeficientes parciales.

Se puede construir un abanico con los coeficientes parciales, donde hay tantos triángulos como coeficientes parciales y el triángulo i se divide en a_i pedazos. Siguiendo la regla de la mediana se pueden etiquetar los vértices del abanico con la sucesión de Farey, como se ve en el ejemplo de la figura 2.

Proposición 1. Los convergentes de una fracción continua $\frac{p}{q} = a_0 + 1 \nearrow a_1 + \dots + 1 \nearrow a_n$ son los vértices a través del zigzag en el diagrama de Farey que comienza en $\frac{1}{0}$ y termina en $\frac{p}{q}$. Este camino comienza en la arista que va desde $\frac{1}{0}$ hasta $\frac{a_0}{1}$, luego toma la izquierda a través del abanico de a_1 , luego a través del abanico a_2 , etc., finalmente terminando en $\frac{p}{q}$.

Proposición 2. Para cada fracción continua infinita $a_0 + 1 \nearrow a_1 + 1 \nearrow a_2 + 1 \nearrow a_3 + \dots$ los convergentes convergen a un único límite.

Proposición 3.(Langrange) Los números irracionales cuyas fracciones continuas son periódicas son exactamente los que tienen la forma $a + \sqrt{n}$ donde n es un entero positivo que no es cuadrado y a, b son números racionales $b \neq 0$.

Sea f una función de \mathbb{R}^n a \mathbb{R} que cumple que:

- $f(av) = a^2 f(v)$
- Para cada f existe una forma simétrica bilineal $B_f(w, v) = f(w + v) - f(w) - f(v)$, es decir $B_f(w, v) = B_f(v, w)$ y para α, λ escalares $B_f(\alpha w + \lambda v, u) = \alpha B_f(w, u) + \lambda B_f(v, u)$.

Diremos que:

- (e_1, e_2, e_3) es una *súper base* si (e_1, e_2) es una base del retículo y $e_1 + e_2 + e_3 = 0$.
- $\{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$ es una *súper base laxa* si (e_1, e_2, e_3) es una *súper base*.

Para una forma cuadrática $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ podemos escribir el valor de $q(x_1, y_1)$ en la región adyacente en el diagrama de Farey al vértice $\frac{x_1}{y_1}$.

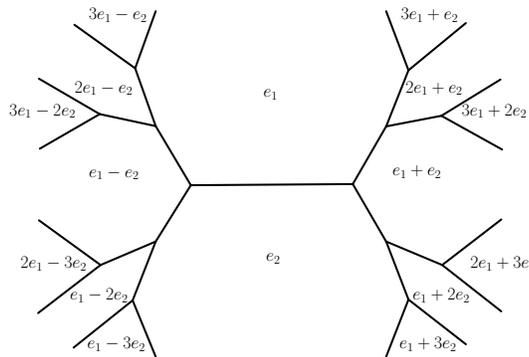


Figura 3: Grafo topográfico de cualquier *súper base laxa* $\{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$

Proposición 4. Si los valores de $Q(x, y)$ en las cuatro regiones que rodean una arista del árbol son a, b, c, d como se indica en la figura, entonces los tres valores $c, a + b, d$ forman una progresión aritmética.

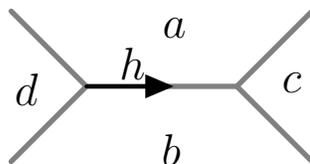


Figura 4:

Se pueden clasificar las formas cuadráticas $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ en cuatro clases dependiendo de los signos que tomen los valores $Q(x, y)$, donde x y y son enteros. Siempre se asumirá que alguno de los coeficientes a, b, c es distinto de cero para que $Q(x, y)$ no sea idénticamente cero. También asumiremos que $(x, y) \neq (0, 0)$.

- Formas *hiperbólicas*. Cuando $Q(x, y)$ toma tanto valores positivos como negativos pero no 0.
- Formas *0-hiperbólicas*: Cuando $Q(x, y)$ toma valores positivos, negativos y cero.
- Formas *elípticas*: Cuando $Q(x, y)$ toma solo valores positivos o sólo valores negativos.
- Formas *parabólicas*: Cuando $Q(x, y)$ toma el valor cero y toma o valores positivos, o negativos, pero no ambos.

Proposición 5. Si una arista del grafo topográfico de $Q(x, y)$ está etiquetada con h regiones adyacentes p y q , entonces la cantidad $h^2 - 4pq$ es igual al discriminante de $Q(x, y)$.

Usando la construcción del grafo topográfico se puede demostrar que se puede clasificar los cuatro tipos de formas cuadráticas por medio de sus discriminante $\Delta = h^2 - 4pq$, donde h es la progresión aritmética entre las regiones p y q del grafo topográfico para la forma cuadrática dada.

- Si Δ es positivo pero no un cuadrado entonces Q es hiperbólica.
- Si Δ es positivo y cuadrado entonces Q es 0-hiperbólica.
- Si Δ es negativo entonces Q es elíptica.
- Si Δ es cero entonces Q es parabólica.

Referencias

- [1] HATCHER A., (Manuscrito no publicado). *Topology of Numbers*.

- [2] CONWAY J., (1997). *The sensual (quadratic) form*. The carus mathematical monographs, Vol 26. The mathematical association of America.
- [3] STILLWELL J., (3^a. Edición)(2010). *Mathematics and its history*. Undergraduate text in mathematics. Springer.
- [4] SPALDING K., VESELOV A. P., (2018). *Growth of values of binary quadratic forms and conway rivers*.

12. Solución numérica de problemas de optimización topológica

Estudiante **Daniel Alfonso Sánchez Vega***

Director *Juan Carlos Galvis Arrieta***

Emails *daasanchezve@unal.edu.co, **jcgalsa@unal.edu.co

RESUMEN. Un problema que surge en ingeniería, es tratar de diseñar objetos o sistemas de costo mínimo que durante su vida útil deben ser capaces de resistir las demandas máximas que se puedan producir; por tanto, los problemas de diseño (óptimo) podrían plantearse de forma sistemática en términos de problemas de minimización con restricciones, y podrían resolverse mediante técnicas de programación no lineal utilizando ordenadores digitales de alta velocidad.

En este trabajo nos proponemos resolver problemas concretos de optimización de forma, donde la función objetivo a minimizar es un funcional, que depende de un estado u_h solución de una ecuación en derivadas parciales. En nuestro caso, se involucra la ecuación del calor estacionaria y se usa un método bastante conocido y extendido en la literatura llamado SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization), el cual se puede implementar de manera sencilla con FEM (Método de Elementos Finitos). Finalmente mostramos algunas soluciones obtenidas de algunos problemas, donde su implementación fue hecha en FreeFem++ y en MATLAB.

13. Métodos de Reducción en Topologías Finas

Estudiante **Alexis Orlando Sánchez Virgüez***

Director *Humberto Sarria Zapata***

Emails *aosanchezv@unal.edu.co, **hsarriaz@unal.edu.co

RESUMEN. En este trabajo se estudia la estructura combinatoria de los espacios topológicos finitos, con el fin de comprender y describir el tipo de homotopía que cada uno de ellos posee. Se describen dos métodos para reducir el tamaño de los espacios topológicos preservando sus grupos de homotopía. Por otro lado, se presenta la relación existente entre las estructuras topológicas finitas y los complejos simpliciales mediante el uso de dos tipos de funtores. Por último, se expone una versión discreta de la teoría de Morse.