

---

# DIVERSIFICACIÓN Y VALOR EN RIESGO DE UN PORTAFOLIO DE ACCIONES

---

Jaime Villamil\*

## Resumen

Villamil, Jaime. "Diversificación y valor en riesgo de un portafolio de acciones", *Cuadernos de Economía*, v. XXVI, n. 47, Bogotá, 2007, páginas 175-204.

*Desde los años cincuenta la diversificación del portafolio fue planteada por Markowitz (1952 y 1956) como un problema de programación cuadrática, a la vez que fue introducida la desviación estándar como medida de riesgo. Con el paso del tiempo se han propuesto algoritmos de solución más eficientes, así como metodologías más complejas de medición de riesgo de los portafolios. En este artículo se describe el método del conjunto activo como solución del problema de programación, se revisa el enfoque de medición de riesgos VeR (valor en riesgo) y se presenta una aplicación al mercado de valores colombiano.*

**Palabras claves:** programación convexa, selección de portafolio, VeR. **JEL:** C610, C630, G110.

---

\* Magíster en Economía Aplicada y Especialista en Estadística. Profesor de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Colombia (Bogotá). E-mail: jaime\_villamil@yahoo.com. Este artículo fue recibido el 29 de julio de 2006 y su publicación aprobada el 21 de noviembre de 2007.

**Abstract**

Villamil, Jaime. "Diversification and value in share portfolio risk," *Cuadernos de Economía*, v. XXVI, n. 47, Bogota, 2007, pages 175-204.

*Markowitz proposed portfolio diversification as being a quadratic programming problem during the 1950s (1952 and 1956), at the same time that standard deviation was introduced as the means of measuring risk. As time has passed, algorithms have been proposed as being more efficient means for resolving such problems, as well as more complex methodologies for measuring portfolio risk. This article describes the active convex method for resolving programming problem, an approach for measuring VaR (value at risk) is reviewed and a Colombian stock market application is presented.*

**Key words:** convex programming, portfolio selection. **JEL:** C610, C630, G110.

**Résumé**

Villamil, Jaime. « Diversification et valeur en risque d'un portefeuille d'actions », *Cuadernos de Economía*, v. XXVI, n. 47, Bogota, 2007, pages 175-204.

*Dès les années cinquante la diversification du portefeuille a été formulée par Markowitz (1952 et 1956) comme un problème de programmation quadratique, en même temps que la déviation standard a été introduite comme mesure de risque. Au cours du temps, des algorithmes de solution plus efficaces ont été proposés, ainsi que des méthodologies plus complexes de mesure de risque des portefeuilles. Cet article décrit la méthode de l'ensemble actif en tant que solution du problème de programmation. Il fait une révision de l'approche de mesure de risques VeR (valeur en risque) et présente une application au marché des valeurs colombien.*

**Mot clés :** programmation convexe, sélection de portefeuille, VeR. **JEL :** C610, C630, G110.

*“Nothing predictable can be truly harmful  
and nothing truly harmful can be predictable”*

*Nassim Nicholas Taleb*

En 1952, Harry Markowitz publicó un artículo pionero en el área financiera. En éste se expone, por primera vez, el concepto de media-varianza y su relación con el problema de decisión al que se enfrenta un *inversionista*. Por lo general, siempre existe una relación estrecha entre el rendimiento y el riesgo. Una *cuenta de ahorros* ofrece con seguridad una tasa de rendimiento conocida y por tanto, tiene un riesgo muy bajo, una *acción* puede generar un rendimiento superior, pero bajo un escenario incierto. Si la inversión se hace en varios activos financieros, es decir, se construye un portafolio, el rendimiento y el riesgo de éste dependen de la contribución y de la relación que existe entre cada activo que lo conforma. El problema de diversificación consiste en encontrar las participaciones de cada activo que produzcan el mayor rendimiento del portafolio con un bajo nivel de riesgo.

### **PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE DIVERSIFICACIÓN DEL PORTAFOLIO**

Dado un conjunto de  $n$  activos financieros disponibles para un inversionista en el tiempo  $T$ , se define el rendimiento del  $i$ -ésimo activo como una *variable aleatoria*  $r_i$ . El *valor esperado* del rendimiento para el período  $T + 1$  se estima con base en los rendimientos históricos, por medio de, la siguiente expresión:

$$\bar{r}_i = E(r_i) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_i(t) \quad [1]$$

Donde  $r_i(t)$  se mide por  $\ln\left(\frac{P_i(t)}{P_i(t-1)}\right)$ , siendo  $P_i(t)$  el precio del activo  $i$  en  $t$ .

El *riesgo* asociado a un activo se expresa por medio de la varianza histórica del rendimiento del activo  $\sigma_i^2$  o por la desviación estándar  $\sqrt{\sigma_i^2}$ . Se asume que para el  $i$ -ésimo activo la varianza es un buen estimador de la variabilidad del rendimiento que se espera en  $T+1$ :

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{T-1} * \sum_{t=1}^T (r_i - \bar{r}_i)^2 \quad [2]$$

Otra medida de riesgo planteada por Markowitz es la *semi-varianza* que es el promedio de las desviaciones al cuadrado que están por debajo del valor de la media. En el manejo activo de los portafolios que se hace en la actualidad, es necesario que siempre se considere un portafolio de referencia (*benchmark*), por ejemplo, una distribución inicial de activos que se mantiene hasta el vencimiento y que sirve para compararlo con el desempeño que tuvo el portafolio manejado por el *trader*. Entonces, la diferencia de rentabilidad entre el portafolio y su *benchmark* habla del desempeño del *trader* (a esta diferencia se le llama alfa); mientras que, la variabilidad de alfa corresponde a lo arriesgado del manejo del portafolio (a esta desviación estándar se le llama *tracking Error*). La razón entre el alfa y su volatilidad se denomina *Information Ratio*.

El rendimiento de dos activos  $j$  y  $k$  pueden relacionarse linealmente. Este hecho se mide por medio de la covarianza ( $\sigma_{j,k}$ ). Un buen estimador de ella está dado por:

$$\sigma_{j,k} = \frac{1}{T-1} * \sum_{i=1}^T (r_{ij} - \bar{r}_j)(r_{ik} - \bar{r}_k) \quad [3]$$

**Definición 1:** se llama *portafolio* al vector  $w = [w_1, w_2, \dots, w_n]$  de números reales no-negativos, tales que:  $\sum_{i=1}^n w_i = \mathbf{1}$ . Los elementos del vector

w son las fracciones de un monto de inversión que se destina a la compra de cada uno de los  $n$  activos financieros.

Definición 2: el *rendimiento esperado del portafolio* se nota por  $R_p$  y se define como:

$$R_p = w^T \bar{r} \quad [4]$$

Donde  $\bar{r}$  es el vector de rendimientos esperados de los  $n$  activos del portafolio.

Definición 3: la *varianza esperada del portafolio* se define por:

$$V_p = w^T \Omega w \quad [5]$$

Donde  $\Omega$  es la matriz de varianzas y covarianzas de los rendimientos de los  $n$  activos financieros:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad [6]$$

Los elementos de la diagonal principal son las varianzas de los activos –expresión 2– y los elementos por fuera de la diagonal principal son las covarianzas entre activos –expresión 3–.

Definición 4: se llama *espacio de portafolios* al conjunto  $P$ , de donde el inversionista seleccionará el portafolio más conveniente; él no desea rentabilidades negativas y la varianza del portafolio por definición es no-negativa:

$$P = \{(R_p, V_p) : R_p \in R_+ \ \& \ V_p \in R_+\} \quad [7]$$

Definición 5: se llama *conjunto eficiente de portafolios*  $P^E$  al subconjunto de portafolios  $P$ , tal que, cualquier portafolio es de máximo rendimiento entre aquellos que son de igual riesgo y son de mínimo riesgo entre los que son de igual rentabilidad.

$$P^E = \{(R_A, V_A), (R_B, V_B) \in P : (R_A > R_B \ \& \ V_A \leq V_B) \text{ ó } (R_A \geq R_B \ \& \ V_A < V_B)\} \quad [8]$$

**Definición 6:** se llama *frontera eficiente de Markowitz* al subconjunto de  $P$  que surge de resolver:

$$\begin{aligned} \min \quad & w^T \Omega w \\ \text{s.a} \quad & R_p^l = w^T \bar{r} \\ & w^T \mathbf{1}_n = \mathbf{1} \\ & -w^T \leq 0_n \end{aligned} \quad [9]$$

Donde  $l$  señala un nivel de rentabilidad deseado, para cada uno de éstos, la solución de (9) encuentra los portafolios que son de mínima varianza, dado que, no se permite participaciones negativas<sup>1</sup> y que todas ellas deben sumar la totalidad de la inversión. Esta solución es única, siempre y cuando, la matriz  $\Omega$  sea definida positiva<sup>2</sup>.

En la Gráfica 1 se ilustra la solución del problema (9). El cuadrante del plano es el *espacio de portafolios*  $P$ . El área contenida por la hipérbola es el *conjunto eficiente de portafolios*  $P^E$ . La curva en negrita que define la hipérbola arriba del punto  $P^*$  es la *frontera eficiente* de Markowitz donde se ubican los portafolios que brindan el mayor rendimiento, minimizando la varianza. Se excluye la curva por debajo del punto  $P^*$ , porque contiene portafolios que producen rentabilidades bajas con un alto riesgo, es decir, portafolios ineficientes.

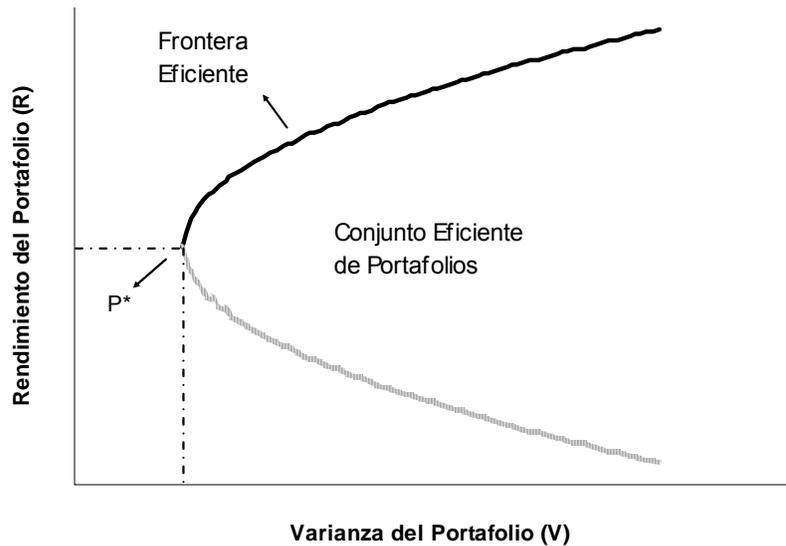
A  $P^*$  se le llama *portafolio de mínimo riesgo global* y se obtiene resolviendo (9) sólo con la segunda y tercera restricción. Identificar este punto es necesario para construir la *frontera eficiente*, porque las rentabilidades dadas en la primera condición del problema (9) deben ser superiores a las del portafolio de mínimo riesgo global.

---

<sup>1</sup> Una participación negativa  $-w_i$  equivale a tomar prestadas  $w_i$  unidades del activo  $i$ , si esas unidades se venden a su precio actual y se espera que en un período futuro el precio de este activo caiga, al ser devueltas a un menor precio se ha generado una ganancia.

<sup>2</sup> Una matriz  $A$  se dice *definida positiva* si para todo vector  $x \in R^n$  se cumple que  $x^T A x > 0$ .

GRÁFICA 1  
FRONTERA EFICIENTE DE MARKOWITZ



Fuente: elaboración propia.

Definición 7: Se llama *frontera eficiente de Sharpe-Tobin* al subconjunto de  $P$  que surge de resolver:

$$\begin{aligned} & \min w^T \Omega w \\ \text{s.a. } & R_p^l = w^T \bar{r} + (\mathbf{1} - w^T \mathbf{1}_n) * r_f \quad [10] \\ & w^T \mathbf{1}_n \leq \mathbf{1} \\ & -w^T \leq \mathbf{0}_n \end{aligned}$$

Donde  $r_f$  es el rendimiento de un activo libre de riesgo (determinístico) que se incluye en el portafolio. La frontera resultante de resolver (10) es una línea recta con pendiente positiva en el plano cartesiano  $(V_p, R_p)$  e intercepto  $r_f$ .

Definición 8: La función de *utilidad del inversionista* es una función real que representa el comportamiento de éste en los mercados financieros. Tiene por argumentos el valor esperado y la varianza del portafolio:

$$U = U[R_p, V_p] \tag{11}$$

Esta función debe satisfacer las siguientes condiciones:

- Continua y diferenciable en todos los puntos.
- $\frac{\partial U(\cdot)}{\partial R_p} > 0$ . El inversionista siempre desea las rentabilidades más altas posibles.
- $\frac{\partial U(\cdot)}{\partial V_p} < 0$ . El inversionista desea que el riesgo de sus inversiones sea mínimo.

La función de utilidad más usada es:

$$U = R_p - \left(\frac{1}{\tau}\right) * V_p \text{ con } \tau > 0 \quad [12]$$

Donde  $\tau$  es una medida de tolerancia al riesgo. Los valores grandes de  $\tau$  describen inversionistas “tolerantes al riesgo” y cercanos a cero, representan a individuos “aversos al riesgo”.

El problema de selección del portafolio consiste en uno de la *frontera eficiente* que maximice la utilidad de un inversionista particular. Éste se encuentra resolviendo el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & U[R_p, V_p] \\ \text{s.a} \quad & w^T \mathbf{1}_n = \mathbf{1} \\ & -w^T \leq 0_n \end{aligned} \quad [13]$$

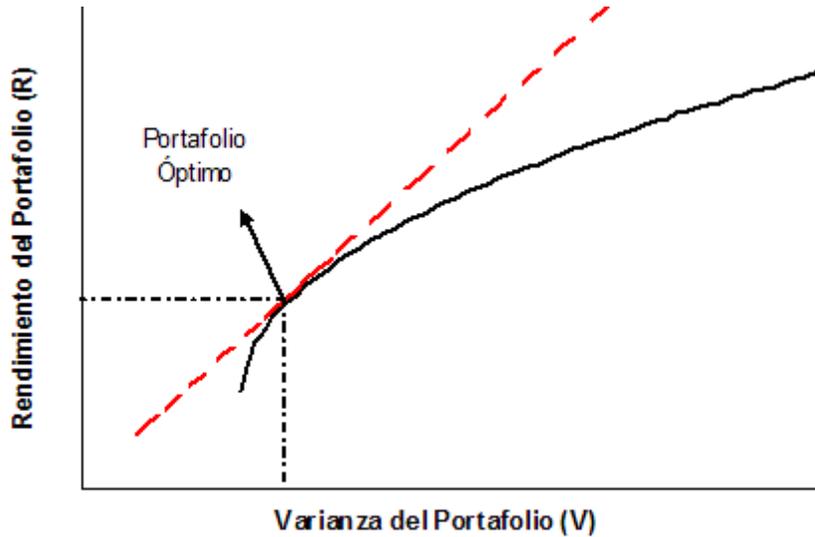
En la Gráfica 2 se ilustra, geométricamente, la solución de (13). Dado un inversionista con una preferencia por el riesgo determinada y descrito por una función de utilidad como la de la expresión (12), la línea punteada, para diversas combinaciones de retorno esperado y varianza, produce distintos niveles de satisfacción. Pero sólo uno de los portafolios de la frontera eficiente de Markowitz es alcanzable, éste se ubica en la tangencia entre la función de utilidad y la frontera eficiente, allí se minimiza el riesgo de la inversión, a la vez que se maximiza la rentabilidad esperada.

El problema (13) es equivalente a resolver (14):

$$\begin{aligned} \min \quad & -U[R_p, V_p] \\ \text{s.a} \quad & w^T \mathbf{1}_n = \mathbf{1} \end{aligned} \quad [14]$$

$$-w^T \leq 0_n$$

GRÁFICA 2  
PORTAFOLIO ÓPTIMO



En las inversiones que se desean mantener en el mediano y largo plazo es usual hacer una revisión del portafolio o rebalanceo debido a las fluctuaciones de mercado, entonces, se incurre en el pago de unos *costos de transacción*. Adcock y Meade (1995) proponen que en la función de utilidad se consideren los retornos netos después de tener en cuenta dichos costos.

Sea  $c_i$  el costo de transacción para el activo  $i$ -ésimo del portafolio, sin importar la cantidad a transar, los costos totales en el nuevo problema de selección de portafolio vienen dados por la expresión:

$$\sum_{i=1}^n c_i |w_i - w_i^0| \tag{15}$$

Donde  $w_i$  es el nuevo peso a encontrar y  $w_i^0$  es la participación que se tenía en el portafolio sin revisar.

En estas circunstancias el problema de optimización (13) se escribe como:

$$\begin{aligned} \max \quad & U[R_p, V_p] - \eta \sum_{i=1}^n c_i |w_i - w_i^0| \\ \text{s.a.} \quad & w^T \mathbf{1}_n = \mathbf{1} \\ & -w^T \leq 0_n \end{aligned} \tag{16}$$

Donde  $\eta$  es un parámetro (no negativo) que, por conveniencia, permite reescalar los costos de transacción.

La propuesta de Markowitz ha sido cuestionada por diversas razones, sus falencias principales son:

1. En portafolios grandes su solución tiende a concentrarse en un pequeño número de activos (soluciones de esquina).
2. La solución es muy sensible a cambios en la matriz de varianzas y covarianzas.
3. En su construcción, se trabaja con datos históricos, lo cual implica que se tiene la expectativa de que el comportamiento futuro del mercado, será igual a lo que fue en el pasado.

Actualmente, es muy empleada la propuesta de Black y Litterman (1992), que supera las fallas citadas anteriormente. Este enfoque fue desarrollado a inicios de los noventa en el Banco Goldman Sachs y consiste en encontrar portafolios óptimos, partiendo de unas expectativas subjetivas o *a priori* del inversionista acerca del desempeño de los activos en el futuro, incorporando, de igual forma, un grado de incertidumbre a estas creencias.

Una expectativa, por ejemplo, es que con una probabilidad de 50% se cree que en el próximo año la acción A crecerá 25 puntos básicos, por encima de lo que crecerá la acción B. Black y Litterman toman el equilibrio del mercado como un punto de referencia y las creencias subjetivas junto a su nivel de incertidumbre son combinadas con éstas, dando lugar a los retornos esperados de B-L que deben ser optimizados. Por su parte, la matriz de varianzas y covarianzas se reemplaza por una matriz en la cual se exponen las creencias subjetivas y otra donde se declara la probabilidad subjetiva de ocurrencia.

## SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE DIVERSIFICACIÓN

De forma general un problema de *programación* se presenta así:

$$\begin{aligned} & \min f(w) && [17] \\ \text{s.a } & g_1(w) \leq 0, \dots, g_m(w) \leq 0 \end{aligned}$$

Donde  $w \in C \subset R^n$ .

En lenguaje de *programación matemática*, la función a minimizar en la expresión (17) se conoce como *función objetivo* y las condiciones a las que está sujeta la optimización se les llama *restricciones*. Al punto  $w$  que satisface las restricciones del problema se llama *punto factible*. Al conjunto  $F$  de todos los puntos factibles se le llama *región factible*.

Si la región factible es no-vacía se dice que el problema (17) es *consistente*. Si existe un punto factible  $w$ , tal que, satisfaga  $g_i(w) < 0$   $\forall i = 1, \dots, m$ , se dice que el problema (17) es *superconsistente*.

El problema (17) es de *programación convexa* si la función objetivo, las restricciones y el conjunto  $C$  son *convexos*. Es fácil ver que (14) es un problema de programación convexa debido a que la restricción es un hiperplano y la función objetivo es una forma cuadrática donde la matriz  $\Omega$  es definida positiva<sup>3</sup>. Si  $\Omega$  es definida positiva la función objetivo es convexa y tiene un punto que es mínimo global. Se puede verificar que  $\Omega$  es definida positiva si sus valores propios son no-negativos, esta propiedad la satisfacen todas las matrices de varianzas y covarianzas.

### Teorema Karush-Kuhn-Tucker (KKT)<sup>4</sup>

Sea  $PC$  un *programa convexo superconsistente*, tal que, la función objetivo  $f(w)$  y las restricciones  $g_i(w)$  tienen las primeras derivadas parciales continuas en el conjunto  $C$ , si  $w^*$  es un punto factible y un punto interior de  $C$ , luego  $w^*$  es una solución de  $PC$ , si y sólo si existe un vector  $\lambda^* \in R^m$ , tal que, para  $\lambda_i^*$  (la  $i$ -ésima componente del vector  $\lambda^*$ ) se satisface las siguientes propiedades:

- (i)  $\lambda_i^* \geq 0$
- (ii)  $\lambda_i^* g_i(w^*) = 0$
- (iii)  $\nabla f(w^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(w^*) = 0$

<sup>3</sup> Cuando la matriz  $\Omega$  es definida o semidefinida no-positiva el problema de optimización es más complejo y se llama *programación cóncava* o *cuasi-cóncava*. Arrow y Enthoven (1961) muestran algunas aplicaciones de estos problemas en economía.

<sup>4</sup> Ver Peressini *et al.* (1988, 185).

El problema (14) es un caso particular de la programación convexa que se conoce como *programación cuadrática*, en general, estos problemas se expresan como:

$$\begin{aligned} \min f(w) &= \alpha + cw + \frac{1}{2}w^T Qw & [18] \\ \text{s.a } Aw &\leq b \end{aligned}$$

Donde  $\alpha \in R$ ,  $c, w \in R^n$  y  $b \in R^m$ .  $Q$  es una matriz de tamaño  $n \times n$  definida positiva y  $A$  es una matriz de tamaño  $m \times n$  con  $r(A) = m$ . Es decir, existe  $m$  restricciones linealmente independientes.

Asumiendo que dentro de las restricciones hay igualdades y desigualdades de este modo:

$$(Aw)_i = b_i \text{ para } i = 1, \dots, k \text{ \& } (Aw)_i \leq b_i \text{ para } i = k+1, \dots, m$$

Entonces, siguiendo con la aplicación de los multiplicadores de Lagrange y del teorema de KKT, para una solución  $w^*$  de (14) existen vectores  $\mu^* \in R^m$  y  $v^* \in R^k$  que permiten definir la *función Lagrangiana*:

$$L(w, \mu, v, s) = f(w) + \sum_{i=1}^k v_i g_i(w) + \sum_{i=k+1}^m \mu_i [g_i(w) + s_i^2] \quad [19]$$

Donde  $s_i^2 \geq 0$  son *variables de holgura* para  $i = k+1, \dots, m$ .  $\mu^*$  es el multiplicador de KKT para las  $m-k$  restricciones en forma de desigualdad y  $v^*$  es el multiplicador de Lagrange para las  $k$  restricciones en forma de igualdad.

La ecuación (17) debe satisfacer las *condiciones KKT* que se expresan así:

- (i)  $\mu_i^* \geq 0$  para  $i = k+1, \dots, m$  &  $v_i^* \in R$  para  $i = 1, \dots, k$
- (ii)  $\nabla f(w^*) + \sum_{i=1}^k v_i^* \nabla g_i(w^*) + \sum_{i=k+1}^m \mu_i^* \nabla g_i(w^*) = 0$
- (iii)  $g_i(w^*) = 0$  para  $i = 1, \dots, k$
- (iv)  $g_i(w^*) + s_i^2 = 0$  para  $i = k+1, \dots, m$
- (v)  $s_i^* \mu_i^* = 0$  para  $i = k+1, \dots, m$

Cualquier punto que sea candidato a mínimo local de la función objetivo en el problema (18), debe necesariamente, satisfacer las condiciones KKT.

Definición 9: se dice que una restricción en forma de desigualdad  $g_i(w^*)$  es *activa* si  $s_i^* = \mathbf{0}$  ó se dice *inactiva* si  $\mu_i^* = \mathbf{0}$ .

Definición 10: en un punto cualquiera  $w^i$  algunas de las restricciones expresadas como desigualdad satisfacen, estrictamente, la igualdad. Al conjunto de restricciones que satisfacen dicha igualdad se les llama *conjunto activo* para  $w^i$  y se nota por  $Z^i$ .

Definición 11: se dice que un punto  $w^*$  es *regular* si los gradientes de las restricciones  $g_i(w^*)$  para  $i = \mathbf{1}, \dots, k$  que son activas en  $w^*$  y los gradientes de las restricciones  $g_i(w^*)$  para  $i = k + \mathbf{1}, \dots, m$  son linealmente independientes.

De forma teórica, es posible identificar las restricciones que están activas en el punto minimizador de la función objetivo. En la práctica, esto se hace mediante un ejercicio de ensayo y error, asignando el valor cero a  $s_i^*$  ó a  $\mu_i^*$  para cada una de las  $m - k$  restricciones en forma de desigualdad. Son candidatos a minimizador de la función objetivo los puntos resultantes de cada caso que satisfacen las condiciones KKT y que son puntos regulares.

Debido a que el número de casos a examinar es  $2^{m-k}$ , cuando se tiene un número grande de variables y restricciones es, prácticamente, imposible resolver el problema (18) de forma analítica, por esta razón, se recurre a los métodos numéricos. La mayoría de algoritmos, que son implementados para resolver problemas de programación cuadrática, están basados en las condiciones que impone el teorema KKT.

Dentro de las primeras soluciones numéricas propuestas para encontrar la *frontera eficiente* se destaca el *método de la línea crítica* de Markowitz (1956), el de Wolfe (1959) y el de Sharpe (1963). Los dos primeros no buscaban minimizar  $V_p$  sino maximizar  $R_p$ , esto hacía que el problema se transformara en uno de *programación lineal*: el algoritmo de la línea crítica identifica un valor máximo de  $R_p$  y ensaya valores del portafolio que produzcan menores rentabilidades y que se ubiquen en la frontera eficiente, gradualmente, se ajustan los portafolios (verificando que cumplan las restricciones) entre uno de máximo y uno de mínimo rendimiento, hasta llegar al de mínimo riesgo global. Por su parte, Wolfe usó el método *simplex modificado* para resolver el programa lineal. Ambos métodos no brindan la solución exacta y emplean muchos cálculos cuando el número de activos es grande.

El algoritmo de Sharpe pese a que ofrece una solución exacta, también es costoso en términos computacionales. Los algoritmos de uso común en los aplicativos disponibles superan estas dificultades y están basados en las condiciones KKT, algunos de éstos son: el algoritmo de Lemke (1965) o del pivote complementario, el método de gradiente conjugado, los métodos de punto interior y el método de conjunto activo que es implementado con mayor frecuencia. A continuación sólo se ilustra el último de ellos.

### Método de conjunto activo

Este método proporciona un algoritmo iterativo que simplifica, enormemente, el número de cálculos que habría que hacer por el método analítico de KKT.

Por simplicidad en la expresión (18) se asume  $\alpha$  igual a cero. El *método del conjunto activo* inicia con un punto arbitrario  $w^0$  que se actualiza, recursivamente, de la siguiente manera:

$$w^{(k+1)} = w^{(k)} + h * d^{(k)} \quad [20]$$

Donde el  $w^{(k)}$  es el punto en la  $k$ -ésima iteración,  $h$  es un escalar que indica el tamaño del paso y  $d^{(k)}$  es un vector de dirección descendente. El punto  $w^{(k)}$  tiene asociado el conjunto activo  $Z^k$ .

El algoritmo (20) respeta los siguientes pasos:

- (i) Fija el conjunto activo para  $w^0$
- (ii) A partir del gradiente de la función objetivo se define:  $p^{(k)} = Qw^{(k)} + c$
- (iii) Resuelve el siguiente sistema para  $d^{(k)}$ :

$$\begin{bmatrix} Q & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} d^{(k)} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p^{(k)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde  $A = [a_i]$  y  $\lambda_i$  (multiplicador de Lagrange) para  $i \in Z^{(k)}$

- (iv) Si  $d^{(k)} = 0$  salta al paso vii, de lo contrario continúa con el paso v.
- (v) Si  $d^{(k)} > 0$  calcula la longitud de paso  $h$  como:

$$h = \min \left[ \mathbf{1}, \frac{b_i - \mathbf{a}_i^T \mathbf{w}^{(k)}}{\mathbf{a}_i^T \mathbf{d}^{(k)}} \right] \text{ para } i \notin Z^{(k)} \text{ y } \mathbf{a}_i^T \mathbf{d}^{(k)} > 0$$

Si  $h < \mathbf{1}$ , introduce la restricción al conjunto activo controlando la longitud de paso dentro del nuevo conjunto activo.

- (vi) Se actualiza el punto usando la expresión (20).
- (vii) Se verifica que los multiplicadores de Lagrange  $\lambda_i$  sean positivos y se finaliza el proceso. Si existen multiplicadores negativos se excluye la restricción a la que se asocia el valor más negativo del vector  $\lambda$  y se regresa al paso iii.

## ESTIMACIÓN DE LOS RENDIMIENTOS ESPERADOS, LAS VARIANZAS Y COVARIANZAS

Una propuesta sencilla, y la de mayor uso, es la de Blume (1971, 1975 y 1979) que sugiere actualizar los *betas* del *modelo del mercado* estudiado por Sharpe (1964).

La dinámica de la oferta y la demanda de una acción, en particular, está influenciada por lo que sucede, en general, con el mercado accionario. Una forma de cuantificar dicho *riesgo de mercado* es a través de la estimación de la siguiente expresión:

$$r_i = \alpha_i + \beta_i R_M + e_i \quad [21]$$

Donde  $r_i$  es el retorno del activo individual;  $R_M$  es el retorno del portafolio del mercado, por lo general se usa un *índice del mercado*; y el último término de la expresión denota el residual que se asume que se comporta según una distribución normal estándar.

El estimador de *mínimos cuadrados ordinarios* de la pendiente del modelo de regresión simple (21) es:

$$\hat{\beta}_i = \frac{Cov(r_i, R_M)}{Var(R_M)} \quad [22]$$

En el numerador se encuentra la covarianza entre los retornos del activo particular y los del índice, y en el denominador la varianza de los retornos del índice del mercado. Este valor estimado de beta es un indicador de riesgo de mercado<sup>5</sup>, si éste es superior a la unidad el

<sup>5</sup> "It measures the responsiveness of a security or portfolio's return to changes in the return on the market as a whole" Sharpe (1970, 419).

rendimiento del activo tiene mayor variabilidad (es más riesgoso) que el retorno de índice y se dice que el activo es “agresivo”, si es menor que uno ocurre lo contrario y se dice que el activo es “defensivo”. Es posible encontrar un valor de beta para un portafolio particular, ver Luenberger (1998, 181):

$$\beta_p = \sum_{i=1}^n w_i \beta_i \quad [23]$$

Cuando los supuestos que se imponen, usualmente, sobre los residuales de (21) se satisfacen, el retorno esperado de un activo, su varianza y la covarianza entre dos activos se pueden estimar respectivamente por:

$$\bar{r}_i = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i \bar{R}_M \quad [24]$$

$$\sigma_i^2 = \hat{\beta}_i^2 \sigma_M^2 + \sigma(e_i)^2 \quad [25]$$

$$\sigma_{i,j} = \hat{\beta}_i \hat{\beta}_j \sigma_M^2 \quad [26]$$

La expresión (25) permite determinar la parte de la variabilidad de un activo que es diversificable, por medio de la inversión en un portafolio. El primer término del lado derecho, explica el riesgo que depende, únicamente, de las condiciones del mercado, esta variabilidad no es posible minimizarla a través de la inversión en varios activos, entonces, se dice que existe *riesgo sistemático*. El segundo término da cuenta del riesgo no sistemático, de aquél que puede diversificarse; un activo con una buena proporción del riesgo que sea no sistemático, al ser incluido en un portafolio logra disminuir el riesgo de la inversión. Los indicadores de riesgo sistemático (RS) y no sistemático o diversificable (RD) son respectivamente:

$$RS = \frac{\hat{\beta}_i^2 \sigma_M^2}{\hat{\beta}_i^2 \sigma_M^2 + \sigma(e_i)^2} \quad [27]$$

$$RD = \frac{\sigma(e_i)^2}{\hat{\beta}_i^2 \sigma_M^2 + \sigma(e_i)^2} \quad [28]$$

Sin embargo, la regresión por mínimos cuadrados para encontrar (22) se hace entre variables (los retornos) que no tienen un comportamiento normal, sino distribuciones que concentran bastantes datos en

sus extremos (colas pesadas). Las observaciones *outliers* que pueden obtenerse de estas distribuciones son altamente *influyentes* en el ajuste de la recta (21) y hacen que el beta estimado no sea insesgado, por esta razón, Sharpe (1970) propuso el uso de la *regresión robusta*<sup>6</sup>. Este método, emplea funciones objetivo (distintas al error cuadrado medio) que reducen el efecto de las observaciones influyentes. Sharpe (1971) usó la función *desviación media absoluta* (DMA) propuesta, por primera vez, por Edgeworth; el beta a estimarse debe resolver el siguiente problema:

$$\hat{\beta}_i = \arg \min_{\beta} \sum |r_i - (\alpha_i + \beta_i R_M)| \quad [29]$$

Blume (1975) sugiere que hay una relación lineal entre los valores actuales de los betas de los activos del mercado y sus valores inmediatamente anteriores, con base en esta idea, se puede proyectar el valor de beta de cada activo individual y aproximarse a los dos primeros momentos de la distribución de los retornos de los activos individuales para el período siguiente a la ejecución de la inversión.

## APLICACIÓN AL MERCADO DE VALORES COLOMBIANO

A partir de valores diarios de 17 acciones colombianas que conforman el Índice General de la Bolsa de Valores de Colombia (IGBC), se propuso construir el día 9 de junio de 2006 un portafolio eficiente para un individuo averso y otro tolerante al riesgo. Para la estimación de los betas se tomó una muestra que inicia el 23 de marzo del 2005. Son 300 observaciones por acción con sus precios de cierre.

En el Cuadro 1 se encuentra la estimación del beta para cada una de los 17 activos. “Beta ECM” es el estimador de la pendiente de la expresión usando mínimos cuadrados ordinarios y “Beta DMA” es la estimación usando regresión robusta, tomando como función objetivo la desviación media absoluta. En el Cuadro 1 se observa que, excepto para Megabanco, no existen diferencias notables entre las dos

---

<sup>6</sup> “In his dissertation, Blume suggests that the residuals around a security’s characteristic line may follow a stable Paretian distribution with a characteristic exponent less than 2. This suggest that least-squares procedures may give poor estimates of security or portfolio volatility. As an alternative, one might fit a line that minimizes the sum of the absolute deviations” Sharpe (1970, 419).

estimaciones del beta, este es un indicio de la no existencia de puntos *outliers* influyentes.

CUADRO 1  
CÁLCULO DE LOS BETAS (9 DE JUNIO DE 2006)

Acción	Estimación y Ajuste				Riesgo	
	Alfa	Beta ECM	Beta DMA	R <sup>2</sup>	RS	RD
Paz del Río **	-0,0001	1,24	1,21	0,38	38,2%	61,8%
Éxito *	0,0011	0,77	0,71	0,40	39,6%	60,4%
Banco de Bogotá *	0,0002	0,82	0,65	0,50	49,5%	50,5%
Bancolombia *	0,0000	1,04	1,06	0,76	76,2%	23,8%
Bancolombia Preferencial *	0,0007	0,81	0,80	0,52	51,6%	48,4%
Cementos Argos *	0,0003	1,30	1,18	0,74	73,6%	26,4%
Nacional de Chocolates *	0,0001	0,90	0,83	0,55	54,8%	45,2%
Colombiana de Inversiones *	-0,0010	1,16	1,12	0,62	62,4%	37,6%
Corficolombiana *	0,0018	1,16	1,12	0,55	54,7%	45,3%
ETB Preferencial *	-0,0011	0,88	0,80	0,24	23,9%	76,1%
Grupo Aval *	0,0009	1,00	0,88	0,43	43,4%	56,6%
Interbolsa *	0,0027	0,80	0,55	0,14	13,8%	86,2%
Inversiones Argos *	-0,0003	1,25	1,17	0,74	74,2%	25,8%
ISA *	0,0008	1,10	1,02	0,69	68,8%	31,2%
Megabanco *	0,0013	0,95	0,00	0,14	13,8%	86,2%
Suramericana de Inversiones *	-0,0008	1,28	1,23	0,84	83,7%	16,3%
Fabricato *	-0,0009	1,34	1,15	0,24	24,4%	75,6%

Fuente: elaboración propia

(\*) significativo al 5%, (\*\*) significativo al 10%

El coeficiente de determinación ( $R^2$ ) ofrece una idea de qué también se ajustan los datos al modelo lineal<sup>7</sup>. En Cuadro 1, se observa que las acciones de Interbolsa y Megabanco no tienen un buen ajuste global, por esta razón se excluyen del estudio. Para todos los casos, la prueba Jarque-Bera (JB), que juzga la hipótesis nula de normalidad, tiene un valor de probabilidad asociado igual a cero, con esto se puede decir que el supuesto de normalidad del término de error en las 17 regresiones no se cumple. Con la prueba Durbin-Watson (DW) se rechaza, en todos los casos, la hipótesis de autocorrelación de los residuos.

La última columna presenta la proporción de riesgo que es diversificable. Por este criterio son descartadas las acciones Bancolombia, Cementos Argos, Colombiana de Inversiones, Inversiones Argos, ISA y Suramericana de Inversiones, las cuales no tienen la importancia suficiente para reducir el riesgo de un portafolio. Todas estas acciones

<sup>7</sup> “Although some discussions are also consistent with a non linear (but monotonic) curve” Sharpe (1964, 425). Este comentario abre un espacio para la *regresión no paramétrica* que procura explicar, de forma más general, una asociación monótona entre variables.

tienen un beta superior a la unidad, es decir, tienen una respuesta más grande que la del portafolio del mercado.

De igual forma que para el Cuadro 1, fueron calculados los betas para las mismas acciones en el día anterior (el 8 de junio de 2006) y, como lo señala Blume (1975), se ajustó una regresión lineal de esta forma:

$$\beta_{9-06-2006} = a + b * \beta_{8-06-2006} + e \tag{30}$$

Los parámetros estimados para la expresión (30) se presentan en el Anexo 1, éstos se usan para proyectar el valor de los betas al 12 de junio de 2006 así<sup>8</sup>:

$$\beta_{12-06-2006} = -0,00487 + 1,00486 * \beta_{9-06-2006} \tag{31}$$

En el Anexo 2 se presentan los betas proyectados y otra información útil para encontrar los retornos esperados y la matriz de varianzas y covarianzas pronosticada para el 12 de junio de 2006 que se presenta en el Cuadro 2.

**CUADRO 2**  
**RETORNOS ESPERADOS, VARIANZAS Y COVARIANZAS PROYECTADAS**

Retorno Esperado	n	Acción	Matrix de varianzas y covarianzas											
			1	2	3	4	5	6	7	8	9			
0,18%	1	Paz del Río	0,13%											
0,23%	2	Éxito	0,03%	0,05%										
0,14%	3	Banco de Bogotá	0,03%	0,02%	0,04%									
0,20%	4	Bancolombia Preferencial	0,03%	0,02%	0,02%	0,04%								
0,15%	5	Nacional de Chocolates	0,04%	0,02%	0,02%	0,02%	0,05%							
0,36%	6	Corficolombiana	0,05%	0,03%	0,03%	0,03%	0,03%	0,08%						
0,02%	7	ETB Preferencial	0,04%	0,02%	0,02%	0,02%	0,03%	0,03%	0,11%					
0,24%	8	Grupo Aval	0,04%	0,03%	0,03%	0,03%	0,03%	0,04%	0,03%	0,08%				
0,12%	9	Fabricato	0,05%	0,03%	0,04%	0,04%	0,04%	0,05%	0,04%	0,04%	0,24%			

Fuente: elaboración propia

El proceso de selección de portafolio tiene dos etapas. Una, en la cual se construye la frontera eficiente de Markowitz y, otra, en la que se resuelve el problema de optimización de la utilidad de un inversionista particular. En la primera etapa se consideraron 50 niveles diferentes de rentabilidad  $R_p^l$  con el portafolio de mínimo riesgo global, esto se logra dando solución al problema (9) con los valores del Cuadro 2. El

<sup>8</sup> El día 10 y 11 de junio de 2006 corresponden a un sábado y un domingo. En estos días el mercado no opera.

algoritmo empleado fue el del *conjunto activo* que se implementó en el paquete *SciLab 3.1*<sup>9</sup>.

En la segunda etapa, se suponen dos tipos de inversionistas, uno precavido que elige el portafolio de mínimo riesgo global y otro arriesgado que se describe por la función de utilidad (12) con parámetro  $\tau=2,5$ . Usando los valores del Cuadro 2, el problema de optimización (14) queda expresado por:

$$\begin{aligned} \min_w & \frac{1}{\tau} w^T \Omega w - w^T \bar{r} \\ \text{s.a} & w^T \mathbf{1} = \mathbf{1} \\ & -w^T \leq \mathbf{0}_n \end{aligned} \quad [32]$$

La función lagrangiana para (32) es:

$$L(w, \mu, \nu, s) = \frac{1}{\tau} w^T \Omega w - w^T \bar{r} + \mu^T [-w + s^2] + \nu [w^T \mathbf{1} - \mathbf{1}] \quad [33]$$

Haciendo  $\nabla L = 0$  se obtienen las condiciones KKT:

$$\begin{aligned} \partial L(\cdot) / \partial w &= \mathbf{2} / \tau * \Omega w - \bar{r} - \mu - \nu = \mathbf{0} \\ \partial L(\cdot) / \partial \mu &= -w + s^2 = \mathbf{0} \\ \partial L(\cdot) / \partial \nu &= w^T \mathbf{1} - \mathbf{1} = \mathbf{0} \\ \partial L(\cdot) / \partial s^2 &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{2} s_i \mu_i = \mathbf{0} \quad \text{para } i = \mathbf{1}, \dots, \mathbf{9} \end{aligned}$$

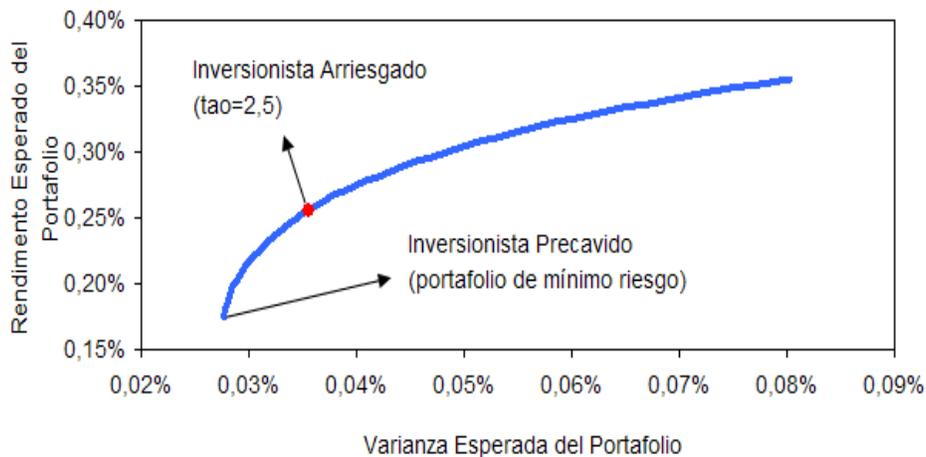
Se destaca el hecho de que existen nueve variables a encontrar, nueve restricciones en forma de desigualdad y una restricción en forma de igualdad, luego el número de casos posibles para evaluar los puntos KKT que pueden ser minimizadores es bastante grande. Por esta razón, es conveniente emplear un método numérico que simplifique la tarea. De nuevo, se usa el *método de conjunto activo* que se implementó en el paquete *SciLab 3.1*, el algoritmo se inicializa tomando como punto  $w^{(0)}$  al portafolio de mínimo riesgo global, en cuatro iteraciones el procedimiento converge a la solución  $w^*$ . En el Anexo 3 se ilustra el funcionamiento del código para cinco activos.

La solución, en las dos etapas del proceso se muestra en la Gráfica 3. El eje de las abcisas muestra los valores en los cuales se mueve la varianza de 50 portafolios diferentes con los nueve activos del Cuadro 2.

<sup>9</sup> Disponible de manera gratuita en [www.scilab.org](http://www.scilab.org)

En el eje de las ordenadas, se encuentra el rango para el rendimiento esperado de cada portafolio. La curva es la frontera eficiente de Markowitz y, sobre ella, se encuentran los portafolios óptimos de los dos inversionistas hipotéticos.

GRÁFICA 3  
FRONTERA EFICIENTE DE MARKOWITZ  
NUEVE ACCIONES DEL IGBC



Fuente: elaboración propia.

En el Cuadro 3, se muestran los ponderadores para cada inversionista. El individuo más arriesgado tiende a concentrar su inversión en unas pocas acciones, por el contrario, el individuo precavido tiende a diversificar. A medida que los inversionista son más arriesgados, mantienen menos diversificado su portafolio, por ejemplo, en la Gráfica 3 el portafolio con mayor rendimiento (y a la vez con mayor riesgo), concentra la totalidad de la inversión en acciones de Corficolombiana que es el activo con mayor rendimiento según el Cuadro 2.

Entre los dos portafolios del Cuadro 3 se observa que, aunque el portafolio del inversionista “arriesgado”, brinda un rendimiento mayor que el del “precavido”, su riesgo medido por la varianza del portafolio y su beta son mayores. Sin embargo, el beta de los dos portafolios es inferior a la unidad, lo cual significa que si el mercado pierde, estos portafolios pierden menos que el mercado, pero si el mercado gana los portafolios ganan menos que el rendimiento del mercado accionario.

CUADRO 3  
PORTAFOLIOS EFICIENTES DE DOS INVERSIONISTAS

Acción	Ponderaciones	Inversionista "Arriesgado"	Mínimo Riesgo Global
Paz del Río	w1	0%	0%
Éxito	w2	32,22%	23,10%
Banco de Bogotá	w3	1,50%	25,62%
Bancolombia Preferencial	w4	27,94%	28,63%
Nacional de Chocolates	w5	0%	16,18%
Corficolombiana	w6	28,34%	0%
ETB Preferencial	w7	0%	5,02%
Grupo Aval	w8	10,00%	1,46%
Fabricato	w9	0%	0%
<i>Rentabilidad del portafolio</i>		0,26%	0,17%
<i>Varianza del portafolio</i>		0,04%	0,03%
<i>Beta del portafolio</i>		0,9168	0,8241

Fuente: elaboración propia

### VALOR EN RIESGO DE LOS PORTAFOLIOS

Dado el comportamiento aleatorio de los precios de los activos financieros, se puede tener un valor indicativo de la pérdida máxima que cada portafolio puede tener en el período siguiente  $[T, T + 1]$ <sup>10</sup> con un nivel de confianza  $\alpha$ . En otras palabras, se puede *estimar* una pérdida potencial de un portafolio, debido a cambios en las condiciones del mercado, dicha pérdida se conoce como *valor en riesgo* (VeR)<sup>11</sup>. Si se trabaja con inversiones diarias y se desea una estimación con un nivel del 99% de confianza, se tiene la *expectativa* que de 100 escenarios futuros posibles para el día siguiente, sólo uno de ellos tenga una caída en el valor del portafolio superior al VeR. En símbolos:

$$\Pr[R_p(T + 1) \leq VeR] = 1 - \alpha \quad [34]$$

Sea  $X_0$  el valor del portafolio  $P$  en  $t$ , si se asume que  $R_p \sim N(0, \sigma_p)$  donde  $\sigma_p$  es la varianza del portafolio que se supone constante, el VeR queda expresado como:

$$VeR(t) = -z_\alpha X_0 \sigma_p \quad [35]$$

$z_\alpha$  es el percentil asociado al  $(1 - \alpha)\%$  de área por debajo de la curva de la distribución normal estándar. El signo negativo que precede al

<sup>10</sup> Lo más usual es considerar un día, una semana o un mes.

<sup>11</sup> En inglés VaR (value-at-risk).

percentil indica que la variable de interés se ubica en los valores negativos de los retornos (las pérdidas).

Considerando que  $\sqrt{V_p}$  es un buen estimador de  $\sigma_p$  y reemplazándolo en (35) por su valor –la expresión (5)– se obtiene:

$$VeR(t) = -z_\alpha X_0 \sqrt{\mathbf{w}^T \Omega \mathbf{w}} \quad [36]$$

La complejidad en el cálculo del VeR depende del tipo de activo que incluya el portafolio, por ejemplo, si se consideran *bonos* que pagan dividendos, es preciso tener en cuenta estos flujos de caja. Otro instrumento financiero complejo son los *derivados*, cuyo precio depende del valor de otro activo (Campos 2002).

La matriz de varianzas y covarianzas implícita en la expresión (36) puede construirse usando la proyección de los betas de Blume y las expresiones (25) y (26). Al VeR que utiliza este procedimiento se le llama *factorial*, es cuestionado porque las varianzas y covarianzas cambian en el tiempo, y en este tipo de cálculo, no se consigue modelar este aspecto. Para involucrarlo, se estiman modelos de series de tiempo que permiten la *heterocedasticidad* como los ARCH y su versión generalizada GARCH (Jorion 1997). Para este enfoque, es útil expresar el VeR en términos de la matriz de correlaciones histórica  $\Sigma$  así:

$$VeR(t) = -z_\alpha X_0 \sqrt{\mathbf{w}^T D \Sigma D \mathbf{w}} \quad [37]$$

Donde  $D$  es una matriz de tamaño  $n \times n$  cuyos elementos por fuera de la diagonal son ceros y en la diagonal se encuentran las predicciones de los modelos GARCH para la desviación estándar de los retornos de un activo. Esta técnica requiere  $2n$  procesos que son complejos de identificar<sup>12</sup>. La matriz de varianzas y covarianzas estimada por esta metodología, también se usa para la construcción de la frontera eficiente,

---

<sup>12</sup> La técnica GARCH ofrece un modelo condicional para la varianza en lugar de asumir una varianza constante. Primero, se ajusta un modelo para el nivel de la serie  $x_t$ , este puede ser ARIMA (con rezagos de la misma serie) o ARIMAX (que incluye variables exógenas), una de las condiciones para la buena especificación del modelo es que sus residuales sean ruido blanco. Un modelo GARCH identifica un proceso ARMA para los residuales al cuadrado del modelo ARIMA ajustado para el nivel. Castaño (2005) ofrece un procedimiento que facilita la identificación del mejor proceso ARIMA haciendo uso de la *función de autocorrelación cruzada* entre el residual de un modelo mal especificado y la serie original.

debido a que, el resultado de optimización en el problema de diversificación es muy sensible a estos parámetros (Gerhard y Hess 2002).

El supuesto de normalidad de los retornos ha sido, frecuentemente, refutado con pruebas estadísticas (Mandelbrot 1963). Esta evidencia apoya la hipótesis de que la distribución de probabilidad de los retornos es leptocúrtica (es decir, que los valores se concentran alrededor de la media como ocurre en una distribución *t* de Student) y/o tienen “colas pesadas” (*fat-tailed*). En estos casos, se ha propuesto estudiar la probabilidad de obtener pérdidas debajo de un valor  $y$  que se ubica en la cola de la distribución de retornos del portafolio, a este enfoque se le conoce como VeR condicional (y se denota por CVeR). Matemáticamente, se expresa como  $CVeR = E[y | y < VeR_\alpha]$ . Las “colas pesadas” de los retornos ya no se pueden modelar con la distribución normal, por esta razón, se emplea distribuciones de probabilidad como la Gumbel, Frechet y Weibull<sup>13</sup>. A este enfoque se le conoce, también, como *teoría del valor extremo*.

La violación del supuesto de normalidad, también implica que la *función de utilidad* en el problema (14) debe considerar el tercer y cuarto momentos de la distribución, por ejemplo, Kraus y Litzenberger (1976) incorporan la *simetría* de la distribución. Una discusión acerca de las funciones de utilidad a ser empleadas en el problema de selección de portafolio se presenta en Kallberg y Ziemba (1983).

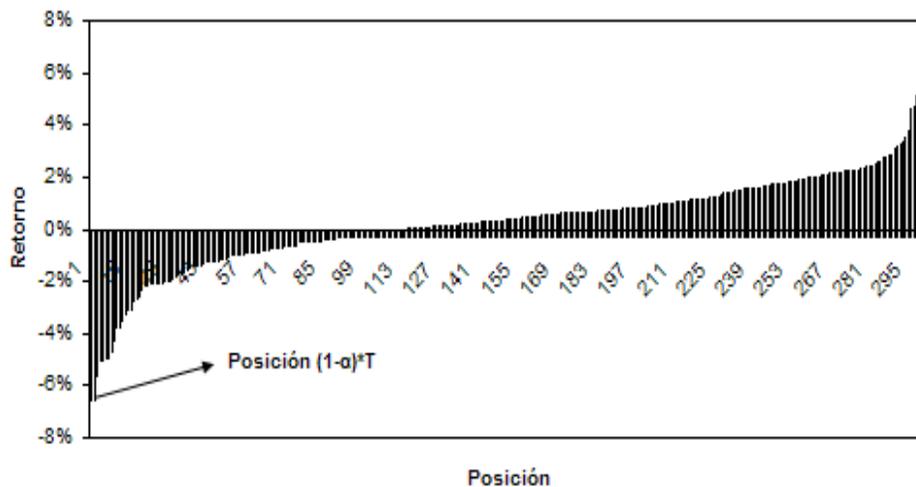
Cuando no es posible hacer supuestos paramétricos, con respecto a la distribución del retorno, se propone una metodología –la más sencilla entre las disponibles–, que calcula el VeR como el  $(1 - \alpha)\% * T$  –menor valor que tomó la variable aleatoria en una muestra de  $T$  registros históricos ordenada de menor a mayor. Este procedimiento se conoce como *simulación histórica* (Campos 2002). En la Gráfica 4 se ilustra su cálculo, en el eje de las abscisas se encuentra el orden de los registros históricos de los retornos en una muestra de 300 datos, la posición en la que se encuentra la máxima pérdida esperada a un nivel del 99% de confianza es la  $(1-0,99)*300$ , es decir, la tercera posición.

En el Cuadro 4 se presenta el cálculo del VeR para los portafolios del Cuadro 2, por las dos metodologías enunciadas. Se observa que la

<sup>13</sup> Estimar los parámetros de estas funciones requiere de muestras bastante amplias (Embrechts 2000), en este caso, se requerirían de años de rendimientos diarios. La estimación de los parámetros de las funciones de distribución mencionadas se realiza por el método de máxima verosimilitud.

simulación histórica produce mejores resultados que el VeR factorial (que trabaja bien en condiciones normales de mercado), pero aún así, en presencia de un evento extremo como lo ocurrido el “lunes negro” los modelos VeR no pueden brindar confiabilidad acerca nivel de pérdidas.

GRÁFICA 4  
CÁLCULO DEL VER POR SIMULACIÓN HISTÓRICA



Fuente: elaboración propia.

CUADRO 4  
VeR DE LOS PORTAFOLIOS

Metodología Cálculo del VeR (Con $\alpha=1\%$ )	Inversionista Arriesgado	Mínimo Riesgo Global	IGBC
Simulación Histórica	-6,55%	-6,81%	-7,13%
VeR Factorial	-4,34%	-3,83%	-4,16%
Caída 12/06/2006	-8,99%	-9,07%	-11,05%

Fuente: elaboración propia

Algunos autores ponen en duda que las propiedades distribucionales de los rendimientos sean estables en el tiempo, lo que imposibilita que el VeR tenga coherencia. En opinión de Taleb (1997a y 1997b)

VaR is charlatanism because it tries to estimate something that is not scientifically possible to estimate, namely the risks of rare events [...] to know the VaR you need the probabilities of events. To get the probabilities right you need to forecast volatility and correlations. [...] The problem we have with statistics is that although we know something about distributions, we know very little about processes.

The greatest risk we face is therefore that of the mis-specification of financial price dynamics by the available model.

## CONSIDERACIONES FINALES

Durante todo el año 2005 la tasa DTF a 90 días estuvo cayendo, sostenidamente. Por el contrario, desde comienzos del año 2000 la bolsa de valores de Colombia se mostró siempre creciente, para 2006 pasó de ser la sexta a ser la tercera más grande de América Latina y, según la opinión de la Banca de Inversiones Morgan Stanley, la más rentable del mundo. Esta dinámica motivó a que más inversionistas optaran por asumir riesgos en el mercado de valores, dejando a un lado las rentabilidades negativas (si se tenía en cuenta los costos de administración y la inflación) que ofrecían los títulos sin riesgo de la banca comercial; esto, también, se reflejó en el fortalecimiento del peso con respecto al dólar<sup>14</sup>.

En el mes de mayo de 2006 la bolsa cayó 18%, el lunes 12 de junio el IGBC descendió en -10,46% generando pánico y obligando, por primera vez, a suspender las operaciones. Pero entre el 14 y el 16 de junio la bolsa logró recuperarse en un 23,4%. Una de las explicaciones para esta turbulencia fue el alza de las tasas de interés en Estados Unidos, lo cual obligó a buscar alternativas de inversión en este país; otra, la más importante, es que en la bolsa colombiana pocos inversionistas concentran la mayoría de los activos financieros, derivando de allí, la capacidad suficiente para mover los precios a su favor.

Lo que hace que esta concentración sea peligrosa es que los niveles de endeudamiento para comprar *acciones*, aumentaron desde comienzos del 2006. De modo que, cuando llegó la caída, muchos no tuvieron con qué respaldar sus deudas y empezaron a vender sus títulos. Esta característica, conduce a que no sea posible decir, que el mercado de valores colombiano sea un *mercado eficiente*. En el caso del EUR/USD es imposible que un solo agente o un grupo de ellos, pueda cambiar el rumbo de los precios a su voluntad, dado que, las bolsas más reconocidas del mundo tienen unos instrumentos legales fuertes para controlar este comportamiento.

---

<sup>14</sup> La tasa de cambio a finales de 2003 era de 2.72,55 pesos por un dólar, en marzo de 2006 se pagaba un 21,76% menos.

“Los administradores de LCTM son, sin embargo, esencialmente tipos modernos: *nerds* eruditos que utilizan fórmulas y computadores para burlarse del mercado [...] Ellos creían que estudiando, cuidadosamente, las correlaciones históricas entre los activos, podían construir portafolios ingeniosos, algunos activos a largo plazo, otros a corto plazo, que dieran grandes rendimientos con mucho menos riesgo del que la gente imaginaba [...] Luego los mercados se enloquecieron. Todavía no está claro si las pérdidas que LCTM sufrió fueron el resultado de un choque que ocurre una sola vez en la vida o si los modelos de computador que se usaron fueron ingenuos en no admitir una gran perturbación del mercado ocasional” Krugman (1999, 183).

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Adcock, C. y Meade, N. (1995). “A simple algorithm to incorporate transactions costs in quadratic optimization”. *European Journal of Operational Research*, 79: 85-94.
- Arrow, K.J. y Enthoven, A.C. (1961). “Quasi-concave programming”. *Econometrica*, 29: 779-800
- Benninga, S. y Wiener, Z. (1998). Value at risk. *Mathematic in Education and Research*, 7(4): 39-45.
- Black, F y Litterman, R. (1992). “Global portfolio optimization”. *Financial Analyst Journal*. 48 (2): 28-43.
- Blume, M. (1971). “On the assessment of risk”. *Journal of Finance*, 26: 1-10.
- Blume, M. (1975). “Betas and their regression tendencies”. *Journal of Finance*, 30: 785-95.
- Blume, M. (1979). “Betas and their regression tendencies: some further evidence”. *Journal of Finance*, 34: 265-267.
- Campos, A. (2002). “El VeR: Herramienta para la Medición de Riesgos de Mercado”. *Apuntes de Banca y Finanzas*, 4. Asobancaria. Octubre.
- Castaño, E. (2005). *La Función de Correlación Cruzada en Series no Estacionarias: Identificación, Tendencias Determinísticas y Raíces Unitarias*. Tesis de Maestría. Escuela de Estadística. Universidad Nacional de Colombia. Sede Medellín.
- Embrechts, P. (2000). Extreme value theory: risk management tool. *Working Paper*. ETH. Obtenido desde el sitio: <http://www.math.ethz.ch/~embrechts/>
- Gerhard, F. y Hess, D. (2002). Multivariate market risk estimators: reliability and transactions costs in the context of portfolio selection. *European Journal of Finance*, 8: 1-18.
- Jorion, P. (1997). *In Defense of VaR*. Obtenido desde el sitio: <http://www.gsm.uci.edu/%7Ejorion/oc/ntalib2.html>
- Kallberg, J. y Ziemba, W. (1983). “Comparison of alternative utility functions in portfolio selection”. *Management Science*, 29: 1257-76.
- Kraus, A. y Litzenberger, R. (1976). “Skewness preference and the valuation of risks assets”. *Journal of Finance*, 38: 1084-1100.
- Krugman, P. (1999). *De vuelta a la economía de la Gran Depresión*. Bogota: Norma.

- Lemke, C. (1965). "Bimatrix equilibrium points and mathematical programming". *Management Science*, 11(7) 681-689.
- Luenberger, D. (1998). *Investment science*. Londres: Oxford University Press.
- Mandelbrot, B. (1963). "The variation of certain speculative prices". *Journal of Business*, 36: 394-419.
- Markowitz, H.M. (1952). "Portfolio selection". *The Journal of Finance*. Vol 7(1): 77-91.
- Markowitz, H.M. (1956). "The optimization of a quadratic function subject to linear constraints". *Naval Research Logistic Quarterly*, 3: 111-133.
- Peressini, A.L., Sullivan, F.E. y Uhl, J.J. (1988). "The mathematics of nonlinear programming". New York: Springer-Verlag.
- Sharpe, W. (1963). "A simplified model for portfolio analysis". *Management Science*, 9(2): 277-293.
- Sharpe, W. (1964). "Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk". *Journal of Finance*, 19: 425-442.
- Sharpe, W. (1970). "Efficient capital markets: a review of theory and empirical work: discussion". *Journal of Finance*, 28-30: 418-420.
- Sharpe, W. (1971). "Mean-absolute-deviation characteristic lines for securities and portfolios". *Management Science*, 18: 2 B1-B13.
- Taleb, N. (1997a). *The world according to Nassim Taleb*. Entrevista obtenida desde el sitio:  
<http://www.derivativesstrategy.com/magazine/archive/1997/1296qa.asp>
- Taleb, N. (1997b). *Against Value-at-Risk: Nassim Taleb replies to Phillippe Jorion*. Obtenido desde el sitio: <http://www.fooledbyrandomness.com/jorion.html>
- Wolfe, P. (1959). "The simplex method for quadratic programming". *Econometrica*, 27: 382-398.

## ANEXO 1 REGRESIÓN PARA ACTUALIZAR LOS BETAS

Dependent Variable: BETA9062006

Method: Least Squares

Sample: 1 17

Included observations: 17

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.004870	0.005148	-0.945984	0.3591
BETA8062006	1.004861	0.004838	207.7084	0.0000
R-squared	0.999652	Mean dependent var	1.047381	
Adjusted R-squared	0.999629	S.D. dependent var	0.195966	
S.E. of regression	0.003773	Akaike info criterion	-8.211647	
Sum squared resid	0.000214	Schwarz criterion	-8.113622	
Log likelihood	71.79900	F-statistic	43142.78	
Durbin-Watson stat	1.524651	Prob(F-statistic)	0.000000	

## ANEXO 2 BETAS ACTUALIZADOS

Acción	Alfa	Beta 12/06/2006	Beta 9/06/2006	Var ( e )
Paz del Río	-0,0001	1,2457	1,2445	0,0008
Éxito	0,0011	0,7724	0,7735	0,0003
Banco de Bogotá	0,0002	0,8164	0,8173	0,0002
Bancolombia Preferencial	0,0007	0,8127	0,8136	0,0002
Nacional de Chocolates	0,0001	0,8973	0,8978	0,0002
Corficolombiana	0,0018	1,1580	1,1572	0,0004
ETB Preferencial	-0,0011	0,8780	0,8786	0,0008
Grupo Aval	0,0009	1,0046	1,0046	0,0004
Fabricato	-0,0009	1,3454	1,3437	0,0018

**ANEXO 3**  
**SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN**  
**CUADRÁTICA POR EL MÉTODO DEL CONJUNTO**  
**ACTIVO EN SCILAB 3.1.**

```

// *****
// Ejemplo para cinco activos
// *****
IND_ESCR = 1;
// *****
H es la matriz de varianzas y covarianzas
// *****
H = [0.051 0.018 0.011 0.015 0.019; 0.018 0.037 0.009 0.012 0.014
     0.011 0.009 0.057 0.009 0.007 ; 0.015 0.012 0.009 0.048 0.012
     0.019 0.014 0.007 0.012 0.031];
tao = 2;
H = H/tao;
// *****
r es el vector de rendimientos
// *****
r = [0.07 0.06 0.11 0.02 0.03]';
H = 2*H;
c = -r;
// *****
w0 es el punto con el que se inicializa el algoritmo
// *****
w0 = [0 0 0 0 0]';
w0 = [.2 .2 .2 .2 .2]'; ii = 1; w0 = 0.025*ones(5,1);
w0(ii) = 0.9;
// *****
Las restricciones se expresan matricialmente A*x <= b
// *****
A = [1 1 1 1 1];
b = [1];
// *****
Límites en que se mueve w. ci <= w <= cs
// *****
ci = zeros(5,1);
cs = ones(5,1);
cs = [];
nig = 1;
[w, lagr, fw] = quapro(2*H, -r, A, b, ci, cs, nig, w0) ;
wSci = w';
resto = A*w-b
fw_ini = w'*H*w -r'*w

```

