UN ENFOQUE ORDINAL PARA MEDIR LA POBREZA

Amartya Sen

El autor agradece los comentarios de Sudhir Anand, Tony Atkinson, Idrak Bhatty, Frank Fisher, Richard Klayard, Suresh Tendulkar y de un comentarista anónimo. Tomado de *Econometrica* 44,2, marzo de 1976. Traducción de Manuel Muñoz, Profesor de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional.

Resumen

Sen, Amartya, Un enfoque ordinal para medir la pobreza", ***Cuadernos de Economía,*** **v. XVII, n. 29, Bogotá, 1998, páginas 39-65.**

En este artículo se propone un nuevo indicador de pobreza que evita algunas deficiencias de los indicadores que hoy se utilizan. Para deducir el indicador se utiliza un enfoque axiomático. La concepción de bienestar usada para establecer el conjunto de axiomas es ordinal. La información requerida para el nuevo indicador es bastante limitada, lo que permite su utilización práctica.

Abstract

Sen, Amartya, "Poverty: An Ordinal Approach to Measurement", ***Cuadernos de Economía,*** **v. XVII, n. 29, Bogotá, 1998, pages 39-65.**

The primary aim of this paper is to propose a new measure of poverty, which should avoid some of the shortcomings of the measures currently in use. An axiomatic approach is used to derive the measure. The conception of welfare in the axiom set is ordinal. The information required for the new measure is quite limited, permitting practical use.

MOTIVACIÓN

En la medición de la pobreza se deben diferenciar dos problemas: 1. La identificación de los pobres y 2. La construcción de un índice de pobreza que utilice la información disponible sobre aquéllos. El primer problema involucra la elección de un criterio de pobreza (por ejemplo, la selección de una 'línea de pobreza' de acuerdo con el ingreso real per cápita) y, luego, determinar quiénes satisfacen este criterio (es decir, quiénes están por debajo de la 'línea de pobreza', LP) y quiénes no. En la literatura sobre la pobreza se han hecho contribuciones significativas a la solución de este problema [Rowntree 1901, Weisbord 1965, Townsend 1954 y Atkinson 1970], pero se han hecho pocos trabajos sobre el segundo, del cual trata este artículo.

El procedimiento más común para el tratamiento del segundo problema consiste, simplemente, en contar el número de pobres y estimar su porcentaje sobre el total de la población. Esta relación, que se denominará H, es obviamente un índice muy tosco. Un número constante de personas por debajo bajo la línea de pobreza puede presentarse junto con un fuerte aumento del faltante de ingresos con respecto a la línea de pobreza.[1]

Este indicador es, también, totalmente insensible a la distribución del ingreso entre los pobres. Una transferencia de los más pobres a quienes

1 "Su único efecto [de la Nueva Ley de Pobres] consistió en que mientras que antes había entre tres o cuatro millones de pobres, ahora aparecía un total de un millón de pobres, y el resto, que seguían siendo pobres, simplemente desaparecieron. La pobreza se ha incrementado, año a año, en los distritos rurales [Engels 1892, 288].

no son tan pobres no afecta a H. De modo que el indicador H viola los dos axiomas siguientes:

- Axioma de monotonicidad: Si lo demás se mantiene constante, una reducción del ingreso de una persona por debajo de la línea de pobreza debe incrementar el indicador de pobreza.

- Axioma de transferencia: Si lo demás se mantiene constante, una transferencia del ingreso de una persona que está por debajo de la línea de pobreza a otra más rica debe incrementar el indicador de pobreza.[2]

A pesar de estas limitaciones, el uso del índice H está muy generalizado.[3]

Otro indicador bastante común es la 'brecha de pobreza' (utilizado por la United States Social Security Administration) [Batchekder 1971], que corresponde al faltante agregado del ingreso de todos los pobres con respecto al de la línea de pobreza. Este indicador satisface el axioma de monotonicidad pero viola el de transferencia.[4]

Aunque los axiomas de monotonicidad y de transferencia no se utilizarán formalmente para deducir el nuevo indicador de pobreza (aunque de todas maneras se cumplen, pues la estructura axiomática de la que se deduce es más exigente y los incluye implícitamente), la investigación emprendida para construir este nuevo índice fue motivada por el hecho de que los indicadores de pobreza comúnmente utilizados violan estas condiciones elementales.

FALTANTE DE INGRESOS Y POBREZA

Sea S una comunidad de n personas y S(x) el conjunto de la población con un ingreso no mayor que x. Si z es la 'línea de pobreza', es decir, el nivel de ingresos en el que comienza la pobreza, S(z) es el conjunto de los pobres. $S(\infty)$ es, por supuesto, el conjunto de la población, es decir, S.

---

2 Consultar los 'principios de Dalton' para la medición de la desigualdad; ver Atkinson [1970a, 247-9], Dasgupta, Sen y Starrett [1973] y Rothschild y Stiglitz [1973].

3 El enérgico y esclarecedor debate sobre si la pobreza rural se ha incrementado o no en la India se basó casi exclusivamente en el índice H. Ver, particularmente Ojha [1970], Dandekar y Rath [1971], Minhas [1970, 1971], Bardhan [1970, 1971], Srinivasan y Vaidyanathan [1971], Vaidyanathan [1971] y Mukherjee *et al.* [1972]. El uso de este criterio bastante tosco de medición de la pobreza está asociado a un notable refinamiento en la corrección de los datos de consumo, el cálculo de deflactores de clase específicos, etcétera.

4 También es totalmente insensible al *número* de personas (o al *porcentaje* de personas) pobres o que comparten una brecha de pobreza dada.

La brecha de ingresos g_i del individuo i es la diferencia entre la línea de pobreza z y su ingreso y_i.

$$g_i = z - y_i \qquad [1]$$

Obviamente, g_i es no negativa para los pobres y negativa para los demás.

Para cualquier configuración de ingresos representada por un vector y de n elementos, la 'brecha agregada' Q(x) del conjunto S(x) de la población con un ingreso no mayor que x es la suma ponderada normalizada de las brechas g_i, de todos los elementos en S(x), utilizando ponderaciones no negativas $v_i(z, y)$.

$$Q(x) = A(z, y)\sum_{i \in S(x)} g_i v_i(z, y) \qquad [2]$$

La especificación de A y v_i depende del conjunto de axiomas que se propone más adelante. Sin embargo, en esta etapa se debe señalar que la ecuación [2] es muy general y que v_i ha sido definida como una función del vector y y no del y_i individual. En particular no se ha impuesto ninguna exigencia de separabilidad aditiva.

El índice de pobreza P de una configuración de ingresos dado y se define como el valor máximo de la brecha agregada Q(x) para todo x:

$$P = \mathrm{Max}_x Q(x) \qquad [3]$$

Dado que las ponderaciones v_i son todas no negativas, a partir de [1] y [2] es obvio que:

$$P = Q(z) \qquad [4]$$

O sea que el índice de pobreza P de una comunidad está dado por la brecha ponderada agregada de los pobres de esa comunidad.

PRIVACIÓN RELATIVA Y COMPARABILIDAD INTERPERSONAL

De acuerdo con el axioma de transferencia, es razonable exigir que si la persona i está peor que la persona j en una configuración de ingresos y dada, la ponderación v_i del faltante de ingresos g_i de la persona con menor ingreso i debe ser mayor que la ponderación v_j del faltante de ingresos g_j. Sea $W_i(y)$ y $W_j(y)$ los niveles de bienestar de i y j bajo la configuración y.

Axioma E (equidad relativa): Para cualquier par i, j: si $W_i(y)$ $W_j(y)$, entonces $v_i(z, y)$ $v_j(z, y)$.

Si las funciones de bienestar individual fueran cardinales, comparables e idénticas para todas las personas y si, además, se aceptara la aditividad utilitarista benthamita del bienestar social, sería natural relacionar a v_i con la utilidad marginal del ingreso de la persona i. Pero en este artículo no se adopta el enfoque utilitarista y no se hacen supuestos de cardinalidad y comparabilidad interpersonal .[5] puesto que el bienestar individual se considera en términos ordinales con niveles comparables. Hay acuerdo en quién está peor que quién, por ejemplo, "que el pobre i está peor que el rico j", pero no se necesita estar de acuerdo sobre el valor de las diferencias de bienestar.

Aunque el axioma E se puede justificar en razón de una función de bienestar cardinal estrictamente cóncava e interpersonalmente comparable, ésta no es la única justificación. La idea de que se debe atribuir un mayor valor a un incremento del ingreso (o a una reducción del faltante) de una persona más pobre que al de una persona relativamente más rica también se puede deducir de consideraciones de equidad interpersonal.[6] En mi opinión, el alcance del Axioma E es mucho mayor del que se consigue partiendo del utilitarismo y de la utilidad marginal decreciente.

El axioma E es una expresión muy moderada del requisito de equidad. Se propone entonces otro axioma que incorpora el axioma E, pero que es mucho más exigente.

Axioma R (Clasificación de las ponderaciones ordinales): La ponderación $v_i(z, y)$ de la brecha de ingreso de la persona i es igual al orden de

---

5 En Sen [1970, 1972] se examinan algunos marcos de referencia alternativos para la comparabilidad interpersonal en los que también se examina la posibilidad de comparabilidad *parcial* de las funciones cardinales de bienestar individual. Aprovecho esta ocasión para cinsignar que aunque el teorema 4 de ese artículo es válido, puede mejorarse remplazando a^* por a^{*2} para que diga: "Con convexidad, independencia de escala y simetría fuerte, la agregación cuasiordenada será completa si el grado de comparabilidad parcial es mayor que o igual a a^{*2}, donde $a^* = \sup_{x.y \in X} a\,(x, y)$". Debería introducirse un cambio similar en el teoorema de Sen [1970b, 115] y e el ejemplo numérico de la página 102. Sin embargo, en el presente artículo sólo se usa el nivel de comparabilidad ordinal

6 Sobre diversos aspectos de las consideraciones de equidad en la economía del bienestar, ver Graaff [1967], Runciman [1966], Kolm [1969], Sen [1970b] y Pattanaik [1970].

clasificación de i en el ordenamiento del bienestar interpersonal de los pobres.

El método para construir las ponderaciones basado en el orden de clasificación no es nuevo, y desde el análisis clásico de este procedimiento [Borda 1781] ha sido extensamente examinado y axiomatizado en la teoría de la votación [ver, especialmente, Fine y Fine 1974; Fishburn 1973, cap. 13; Gärdenfors 1973 y Hansson 1973]. Aunque R se toma aquí como un axioma, se puede demostrar fácilmente como un teorema derivado de axiomas más primitivos [Sen 1973, 1974].

Hay dos métodos básicos para hacerlo. El primero, siguiendo a Borda, es la cardinalización equidistante de un ordenamiento. Si A, B y C están clasificados de acuerdo con sus ponderaciones, y si no hay ninguna alternativa intermedia entre A y B ni entre B y C, "digo que el grado de superioridad que el elector ha dado a A sobre B se de debe considerar idéntico al que ha dado a B sobre C". Por el axioma E, sabemos que si i está peor que j, la ponderación de la brecha de ingresos de i debe ser mayor que la ponderación de la brecha de ingresos de j. Usando el procedimiento de Borda junto con una apropiada normalización del origen y de las unidades, se llega al axioma R.

El segundo es adoptar una visión relativista de la pobreza y considerar la privación como un concepto esencialmente relativo [Runciman 1966]. Cuanto más abajo está una persona en la escala de bienestar mayor es su sensación de pobreza, y su rango de bienestar puede indicar la ponderación que se da a su brecha de pobreza.[7] El axioma R también se puede deducir de esta aproximación.

Volvemos ahora a la relación entre ingreso y bienestar, puesto que los axiomas E y R se expresan en rangos de bienestar, mientras que la información está ordenada por rangos de ingresos. Hay, por supuesto, buenas razones para pensar que algunas veces una persona rica puede tener menor bienestar que una persona pobre, por ejemplo, si se trata de un inválido, y esto puede [plantear interesante problemas de equidad [Sen 1973a, cap. 1]. Sin embargo, cuando buscamos un indicador general de pobreza para toda la comunidad no es fácil incluir esas consideraciones de detalle en el ejercicio. El axioma M procede parte del supuesto 'más tosco' de que una persona más rica está en mejor condición. Además, se considera que la relación de bienestar individual es una ordenación

---

7 Esto puede axiomatizarse en términos del rango de bienestar de la persona pobre (como en el axioma R) o en términos de la población total (ver el axioma R* de la secta sección). Ambos llevan a un resultado esencialmente igual si se normalizan del modo correspondiente (ver el axioma N).

estrictamente completo para evitar algunos problemas que plantean los métodos de ordenación por rangos en el caso de indiferencia. Este último supuesto es menos arbitrario de lo que puede parecer a primera vista.[8]

Axioma M (monotonicidad del bienestar): La relación > (mayor que) definida en el conjunto de números de bienestar individual $\{W_i(y)\}$ para toda configuración de ingresos y es una ordenación completa, y la relación > definida en el conjunto correspondiente de ingresos individuales $\{y_i\}$ es una subrrelación de la primera, es decir, para todo i, j tal que $y_i > y_j$, $W_i(y) > W_j(y)$.

INDICADORES TOSCOS Y NORMALIZACIÓN

En la primera sección se hizo referencia a dos indicadores de pobreza de uso corriente. La proporción de pobres es la relación entre el número de personas con un ingreso $y_i \leq z$ y la población total n.

$$H = q/n \qquad [5]$$

El otro indicador —la brecha de pobreza— se basa en el número de personas que comparten esa brecha, que se puede normalizar fácilmente transformándolo en el porcentaje de brecha personal I, al que denominamos 'relación de brecha de ingreso':[9]

$$I = \sum_{i \in S(z)} g_i/qz \qquad [6]$$

Mientras que la proporción de pobres representa la proporción de la población que está por debajo de la línea de pobreza, la brecha de ingresos representa el porcentaje de su faltante de ingreso promedio para llegar a la línea de pobreza z. El índice H es completamente insensible a la *magnitud* de la brecha de ingresos, mientras que la brecha de ingresos es completamente insensible al *número* de pobres. Ambos indicadores (H e I) son importantes en la construcción de un índice de pobreza, pero

---

8 El índice de pobreza P que aparece en el teorema 1 es totalmente insensible a la forma en que se clasifica a las personas que tienen el mismo ingreso. Ver la ecuación [15].

9 Otro indicador —que podemos llamar I*— se obtiene normalizando la 'brecha de pobreza' con respecto al ingreso total de la comunidad:

$$I^* = Iqz/nm^* \qquad [6^*]$$

Donde m* es el ingreso medio de la población total.

no son suficientes porque no proporcionan información adecuada sobre la exacta distribución de ingresos entre los pobres, Además, ninguno de ellos satisface el axioma de transferencia ni la exigencia de dar una mayor ponderación a la brecha de ingresos de las personas más pobres que a la de las menos pobres (Axioma E, dado el axioma M).

Sin embargo, en el caso especial en el que todos los pobres tienen exactamente el *mismo* nivel de ingreso $y^* < z$, se puede demostrar que H e I, conjuntamente, proporcionarían una información adecuada sobre el nivel de pobreza, puesto que en este caso especial ambos expresan la proporción de la población que está por debajo de la línea de pobreza y el faltante de ingresos de cada uno. Para obtener una simple normalización, enunciamos el axioma N.

Axioma N (Valor normalizado de la pobreza): Si todos los pobres tienen el mismo ingreso, $P = HI$ [ver la primera nota explicativa del traductor].

EL ÍNDICE DE POBREZA DERIVADO

Los axiomas establecidos determinan un único índice de pobreza. Es fácil establecer ese índice si numeramos las personas en orden no decreciente de ingresos,[10] es decir, cumpliendo:

$$y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n \qquad [7]$$

Teorema 1: Cuando el número de pobres es grande, el único índice de pobreza que satisface los axiomas R, M y N es:

$$P = H[I + (1 - I)G] \qquad [8]$$

donde G es el coeficiente de Gini de la distribución de ingresos de los pobres.

Demostración: Por el axioma M hay una forma de contar los individuos que satisface la condición [7], tal que:

$$W_1(y) < W_2(y) < \ldots < W_n(y) \qquad [9]$$

10 Si hay más de una persona con el mismo ingreso, [7] no determina exclusivamente la numeración. Pero la fórmula del índice de pobreza del teorema 1 arroja el mismo P, sin que importe la convención de numeración que deba cumplir [7].

Para toda persona $i \leq q$, hay exactamente $(q + 1 - i)$ personas pobres con un nivel de bienestar al menos tan alto como el de la persona i. Del axioma R:

$$v_i(z, y) = q + 1 - i \qquad [10]$$

Por consiguiente, de [2] y [4]:

$$P = A(z, y)\sum_{i=1}^{q} g_i(q + 1 - i) \qquad [11]$$

En el caso especial en el que todos los pobres tienen el mismo ingreso y^* y la misma brecha de ingresos $g^* = z - y^*$, tenemos que

$$P = A(z, y)g^* q(q + 1)/2 \qquad [12]$$

Pero como, de acuerdo con el axioma N:

$$P = (q/n)(g^*/z) \qquad [13]$$

Entonces, de [12] y [13]:

$$A(z, y) = 2/(q + 1)nz \qquad [14]$$

De [11] y [14] se sigue que

$$P = 2/(q + 1)nz\left[\sum_{i=1}^{q}(z - y_i)(q + 1 - i)\right] \qquad [15]$$

El coeficiente de Gini de la curva de distribución de ingresos de Lorenz está dada, para los pobres, por:

$$G = (1/2q^2m)\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}|y_i - y_j|, \qquad [16]$$

donde m es el ingreso medio de los pobres.

Dado que $|y_i - y_j| = y_i + y_j - 2\min(y_i, y_j)$, es claro que [Nota explicativa 2]

$$G = 1 - (1/q^2m) \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{q} \min(y_i, y_j)$$

$$= 1 + 1/q - (2/q^2m) \sum_{i=1}^{q} y_i(q + 1 - i) \text{ [Nota explicativa 3]} \qquad [17]$$

De [15] y [17] se sigue que

$$P = \frac{1}{(q+1)nz} \left[zq(q+1) + q_2m \left(G - \frac{q+1}{q}\right)\right] \text{ [Nota explicativa 4]}$$

Dados [5] y [6], Esta expresión se reduce a

$$P = H\{1 - (1 - I)[1 - G(q/q + 1)]\} \text{ [ver la nota explicativa 5]} \qquad [18]$$

Si q es grande, [18] da lugar a [8]. Esto establece la condición necesaria del teorema 1 y la condición suficiente se establece fácilmente verificando que P definida por [18], para un q grande dado por [8], satisface los axiomas R, M y N.

POBREZA Y DESIGUALDAD

Vale la pena aclarar el papel del coeficiente de Gini de la curva de distribución de ingreso de Lorenz para los pobres. La mejor forma de hacerlo es plantear la siguiente pregunta: ¿Qué indicador de desigualdad se deduciría adoptando el mismo enfoque que aquí se ha utilizado para deducir el indicador de pobreza?

El índice de pobreza se dedujo usando el concepto más primitivo de brecha agregada Q(x). Se debe señalar que dado el sistema de ponderaciones definido por los axiomas R y M, el valor de Q(x) es igual para todo $x \geq z$, de modo que P, definida por [3] como $\max_x Q(x)$, puede representarse como Q(x) para todo $x \geq z$ y no sólo para $x = z$, debido a que por el axioma R, la ponderación de la brecha de ingreso g_i de la persona i es igual al número de personas pobres que están al menos tan bien como la persona i. El hecho de incluir a las personas que están por encima de la línea de pobreza z no afecta el valor de Q porque la ponderación de su brecha de ingreso g_i es cero, de acuerdo con el axioma M.

Esto es suficiente para medir la pobreza, pero si pasamos a medir la desigualdad, también deberíamos incluir la brecha de ingresos de la población que está por encima de la línea de pobreza. Además, la brecha de ingresos se deben calcular, no a partir de una línea de pobreza z dada exógenamente, sino de alguna característica interna de la configuración de ingresos y, tal vez el ingreso promedio. Las variaciones de esta línea transformarán el indicador de pobreza absoluta en un indicador de desigualdad relativa.

Para hacerlo, remplazamos z por el ingreso promedio m* de y. Luego modificamos las ponderaciones dadas por el axioma R para que incluyan a toda la población y no solamente a los pobres.

Axioma R*: La ponderación $v_i(z, y)$ de la brecha de ingresos de la persona i es igual al número de personas de S que están al menos tan bien como la persona i.

El axioma R* exige que la ponderación v_i de la brecha de ingreso de la persona i sea $(n + 1 - i)$.

Se puede considerar que el problema de la medición de la desigualdad y de la pobreza son dos ejercicios entrelazados. Se puede definir el indicador desigualdad correspondiente al indicador de pobreza P de la siguiente manera:

Definición: El indicador de desigualdad η correspondiente al índice de pobreza P especificado por el teorema 1 es el valor de P que se obtiene cuando q (el número de pobres) se remplaza por n (el total de población) y z (la línea de pobreza) se remplazando por m* (el ingreso medio de la población).

Teorema 2: El indicador de desigualdad η, correspondiente al índice de pobreza, se aproxima al coeficiente de Gini cuando n es grande.

La prueba es obvia, en [15] y [17] se remplaza q por n y z y m por m* en las formulaciones de P y del coeficiente de Gini (que ahora se redefine para toda la comunidad). Esto también se verifica haciendo H = 1 e I = 0 en P definida por el teorema 1.

Por tanto, el indicador de pobreza P obtenido con el teorema 1 es esencialmente una translación del coeficiente de Gini, de la medición de la desigualdad a la de la pobreza.[11]

En el diagrama de la gráfica 1 (ver las notas aclarativas del traductor) se representan a P y G . La línea OGB es la curva de Lorenz y OB la línea de perfecta equidad. El coeficiente de Gini G está representado por el área OGB dividida por el área OAB. La pendiente de la línea OD es la

11 Una axiomatización del coeficiente de Gini como indicador de la desigualdad se encuentra en Sen [1974]. Como allí se usa un sistema de axiomas más primitivos, R* es un teorema y no un axioma.

'línea de pobreza' en estas unidades normalizadas y OE es el número de pobres. El indicador de pobreza P corresponde al área OGF dividida por el área OEI. La diferencia entre los dos consiste (i) en que la pendiente de OD (la 'línea de pobreza') es diferente de la pendiente de OB (el ingreso medio normalizado), y (ii) en que en el indicador de pobreza sólo se incluyen los pobres, es decir, OE, en vez de todas las personas, es decir, OA.

Las ponderaciones del orden de rangos del coeficiente de Gini G y del indicador de pobreza P se aprecian intuitivamente considerando el área bajo la curva OGB, que deja por fuera al numerador del Gini, es decir, que incluye a (1 – G). El ingreso de las personas más pobres se incluye en todos los puntos y si hay n personas su ingreso entra n veces. Por otra parte, el ingreso más alto está incluido bajo el área OGB exactamente una vez, en el punto A, cuando se incluyen a todas las personas, es decir, que la persona más rica entra exactamente una vez más que el camello que pasa por el ojo de la aguja. El iésimo pobre entra en el iésimo punto de las observaciones y su ingreso también se incluye en las observaciones restantes (n - i), de modo que su ingreso se incluye (n + 1 - i) veces. Esto da lugar a las ponderaciones del orden de rangos a través del mecanismo de la curva de Lorenz, y esta notable coincidencia es lo que hace que el coeficiente de Gini coincida con las ponderaciones normativas deducidas de los rangos ordinales que satisfacen el Axioma R* (y el axioma E) dado el axioma M. Una manera similar de entender intuitivamente el resultado relacionado con el indicador de pobreza consiste en considerar el número de veces que se contabiliza la brecha entre la pendiente de OD (línea de pobreza) y la pendiente de OGB (el ingreso de los pobres).

INTERPRETACIÓN Y VARIACIONES

El índice de pobreza que aquí se propone tiene una interpretación bastante sencilla. El indicador está compuesto por la proporción H multiplicada por la relación de brecha de ingresos I multiplicadas por el coeficiente de Gini G de la distribución de ingresos entre los pobres ponderado por (1 - I), es decir, ponderado por la relación entre el ingreso medio de los pobres y el nivel de ingreso correspondiente a la línea de pobreza. Una manera de entender la justificación de este índice es la siguiente: I representa la pobreza medida por brecha proporcional entre el ingreso medio de los pobres y la línea de pobreza Esto ignora la distribución *entre* los pobres, pero G proporciona esa información. Además de la brecha de pobreza del ingreso medio de los pobres expresado por I, existe la brecha ocasionada por la desigual distribución del ingreso medio, que se expresa mediante el coeficiente de Gini G de esa distribución multiplicado por la relación del ingreso promedio. El indicador de brecha de ingresos así ajustado tiene en cuenta la desigualdad entre los pobres, es decir $I + (1 - I)G$, está normalizado por cada persona pobre y no toma en cuenta el número de personas que están por debajo de la línea de pobreza, que podría ser grande o pequeño. El indicador compuesto P se obtiene multiplicando $[I + (1 - I)G]$ por el índice H.

Aunque ésta sea quizá la forma más fácil de interpretar el índice P, se debe tener presente que su justificación reside en los axiomas que se usaron para deducirlo. La forma multiplicativa elegida en el axioma N es simple pero arbitraria. El axioma M, tal vez justificable en ausencia de información detallada sobre los pobres, es objetable cuando se sabe mucho acerca de los individuos de ese grupo, por ejemplo, que A es inválido y más rico que B, que es sano, y sin embargo A está peor en algún sentido [Sen 1973a, 17-20]. Finalmente, el Axioma R sigue el procedimiento de Borda, quien cardinaliza una ordenación de modo que las poderaciones son los números del rango. Esto también es arbitrario, por supuesto, aunque se suele usar en otros contextos, como indica la popularidad de las diversas variantes del procedimiento de ordenación por rangos de votación. También puede justificarse en términos de la intensidad de las preferencias que se presumen a partir de los rangos usando únicamente una versión de la 'razón insuficiente' (siguiendo a Borda)] o en términos de una concepción esencialmente relativista de la pobreza. Es posible que muchos no acepten el axioma R por la arbitrariedad en que se incurre cuando la ponderación de la diferencia de ingresos de la persona i se hace igual a su rango de pobreza. Aun con un nivel *dado* de ingresos, la ponderación de una persona pobre se reduce si un pobre más rico que ella se empobrece más que ella. Las ventajas y deficiencias del sistema de ordenación por rangos son suficientemente claras.

Vale la pena señalar algunas propiedades de P. Se encuentra en el intervalo cerrado $[0, 1]$, $P = 0$ si todos tienen un ingreso mayor que z, y $P = 1$ si todos tienen un ingreso igual a cero. En la práctica, por supuesto, P nunca será igual a uno porque existen requerimientos de subsistencia (de modo que para todo i, $y_i > 0$) y porque aun en las economías muy pobres el sistema de clases asegura la prosperidad de algunos (de modo que para algunos i, $y_i > z$).

Nótese también que cuando todos los pobres tienen el mismo ingreso, es decir, cuando $G = 0$, cuanto menor es el ingreso de los pobres tanto más cerca estará el indicador P del índice H y del indicador de brecha de ingresos I.

También se pueden considerar algunas variaciones de los procedimientos de normalización. Primera, si todas las ponderaciones de las brechas de ingresos se reducen a la mitad, es decir, si la brecha de ingresos del iésimo pobre se hace igual a $(q - i + 1/2)$, entonces [8] es válida no sólo para q grandes sino para cualquier q. Sin embargo, para medir la pobreza de comunidades de cualquier tamaño, los dos procedimientos no arrojan grandes diferencias.

Segunda, la normalización reflejada en el axioma N se puede cambiar aunque se mantenga el procedimiento de ponderaciones. En particular, el indicador de pobreza se puede hacer depender también de la *relación* entre el ingreso medio de los pobres y el ingreso medio de toda la comunidad [Sen 1973b, ecuaciones (8) y (9)]. Esto daría una mayor cobertura al indicador de pobreza. Por ejemplo, un mismo número de pobres con la misma distribución de ingresos tendrá un *mayor* índice de pobreza si disminuye el ingreso de algunas personas que están por encima de la línea de pobreza aunque no quede por debajo de esa línea de pobreza.[12] En cambio, el indicador P es totalmente invariante con respecto a los cambios en el ingreso de la población que está arriba de la línea de pobreza y sólo depende del ingreso de los pobres. Esto no nos impide definir la línea de pobreza z teniendo en cuenta la distribución total del ingreso (es decir, una z más alta para los Estados Unidos que para la India), pero una vez que se ha especificado la línea de pobreza, el indicador de pobreza P sólo depende del ingreso de los pobres.

CONCLUSIONES FINALES

1. El indicador de pobreza P que aquí se presenta utiliza una aproximación ordinal a las comparaciones de bienestar. La necesidad de dar una mayor ponderación al ingreso de una persona más pobre se deduce de consideraciones de equidad (Axioma E) sin que sea necesario utilizar funciones de utilidad *cardinal* interpersonalmente comparables. El nivel ordinal de comparabilidad se utiliza para obtener un sistema de ponderaciones por orden de rangos (Axioma R), dada una relación monotónica entre ingreso y bienestar (Axioma M).

2. El indicador de pobreza P obtenido axiomáticamente en el teorema 1 corresponde al índice de desigualdad de Gini, en el sentido de que al remplazar los pobres por la totalidad de la población y la línea de pobreza por el ingreso medio, P se transformaría en G. Este indicador de pobreza P difiere notablemente de los indicadores toscos crudas de pobreza que se utilizan en la literatura estadística sobre el tema y en las discusiones políticas. A diferencia de H (el porcentaje de la población que está por debajo de la línea de pobreza), P es sensible a la magnitud de la diferencia del ingreso de los pobres con respecto a la línea de pobreza. A diferencia de I (el porcentaje de la

12 Como sucede con el "indicador dependiente de la media" $P^* = Pz/m^*$.

diferencia promedio entre el ingreso de los pobres y la línea de pobreza), P es sensible al número de personas que están por debajo de la línea de pobreza.[13] Y a diferencia de cualquier función concebible $\psi(H, I)$ de estos indicadores toscos, P es sensible al patrón de la distribución de ingresos de los pobres.

3. A lo largo de todo el artículo, el ingreso se ha considerado como una magnitud homogénea representada por un número real. El marco de referencia que aquí se ha desarrollado se puede extender a casos de múltiples bienes, evaluando el consumo del bien j por la persona i en términos del precio del bien j y del rango de ingreso de i, basando el cálculo en las 'matrices de bienes' de Fisher [Fisher 1956, Kenen y Fisher 1957].[14]

4. Si se acepta la interpretación del bienestar ordinal como justificación del coeficiente de Gini (Axioma R*), es necesario preguntarse cuál es el significado del debate sobre la no existencia de una "función de utilidad aditiva que clasifique la distribución del ingreso en el mismo orden que el coeficiente de Gini" [Newbery 1970, 264; Sheshinski 1972; Dasgupta *et al.* 1973; y Rothschild y Stiglitz 1973]. Evidentemente G no es una función aditiva de ingresos individuales ni es estrictamente cóncava ni es estrictamente cuasi-cóncava (como es obvio en la ecuación [17]). El axioma E y específicamente el axioma R* conducen al resultado de preferencia por la igualdad señalado por Dasgupta *et al.* [1973] y Rothschild y Stiglitz [1973]; pero la ponderación ordinal del coeficiente de Gini no puede ser incorporada en el marco de una función de bienestar utilitarista estrictamente cóncava o en cualquier otra función de bienestar social en la que las ponderaciones marginales sean sensibles a los valores exactos del ingreso (en contraposición con sus rangos ordinales). Eso también es válido para el indicador de pobreza P que aquí se propone.

5. Finalmente, se debe señalar que cualquier sistema de medición que solo tenga en cuenta la información de bienestar *ordinal* será deficiente para un observador convencido de que tiene acceso a funciones de bienestar cardinales que admiten comparaciones interpersonales. Si se consiguió dicha información cardinal, el hecho de que P descartara una parte de ella y sólo utilizara la información ordinal debe ser juzgado como un derroche. Por otra parte, es mucho más difícil estar de acuerdo sobre las funciones de bienestar cardinales que admiten comparacio-

---

13 La definición alternativa del indicador de brecha de ingreso I* es sensible al número de personas que están por debajo de la línea de pobreza, pero también es sensible al ingreso de la persona que están *por encima* de la línea de pobreza. Además, I* es insensible a la *distribución* del ingreso entre los pobres.

14 En Sen [1976] se examina el uso de esa aproximación como ilustración de un sistema general de comparaciones del ingreso real con un tratamiento explícito de la distribución.

nes interpersonales que llegar a acuerdos sobre los rangos de bienestar. Aunque es deficiente en el sentido descrito, la aproximación que aquí se propone es menos exigente. Es un compromiso semejante al del método de votación de Borda, que sólo establece rangos e introduce el supuesto de equidistancia para obtener ponderaciones numéricas. Los datos requeridos para estimar el indicador de pobreza P son, en consecuencia, bastante limitados.

NOTAS EXPLICATIVAS

Nota 1

Cuando todos los pobres reciben el mismo ingreso, P = HI
donde H = q/n; q = número de pobres; n = población total

$$I = \frac{\sum_{i=1}^{q} (z - y_i)}{qz}$$

z = línea de pobreza; y_i = ingreso del pobre i
Como y_i es igual para todos,

$$I = \frac{q(z - y_i)}{qz} \qquad I = \frac{qz - qy_i}{qz} \qquad I = 1 - \frac{y_i}{z}$$

Entonces P = HI

$$P = \left(\frac{q}{n}\right)\left(1 - \frac{y_i}{z}\right)$$

$$dP = \frac{1}{n}dq - \left(\frac{1}{n}\frac{q}{z}dy_i + \frac{1}{n}\frac{y_i}{z}dq\right) \qquad dP = \frac{1}{n}dq - \frac{1}{n}\left(\frac{q}{z}dy_i + \frac{y_i}{z}dq\right)$$

$$dP = \frac{1}{n}\left[\left(1 - \frac{y_i}{z}\right)\right]dq - \frac{q}{z}dy_i$$

Se trata de ver cómo cambia P cuando q disminuye, dado que algunos pobres transfieren dinero a otros pobres y, así, los 'nuevos no pobres' reciben un ingreso igual a z; además, la suma de dinero transferida por los que siguen siendo pobres es idéntica para cada uno de ellos.

Si la magnitud de la pobreza se reduce en F, donde

$$F = q^1 - q \qquad F < 0$$

el ingreso que debieron transferir los que siguen pobres a los 'nuevos no pobres' es $F(z - y_i)$, es decir, a cada pobre se le quitó

$$\frac{F(z - y_i)}{q_1} = dy_i$$

Puesto que dq = F y suponiendo cambios pequeños, dP es igual a

$$dP = \frac{1}{n}\left[\left(1 - \frac{y_i}{z}\right)F - \frac{q}{z}\left(F\frac{(z - y_i)}{q_1}\right)\right]$$

Y como el cambio es pequeño, q_1 es aproximadamente igual a q, por tanto

$$dP = \frac{1}{n}\left[\left(1 - \frac{y_i}{z}\right)F - \frac{F(z - y_i)}{z}\right]$$

$$dP = \frac{1}{n}\left[\left(1 - \frac{y_i}{z}\right)F - \left(1 - \frac{y_i}{z}\right)F\right] = 0$$

Ejemplo. Hay 100 personas con la siguiente información:
N = 100; q = 50; cada pobre tiene \$80, y la línea de pobreza, z = \$100
De modo que

$$I = 1 - \frac{80}{100} = 0.2 \quad H = \frac{50}{100} = 0.5 \quad P = (0.5)(0.2) = 0.1$$

Si el número de pobres baja en 10 y los 40 restantes les transfieren una suma igual, F = - 10

$$F = 40 - 50 = -10$$

$q^1 = 40$ y la transferencia de cada uno de los que sigue siendo pobre es de

$$\frac{-10\,(100 - 80)}{40} = -5$$

es decir, $dy_i = -5$. En la nueva situación,

$$q_1 = 40 \qquad y_i^1 = (80 - 5) = 75 \qquad I_1 = 1 - \frac{75}{100} = 0.25$$

$$H_1 = 0.4 \qquad P_1 = 0.1$$

Nota 2

Si

$$\sum_{i=1}^{q} y_i = q\frac{\sum_{i=1}^{q} y_i}{q} = qm \qquad y \qquad y_1 < y_2 < y_3 \ldots < yq$$

donde m es la media del ingreso de los pobres, entonces,

$$\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}(y_i + y_j) = \sum_{i=1}^{q}(qy_i + qm) = mq^2 + mq^2 = 2mq^2$$

$$G = \left(\frac{1}{2mq^2}\right)\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}|y_i - y_j| = \left(\frac{1}{2mq^2}\right)\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}(y_i + y_j - 2\min[y_i, y_j])$$

$$= \left(\frac{1}{2mq^2}\right)\left\{\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}(y_i + y_j) - 2\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}\min\,[y_i\,,y_j]\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{2mq^2}\right)\left\{2mq^2 - 2\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}\min\,[y_i\,,y_j]\right\}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{mq^2}\right)\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}\min\,[y_i\,,y_j]$$

Nota 3

$$\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}\min\,(y_i\,,y_j) = \sum_{i=1}^{q}\left\{\min[y_i\,,y_1] + \min[y_i\,,y_2] + \min[y_i\,,y_3] + \ldots + \min\,[y_i\,,y_q]\right\}$$

$$\begin{aligned}
= {} & \min\,[y_1\,,y_1] + \min[y_1\,,y_2] + \min[y_1\,,y_3] + \ldots + \min[y_1\,,y_i] + \ldots + \min\,[y_1\,,y_q] + \\
& \min\,[y_2\,,y_1] + \min[y_2\,,y_2] + \min[y_2\,,y_3] + \ldots + \min[y_2\,,y_i] + \ldots + \min\,[y_2\,,y_q] + \\
& \min\,[y_3\,,y_1] + \min[y_3\,,y_2] + \min[y_3\,,y_3] + \ldots + \min[y_3\,,y_i] + \ldots + \min\,[y_3\,,y_q] + \\
& \ldots + \\
& \min\,[y_q\,,y_1] + \min[y_q\,,y_2] + \min[y_q\,,y_3] + \ldots + \min[y_q\,,y_i] + \ldots + \min\,[y_q\,,y_q]
\end{aligned}$$

La matriz de los sumandos es simétrica y por tanto se pueden sumar los términos de la mitad superior, multiplicar por dos y restar una vez los elementos de la diagonal (mq) que de otra forma se estarían tomando dos veces. Se ve más claramente con la matriz de los subíndices:

$$\left\{\begin{matrix}
1,1 & 1,2 & 1,3 & \ldots & 1,i & \ldots & 1,q-1 & 1,q \\
2,1 & 2,2 & 2,3 & \ldots & 2,i & \ldots & 2,q-1 & 2,q \\
3,1 & 3,2 & 3,3 & \ldots & 3,i & \ldots & 3,q-1 & 3,q \\
\ldots & & & & & & & \\
i,1 & i,2 & i,3 & \ldots & i,i & \ldots & i,q-1 & i,q \\
\ldots & & & & & & & \\
q-1,1 & q-1,2 & q-1,3 & \ldots & q-1,i & \ldots & q-1,q-1 & q-1,q \\
q,1 & q,2 & q,3 & \ldots & q,i & \ldots & q,q-1 & q,q
\end{matrix}\right\}$$

El mínimo de la fila en la media matriz superior es y_i, que aparece $(q - (i - 1))$ veces.

La suma de la primera fila (mitad superior) es igual a	qy_1
La suma de la segunda fila (mitad superior) es igual a	$(q - 1)y_2$
La suma de la tercera fila (mitad superior) es igual a	$(q - 2)y_3$
...	
La suma de la fila i (mitad superior) es igual a	$(q - (i - 1))y_i$
...	
La suma de la fila q (mitad superior) es igual a	$(q - (q - 1))y_q$
Total de media matriz	$\Sigma y_i(q + 1 - i)$
Total de la sumatoria	$2\Sigma y_i(q + 1 - i) - mq$

De modo que al reemplazar en la ecuación del texto, resulta

$$1-\frac{1}{q2m}\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}\min(y_i, y_j)=1+\frac{1}{q}-\frac{2}{q2m}\sum_{i=1}^{q}y_i(q-i+1)$$

Nota 4

$$G = 1+\frac{1}{q}-\frac{2}{q^2m}\sum_{i=1}^{q}y_i(q-i+1)$$

de donde,

$$\frac{2}{q^2m}\sum_{i=1}^{q}y_i(q-i+1)=1+\frac{1}{q}-G$$

$$\sum_{i=1}^{q}y_i(q-i+1)=\frac{q^2m}{2}+\frac{qm}{2}-G\frac{q^2m}{2}$$

Por otra parte,

$$P=\frac{2}{(q+1)nz}\left[\sum_{i=1}^{q}z(q-i+1)-\sum_{i=1}^{q}y_i(q-i+1)\right]$$

entonces,

$$P=\frac{2}{(q+1)nz}\left[\sum_{i=1}^{q}z(q-i+1)-\left(\frac{q^2m}{2}+\frac{qm}{2}-G\frac{q^2m}{2}\right)\right]$$

$$P=\frac{2}{(q+1)nz}\left[z\left[q^2+q-\frac{q(q+1)}{2}\right]-\left(\frac{q^2m}{2}+\frac{qm}{2}-G\frac{q^2m}{2}\right)\right]$$

$$P = \frac{2}{(q+1)nz}\left[z\frac{q(q+1)}{2} - \left(\frac{q^2m}{2}\right)\left(1 - G + \frac{1}{q}\right)\right]$$

$$P = \frac{1}{(q+1)nz}\left[zq(q+1) + q^2m\left(G - \frac{(q+1)}{q}\right)\right]$$

Nota 5

$$P = \frac{1}{(q+1)nz}\left[zq(q+1) + q^2m\left(G - \frac{(q+1)}{q}\right)\right]$$

$$P = \frac{q}{n}\left[\frac{1}{(q+1)z}\right]\left[z(q+1) + qm\left(G - \frac{(q+1)}{q}\right)\right]$$

y como $H = \frac{q}{n}$

$$P = H\left[1 + \frac{qm}{(q+1)z}\right]\left[G - \frac{(1+1)}{q}\right]$$

pero como

$$I = \frac{\sum_{i=1}^{q} G_i}{zq} = \frac{\sum_{i=1}^{q} (z - y_i)}{qz} = \frac{(zq - mq)}{zq} = \frac{(z - m)}{z}$$

si se tiene que

$$1 - I = 1 - \frac{(z-m)}{z} = \frac{m}{z}$$

entonces

$$P = H\left[1 + (1 - I)\left(\frac{q}{q+1}\right)\right]\left[G - \frac{(q+1)}{q}\right]$$

$$P = H\left[1 - (1 - I)\left[1 - G\left(\frac{q}{q+1}\right)\right]\right]$$

y para valores muy grandes de q, la relación $\frac{q}{(q+1)}$ tiende a 1, luego

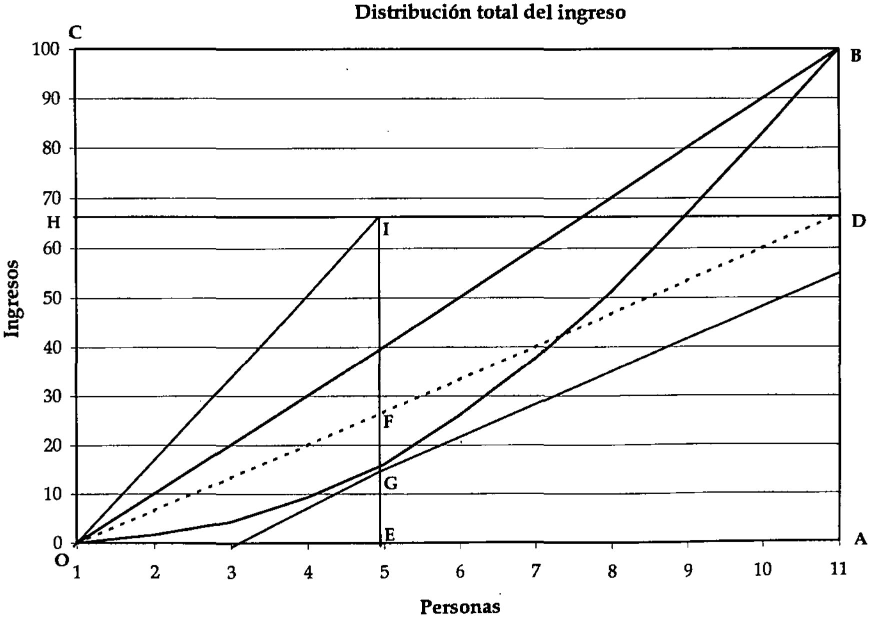
$$P = H[1 - (1 - I)(1 - G)] = H(I + (1 - I)G)$$

Nota explicativa de la gráfica 1

El cuadro y la gráfica 1, construida con esos datos, constituyen un ejemplo del índice que propone Sen y de su expresión gráfica.

Personas	Ing c/una	% pers	% de ing	Acum pers	Acum ingrs	si todos LP	%	Acumulado
				0	0	0	0	0
10	5	10	1.7	10	1.7	20	6.7	6.7
10	8	10	2.7	20	4.3	20	6.7	13.3
10	15	10	5.0	30	9.3	20	6.7	20.0
10	20	10	6.7	40	16.0	20	6.7	26.7
10	30	10	10.0	50	26.0	20	6.7	33.3
10	35	10	11.7	60	37.7	20	6.7	40.0
10	40	10	13.3	70	51.0	20	6.7	46.7
10	47	10	15.7	80	66.7	20	6.7	53.3
10	49	10	16.3	90	83.0	20	6.7	60.0
10	51	10	17.0	100	100.0	20	6.7	66.7
100	300	100	100.0			200	66.7	

GRÁFICA 1



En términos gráficos P = OGF/OEI

$$OGF = OFE - X \text{ y } OFE \text{ es } OFE = (40)\frac{26.7}{2} = 534$$

$$X = (10)\frac{1.7}{2} + (10)\frac{2.7}{2} + (10)1.7 + (10)\frac{5}{2} + (10)4.3 + (10)\frac{6.7}{2} + (10)9.3 = 233.33$$

$$OEI = (40)\frac{66.7}{2} = 1334 \qquad OGF = 534 - 233.3 = 300.3$$

$$P = OGF/OEI = \frac{300.3}{1334} + 0.225$$

El valor de P se obtiene utilizando la fórmula P = H(I + (1 - I)G)
Partimos de la gráfica para llegar a la siguiente expresión

$$P = \frac{OGF}{OEI} = \text{donde } OGF = OFE - X, \text{ y } OFE = \frac{\left(\frac{q}{n100}\right)\left(\frac{q}{n}\right)\left(\frac{z}{\mu 100}\right)}{2}$$

Donde q = número de pobres; n = total de personas y μ = ingreso promedio total

$$OEI = \frac{\left[\left(\frac{q}{n100}\right)\left(\frac{z}{\mu 100}\right)\right]}{2} \quad \text{y, así,}$$

$$P = \frac{\left[\frac{\left(\frac{q}{n100}\right)\left(\frac{q}{n}\right)\left(\frac{z}{\mu 100}\right)}{2} - X\right]}{\left[\frac{\left(\frac{q}{n100}\right)\left(\frac{z}{\mu 100}\right)}{2}\right]}$$

$$P = \frac{q}{n} - \frac{2X}{\left[\left(\frac{q}{n100}\right)\left(\frac{z}{\mu 100}\right)\right]}$$

Ahora hay que calcular X

$$X = \frac{\left(\frac{r}{n100}\right)\left(\frac{Y_1}{n\mu 100}\right)}{2} + \frac{\left(\frac{r}{n100}\right)\left(\frac{Y_2}{n\mu 100}\right)}{2} + \left(\frac{r}{n100}\right)\left(\frac{Y_1}{n\mu 100}\right) +$$

$$\frac{\left(\frac{r}{n100}\right)\left(\frac{Y_1}{n\mu 100}\right)}{2} + \left(\frac{r}{n100}\right)\left(\frac{Y_1 + Y_2}{n\mu 100}\right) + \frac{\left(\frac{r}{n100}\right)\left(\frac{Y_1}{n\mu 100}\right)}{2} +$$

$$\left(\frac{r}{n100}\right)\left(\frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{n\mu 100}\right)$$

Donde r es cada pobre (es decir, 1)

$$X = \left(\frac{r}{n10000}\right)\left(\frac{1}{n\mu}\right)\left[\frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}{2} + Y_1 + (Y_1 + Y_2) + (Y_1 + Y_2 + Y_3)\right]$$

$$X = 10000\frac{1}{n}\left[\frac{7Y_1 + 7Y_2 + 3Y_3 + Y_4}{2n\mu}\right]$$

$$P = \frac{q}{n} - \frac{2X}{\left(\frac{q}{n100}\right)\left(\frac{z}{\mu 100}\right)}$$

Por lo tanto, reemplazando X

$$P = \frac{q}{n} - \frac{2\left[10000\frac{r}{n}\frac{(7Y_1 + 5Y_2 + 3Y_3 + Y_4)}{2n\mu}\right]}{\left(\frac{q}{n100}\right)\left(\frac{z}{\mu 100}\right)}$$

$$P = \frac{q}{n} - \frac{\left(\frac{r}{n}\right)\left(\frac{7Y_1 + 5Y_2 + 3Y_3 + Y_4}{n\mu}\right)}{n\left(\frac{qz}{n\mu}\right)}$$

$$P = H - \frac{\left(\frac{1}{n}\right)(7Y_1 + 5Y_2 + 3Y_3 + Y_4)}{qz}$$

$$P = H\left[1 - \frac{(7Y_1 + 5Y_2 + 3Y_3 + Y_4)}{q^2 z}\right]$$

$$P = H\left[1 - \frac{(8Y_1 + 6Y_2 + 4Y_3 + 2Y_4 - Y_1 - Y_2 - Y_3 - Y_4)}{q^2 z}\right]$$

$$P = H\left[1 + \frac{mq}{q^2 z} - \frac{(8Y_1 + 6Y_2 + 4Y_3 + 2Y_4)}{q^2 z}\right]$$

Donde m es el ingreso medio de los pobres; ahora, dado que I = 1 - m/z, se obtiene

$$P = H\left[1 + \frac{1-I}{q} - \frac{2}{q^2 z}(4Y_1 + 3Y_2 + 2Y_3 + Y_4)\right]$$

$$P = H\left[1 + \frac{1-I}{q} - \frac{2}{q^2 z}\left(1 + \frac{1}{q} - G\right)\frac{q^2 m}{2}\right]$$

$$P = H\left[1 + \frac{1-I}{q} - \left(\frac{m}{z}\right)\left(1 + \frac{1}{q} - G\right)\right]$$

$$P = H[1 - (1-I) + (1-I)G] = H(I + (1-I)G)$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Atkinson, A. 1970a. *Poverty in Britain and the Reform of Social Security*,Cambridge University Press, Cambridge.

Atkinson, A. 1970b. "On the Measurement of Inequality", *Journal of Economic Theory* 2, 244–263.

Bardhan, P. 1970. "On the Minimum Level of Living and the Rural Poor", *Indian Economic Review* 5.

Bardhan, P. 1971. "On the Minimum Level of Living and the Rural Poor: A Further Note", *Indian Economic Review* 6.

Batchelder, A. 1971. *The Economics of Poverty*, Wiley, Nueva York.

Black, D. 1958. *The Theory of Committee and Elections*, Cambridge University Press, Cambridge.

Borda, J. 1958. "Mémoire sur les élections au scrutin", *Histoire de L´Académie Royale des Sciences*. París, 1781; extractos traducidos al Inglés en Black, D. *The Theory of Committees and Elections*, Cambridge University Press, cap. XVIII, Cambridge.

Dandekar. V. y Rath, N. 1971. *Poverty in India*, Indian School of Political Economy, Poona.

Dasgupta, P., Sen, A. y Starrett, D. 1973. "Notes on the Measurement of Inequal-- ity", *Journal of Economic Theory* 6, 180–187.

Engels, F. 1969. *The Condition of the Working Class in England*, Panther, Londres.

Fine, B. y Fine, K. 1974. "Social Choice and Individual Ranking", *Review of Economic Studies* 41, 303–322, 459–475.

Fishburn, P. 1973. *The Theory of Social Choice*, Princeton University Press, Princeton, N. J.

Fisher, F. 1956. "Income Distribution. Value Judgements and Welfare", *Quarterly Journal of Economics* 70, 380–424.

Gärdenfors, P. 1973. "Positional Voting Functions", *Theory and Decision* 4, 1–24.

Gini, C. 1912. *Variabilitá e mutabilitá*, Bolonia.

Graaff, J. 1967. *Theoretical Welfare Economics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Hansson, B. 1973. "The Independence Condition in the Theory of Social Choice", *Theory and Decision*, 4. 25–50.

Kenen, P. y Fisher, F. 1957. "Income Distribution. Value Judgements and Welfare. A Correction", *Quarterly Journal of Economics* 71, 322–324.

Kolm, S. 1969. "The Optimal Production of Social Justice", Margolis, J. y Guitton, H., editores, *Public Economics*, Macmillan, Londres.

Minhas, B. 1970. "Rural Poverty, Land Redistribution, and Development", Indian *Economic Review* 5.

Minhas, B. 1971. "Rural Poverty and the Minimum Level of Living", *Indian Economic Review* 6.

Mukherjee, M., Bhattacharya, N. y Chatterjee, G. 1972. "Poverty in India: Measurement and Amelioration", *Commerce* 125.

Newbery, D. 1970. "A Theorem on the Measurement of Inequality", *Journal of Economic Theory* 2, 264–266.

Ojha, P. 1970. "A Configuration of Indian Poverty", *Reserve Bank of India Bulletin* 24.

Pattanaik, P. 1971. *Voting and Collective Choice*, Cambridge University Press, Cambridge.

Rothschild, M. y Stiglitz, J. 1973. "Some Further Results on the Measurement of Inequality", *Journal of Economic Theory* 6, 188–204.

Rowntree, B. 1901. *Poverty: A Study of Town Life*, Macmillan, Londres.

Runciman. W. 1966. *Relative Deprivation and Social Justice*, Routledge, Londres.

Sen, A. 1970a. "Interpersonal Aggregation and Partial Comparability," *Econometrica* 38. 393–409.

Sen, A. 1970b. *Collective Choice and Social Welfare*, Holden–Day, San Francisco.

Sen, A. 1972. "Interpersonal Aggregation and Partial Comparability", *Econometrica* 40. 959.

Sen, A. 1973a. *On Economic Inequality*, Clarendon Press, Oxford.

Sen, A. 1973b. "Poverty, Inequality, and Unemployment: Some Conceptual Issues in Measurement", *Economic and Political Weekly* 4, 1457–1464.

Sen, A. 1974. "Informational Bases of Alternative Welfare Approaches: Aggregation and Income Distribution", *Journal of Public Economics* 4, 387–403.

Sen, A. 1976. "Real National Income", *Review of Economic Studies* 43.

Sheshinski, E. 1972. "Relation between a Social Welfare Function and the Gini Index of Inequality", *Journal of Economic Theory* 4, 98–100.

Srinivasan, T. y Vaidyanathan, A. 1971. "Data on Distribution of Consumption Expenditure in India: An Evaluation," mimeo, ISI Seminar on Income Distribution, Nueva Delhi.

Theil, H. 1967. *Economics and information Theory*, Rand McNally, Chicago.

Townsend, P. 1954. "Measuring Poverty", *British Journal of Sociology* 5, 130–137.

Vaidyanathan, A. 1971. "Some Aspects of Inequalities in Living Standars in Rural India", mimeo, ISI Seminar on Income Distribution, Nueva Delhi.

Weisbrod, B., editor. 1965. *The Economics of Poverty*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.