
SEN Y LA ELECCIÓN COLECTIVA

Jorge Iván González

Profesor de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional.

Resumen

González, Jorge Iván, "Sen y la elección colectiva", Cuadernos de Economía, v. XVII, n. 29, Bogotá, 1998, páginas 163-183.

Entre Arrow y Sen hay dos tipos de ruptura. La primera, que coherente con las premisas fundantes de los teoremas de imposibilidad de Arrow, muestra que es factible encontrar procesos de elección colectiva consistentes, siempre y cuando se esté dispuesto a renunciar a la 'pureza' axiomática. La segunda coloca a Sen en un terreno muy diferente al de Arrow. Sen hace explícitas las bondades de las comparaciones interpersonales y no oculta sus simpatías por las medidas cardinales de utilidad y de bienestar. Muestra que si se acepta que un individuo j decide teniendo en cuenta el bienestar que experimentaría en el caso de encontrarse en la situación x de una persona i , no queda más remedio que hacer explícito el criterio de justicia que subyace a toda elección colectiva.

Abstract

González, Jorge Iván, "Sen and the Collective Choice", Cuadernos de Economía, v. XVII, n. 29, Bogotá, 1998, pages 163-183.

Between Arrow and Sen there are two types of rupture. The first, in coherence with the founding premises of the impossibility theorems of Arrow, shows that it is feasible to find consistent processes of collective choice, as long as one is willing to give up axiomatic "purity". The second places Sen on very different ground than Arrow. Sen makes explicit the goodness of interpersonal comparisons and does not hide his sympathies for cardinal measures of utility and welfare. He shows that if we accept that an individual j decides taking into account the welfare he would experience in the case of finding himself in situation x of a person i , then there is no other alternative than to make explicit the criterion of justice that underlies all collective choice.

PRESENTACIÓN GENERAL

La formalización de Arrow [1951, 1963] mostró que la teoría de la elección social conduce a un callejón sin salida. Piensa Van Parijs [1993, 73] que con Sen renació la esperanza porque a partir de su obra se han abierto nuevos caminos que permiten ir más allá del teorema de imposibilidad de Arrow. Sen amplía las fronteras diseñadas por Arrow. Pero, como el propio Sen lo reconoce, esta extensión implica introducir “impurezas” en los sistemas de elección colectiva. Así que para avanzar en la teoría de la elección no hay más remedio que dejar de lado el purismo axiomático

Mientras que la pureza es una virtud que no tiene complicaciones cuando se refiere al aceite de oliva, al aire marítimo, o a las heroínas de los cuentos costumbristas, sí presenta dificultades cuando se refiere a los sistemas de elección colectiva [Sen 1970, 200].

La complejidad de los sistemas de elección colectiva obliga a dejar de lado la perfección axiomática. En estas páginas me propongo un objetivo muy modesto: ofrecer un “mapa” que permita relacionar algunos de los teoremas de Arrow [1951, 1963] y de Sen [1970]. Dejo por fuera otros trabajos en los que los autores amplían o complementan sus ideas.

Sen propone salidas alternativas una vez que ha mostrado las limitaciones de los postulados de Arrow. No sólo acepta el reto teórico planteado por Arrow sino que, además, reconoce la pertinencia de su lenguaje axiomático. Y, desde esta perspectiva, tiene sentido afirmar que el trabajo de Sen se inscribe en la misma línea del de Arrow. No obstante, Sen [1970] marca rupturas significativas con respecto a Arrow [1951, 1963]. Destaco las siguientes:

- La explicitación de las comparaciones interpersonales de bienestar.
- La disposición a aceptar la validez de las medidas cardinales.

LAS DEFINICIONES BÁSICAS

$x R y$ es una relación binaria entre x, y .¹ La relación binaria puede especificarse sobre el conjunto S . R es un subconjunto de $S \times S$, que incluye todos los pares (x, y) , así que $x \& y \in S$. Afirmer que la relación $x R y$ existe, es equivalente a decir que $(x, y) \in R$. x, y son opciones alternativas. Arrow las llama "estados del mundo", porque considera que los objetos de la elección relevantes para la teoría de la elección social no son canastas de bienes sino dimensiones mucho más amplias. Sen está de acuerdo con esta perspectiva.²

R incluye las relaciones de preferencia (P) e indiferencia (I). Así que $x P y$ y significa que x es Preferido a y . $x I y$ significa que x es indiferente a y . Mientras no haya una aclaración expresa, R es una "relación de preferencia".

$$\langle S \rangle \text{ Definición 1*1. } x P y \leftrightarrow [x R y \& \sim (y R x)] \quad [1]$$

$$\langle S \rangle \text{ Definición 1*2. } x I y \leftrightarrow [x R y \& y R x] \quad [2]$$

Sen enumera las siguientes propiedades de las relaciones de preferencia (R).

$$\langle S \rangle \text{ Reflexividad: } \forall x \in S: x R x \quad [3]$$

$$\langle S \rangle \text{ Completitud: } \forall x, y \in S: (x \neq y) \rightarrow (x R y \vee y R x) \quad [4]$$

$$\langle S \rangle \text{ Transitividad: } \forall x, y, z \in S: (x R y \& y R z) \rightarrow x R z \quad [5]$$

$$\langle S \rangle \text{ Cuasi transitividad: } \forall x, y, z \in S: (x P y \& y P z) \rightarrow x P z \quad [6]$$

$$\langle S \rangle \text{ Aciclicidad: } \forall x_1, \dots, x_j \in S: \\ \{x_1 P x_2 \& x_2 P x_3 \& \dots \& x_{j-1} P x_j\} \rightarrow x_1 R x_j \quad [7]$$

$$\langle S \rangle \text{ Antisimetría: } \forall x, y \in S: (x R y \& y R x) \rightarrow x = y \quad [8]$$

$$\langle S \rangle \text{ Asimetría: } \forall x, y \in S: x R y \rightarrow \sim (y R x) \quad [9]$$

$$\langle S \rangle \text{ Simetría: } \forall x, y \in S: x R y \rightarrow y R x \quad [10]$$

A la segunda propiedad [4], Arrow la llama "conexión" y la define así:

$$\langle A \rangle \text{ Axioma I. } \forall x \& y: \vee x R y \vee y R x \quad [11]$$

-
- 1 Cuando no hay lugar a confusión sobre la notación de cada autor. En caso de conflicto he optado por la notación de Sen. Este principio se mantiene aún para las citas de Arrow. Para facilitar la lectura, simplifiqué las referencias. Cuando las referencias corresponden a Sen [1970] simplemente escribo «S». Cuando corresponden a Arrow [1951] escribo «A». Tanto en el caso de Sen como en el de Arrow si la definición tiene el número original evito la paginación.
 - 2 Además de Sen [1970], ver, por ejemplo, Sen [1997, 19].

Al generalizar el Axioma I [11] incluyendo el caso en el que $x = y$, se llega a la propiedad [3], o de reflexividad. Si se cumple [11] y si, además, $x = y$, entonces, $x R x$. Así que para Arrow la propiedad de 'conexión' significa 'conexión y reflexividad'.

El Axioma II de Arrow corresponde a la transitividad. Y la definición es igual a la de Sen [5].

CUADRO 1
PROPIEDADES Y NOMBRES DE LAS FUNCIONES
QUE LAS CUMPLEN

Reflexividad y transitividad	Cuasi orden [co]
Reflexividad, transitividad y completitud	Orden [o]
Reflexividad, transitividad y antisimetría	Orden parcial [op]
Reflexividad, transitividad, completitud y antisimetría	Cadena [c]
Transitividad y asimetría	Orden parcial estricto [ope]
Transitividad, asimetría y completitud	Orden fuerte [of]

Las propiedades anteriores constituyen el abc del 'álgebra' de la elección social. Cuando la relación de preferencia cumple una o más propiedades recibe nombres específicos. La columna del lado derecho del cuadro 1 incluye el nombre que le da Sen a las relaciones que cumplen las propiedades enunciadas en la columna izquierda.

UN PUNTO DE PARTIDA BÁSICO

Las propiedades de la función de elección social no son las mismas que las de la función de elección individual. El ejemplo más ilustrativo de esta divergencia es la llamada paradoja de la votación: la elección social que resulta de un proceso de votación no es transitiva a pesar de que la relación de preferencias de cada uno de los participantes sí sea transitiva.

Arrow y Sen aceptan que la relación que guía las elecciones individuales puede ser un orden [o] o un cuasi orden [co]. Mientras que el orden es completo [4], el cuasi orden no lo es (cuadro 1). El cuasi orden se presenta cuando al individuo no le interesa hacer comparaciones entre determinadas alternativas. Por ejemplo, para el individuo i es posible que no le interese definir su preferencia frente a dos equipos de fútbol. En tal caso, la relación de preferencia sería $\sim (x R_i y) \ \& \ \sim (y R_i x)$. No elige porque no le importa el fútbol. La posibilidad de que existan cuasi órdenes

aumenta a medida que las opciones van siendo mayores. La existencia de cuasi órdenes es legítima siempre y cuando el conjunto de elección no sea vacío. Téngase presente que la no comparabilidad es distinta a la indiferencia. Mientras que la relación de indiferencia es compatible con el orden, la no comparabilidad es una negación de la completitud y, por tanto, expresa un cuasi orden.

Desde el punto de vista de la elección social, como la llama Arrow, o de la elección colectiva, como la llama Sen, la falta de completitud es más problemática que en el caso de la elección individual. Aunque Sen deja abierta la posibilidad de que la elección social no sea completa, su discusión con Arrow gira alrededor de la transitividad de la función agregada.³ Sen introduce cambios significativos en la forma como se conciben las relaciones de orden cuando se aplican a las preferencias sociales. Para que exista elección colectiva, dice Sen, se requiere que la relación de preferencia social sea reflexiva y completa, pero la transitividad puede ser cambiada por propiedades menos exigentes como la aciclicidad [7] o la cuasi transitividad [6]. El cuadro 2 resume las diferencias entre Arrow y Sen.

CUADRO 2
PROPIEDADES QUE DEBEN CUMPLIR LAS ELECCIONES INDIVIDUALES Y SOCIALES

	Individual	Social (Arrow) – Colectiva (Sen)		Principio de racionalidad
Arrow	Orden o cuasi orden [o] \vee [co]	Orden [o]		Transitividad
Sen	Orden o cuasi orden [o] \vee [co]	Cuasi orden colectivo [coc]	<ul style="list-style-type: none"> • Reflexividad • Completitud • Aciclicidad (AC) \vee • cuasi transitividad (CT) 	Propiedad α

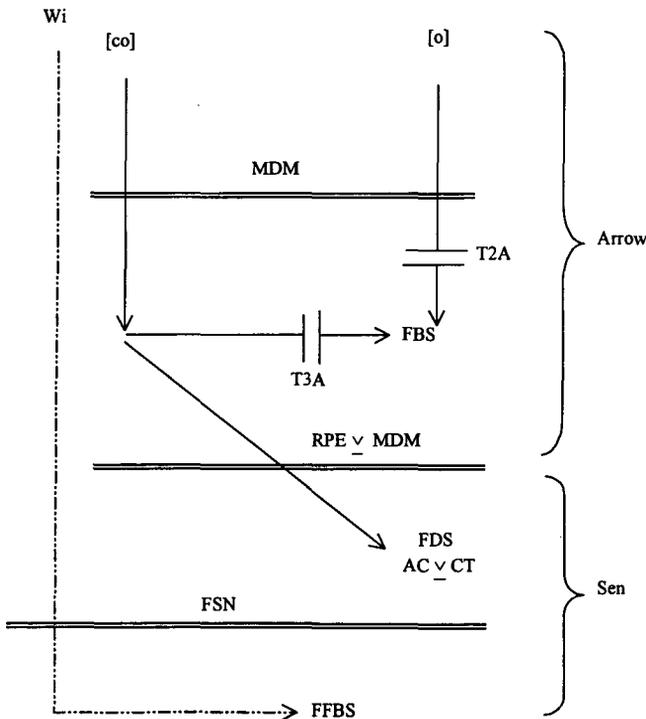
Al cambiar la transitividad por la aciclicidad o la cuasi transitividad, la elección colectiva de Sen deja de ser un orden social en el sentido de Arrow. Para evitar confusiones, mantendré el nombre de cuasi orden [co] para la relación de preferencias que cumple las propiedades definidas en el cuadro 1. En la esfera de la elección colectiva, llamaré cuasi orden colectivo [coc] a la relación que satisface las propiedades de reflexividad, completitud y aciclicidad o cuasi transitividad.

3 Al ampliar el margen de las impurezas, Sen [1970, 188] abre la posibilidad de que a nivel social no se rechace tajantemente el cuasi orden [co]. En muchas situaciones el cuasi orden "puede ser una guía útil para la elección colectiva".

Arrow [1951, 1963] habla de *elección social*. Y Sen [1970] de *elección colectiva*. La elección social expresada a través de la función de bienestar social de Arrow (FBS), es un caso particular de la elección colectiva que se traduce en la función de decisión social de Sen (FDS). Cuando el conjunto de alternativas de elección X es finito, la FBS es siempre una FDS. Pero cuando X es infinito, una FBS puede no ser una FDS [Sen 1970, 52]. Mientras que la FBS tiene que ser un orden [o], la FDS puede ser un cuasi orden colectivo [coc]. Al sacrificar la transitividad Sen obtiene un doble beneficio: logra que la elección colectiva sea consistente y, además, supera el nihilismo del teorema de imposibilidad de Arrow.

LA DESCRIPCIÓN DEL MAPA

GRÁFICA 1
ELECCIÓN SOCIAL - ELECCIÓN COLECTIVA



La gráfica 1 es un mapa del proceso que va de Arrow a Sen. La notación significa: W_i es la función de bienestar individual, [co] es un cuasi orden, [o] es un orden, MDM es el método de la decisión por mayoría, T2A es

el Teorema 2 de Arrow, T3A es el Teorema 3 de Arrow, FBS es la función de bienestar social de Arrow, RPE es la regla Pareto extendida de Sen, FDS es la función de decisión social de Sen, AC es aciclicidad, CT es cuasi transitividad, FSN es la función de la solución negociada de Sen, FFBS es el funcional de bienestar social de Sen.

Las dos primeras líneas gruesas horizontales representan reglas de elección colectiva (MDM y RPE). De arriba hacia abajo la línea MDM marca el paso de la elección individual a la elección social (o colectiva). El método de decisión por mayoría y la regla Pareto extendida son dos de las posibles reglas de elección colectiva. La última línea gruesa (FSN) corresponde a una lógica que no sigue los cánones de las reglas MDM y RPE.

Frente a Arrow, la ruptura de Sen es doble. La primera se produce al interior de la lógica paretiana y se expresa en lo que Sen llama la imposibilidad de un liberal paretiano, o el conflicto entre la libertad individual y el óptimo de Pareto.⁴ La segunda se realiza en un contexto en el que Sen se siente más autónomo y que le permite plantear de manera explícita la necesidad de comparaciones interpersonales de bienestar. En la gráfica este camino está marcado por la línea punteada y el FFBS.

Las flechas continuas de la gráfica indican que el punto de partida del análisis propuesto en estas páginas es el cuasi orden [co] y el orden [o] del cuadro 1. La flecha punteada, que será retomada posteriormente, representa la función de bienestar individual (W_i).

EL CUASI ORDEN ES COMPATIBLE CON UNA FUNCIÓN DE ELECCIÓN

El cuasi orden es compatible con una función de elección. Este principio formal es válido tanto para la elección individual como para la elección social. Sin embargo, la función de elección social debe ser completa. Esta idea es compartida por Arrow y Sen. Los autores centran la discusión sobre la transitividad y no sobre la completitud de la función agregada. Es mejor que la elección colectiva sea completa porque, a diferencia de los individuos, la sociedad sí debería definir sus preferencias sobre el conjunto de todas las alternativas posibles. Así que en el campo de la elección individual el cuasi orden tiene la ventaja, con respecto al orden, de que exige a la persona de establecer comparaciones entre todos los pares posibles. Esta dosis de realismo del cuasi orden se justifica siempre y cuando no genere conjuntos de elección vacíos. Por tanto, la relación de preferencias puede ser un cuasi orden (cuadro 1), pero no cualquier

4 El tema se amplía en Sen [1970b].

cuasi orden. Tanto Arrow (Definición 8) como Sen (Lema 1*f) muestran que el cuasi orden puede ser compatible con una relación de preferencia R.

En la formulación de Arrow,

«A» Definición 8: Se dice que R es compatible con Q si

- a) R es un ordenamiento débil;
- b) Q es un cuasi orden;
- c) $\forall x, y: x Q y \rightarrow x R y$;
- d) $\forall x, y: [x Q y \& \sim (y Q x)] \rightarrow \sim (y R x)$ [12]

El ordenamiento débil es el que admite además de las relaciones de preferencia, las de indiferencia. La premisa del numeral d) se deriva de una relación de asimetría [9].

Sen muestra en qué condiciones el cuasi orden es compatible con una función de elección. Define el conjunto de elementos maximales $M(S, R)$ y el de los mejores elementos $C(S, R)$.

«S» Definición 1*3. Un elemento x en S es un elemento maximal de S con respecto a una relación binaria R si y sólo si $\sim [\exists y: (y \in S \& y P x)]$

El conjunto de los elementos maximales en S es su conjunto maximal y se escribe $M(S, R)$. [13]

«S» Definición 1*4. Un elemento x en S es el mejor elemento de S con respecto a una relación binaria R si y sólo si $\forall y: (y \in S \rightarrow x R y)$

El conjunto de los mejores elementos en S es su conjunto de elección y se escribe $C(S, R)$. [14]

El mejor elemento también es un elemento maximal pero no al contrario. Así que $C(S, R) \subset M(S, R)$. Es obvio que la elección sólo es posible si existe un conjunto de elección $C(S, R)$.

Y volviendo atrás, el cuasi orden no desvirtúa la elección, ya que cualquier conjunto finito cuasi ordenado tiene al menos un elemento maximal (Lema 1*b de Sen). Y, además, si para un cuasi orden R, el conjunto de elección $C(S, R)$ no es vacío, éste es igual al conjunto maximal (Lema 1*d de Sen). Del conjunto de elección no vacío se desprende la función de elección (Definición 1*8 de Sen).

Para facilitar la diferenciación entre los niveles individual y social, introduciré subíndices. Desde el punto de vista de la persona i, el cuasi orden sería:

Para cualquier i, existe un cuasi orden si:

- a) $\forall x: x Q_i x$

$$b) \forall x, y, z: (x Q_i y \ \& \ y Q_i z) \rightarrow x Q_i z \quad [15]$$

La formulación [15] es un cuasi orden porque no necesariamente coloca al individuo frente a la disyuntiva $x Q_i y$ y $y Q_i x$. Obsérvese que b) de [15] deja abierta la posibilidad de que $y Q_i x$. Y en tal caso, la relación sería simétrica sin que sea completa.

Los criterios que se han definido para determinar la compatibilidad entre Q, R también son válidos para establecer la compatibilidad entre Q_i, R_i .

Los comentarios anteriores han mostrado las condiciones en las que un cuasi orden es compatible con una función de elección. Del cuasi orden Sen deriva las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned} \text{«S» Lema 1}^*a. \text{ Si } R \text{ es un cuasi orden, entonces } \forall x, y \in S \\ a) \ x I y \ \& \ y I z \rightarrow x I z \quad (\text{propiedad II}) \\ b) \ x P y \ \& \ y I z \rightarrow x P z \quad (\text{propiedad PI}) \\ c) \ x I y \ \& \ y P z \rightarrow x P z \quad (\text{propiedad IP}) \\ d) \ x P y \ \& \ y P z \rightarrow x P z \quad (\text{propiedad PP}) \end{aligned} \quad [16]$$

La propiedad d), que equivale a la cuasi transitividad [6], es fundamental porque marca la diferencia entre las funciones de bienestar social de Arrow y de decisión social de Sen.

TRANSITIVIDAD Y RACIONALIDAD

A lo largo de la reflexión ha sido claro que es posible que exista una elección individual aún cuando las relaciones de preferencias no sean completas. Pero las relaciones de preferencia individuales sí tienen que ser transitivas. La transitividad es una condición necesaria porque es constitutiva de la racionalidad individual. La elección tiene sentido si es racional. Así que para decidir no es suficiente con que exista un conjunto de elección no vacío $C(S, R)$. También se requiere que la elección sea racional.

Arrow y Sen definen la racionalidad de manera diferente. Para Arrow hay racionalidad en la elección si los ordenamientos R_i cumplen con las propiedades de reflexividad [11] y a la transitividad [5]. Sen examina la racionalidad a partir de lo que él llama las propiedades α, β .

$$\text{«S» Propiedad } \alpha: x \in S_1 \subset S_2 \rightarrow [x \in C(S_2) \rightarrow x \in C(S_1)], \forall x \quad [17]$$

Si algún elemento del subconjunto S_1 de S_2 es el mejor en S_2 , también es el mejor en S_1 . La definición del mejor elemento se hizo en [14].

$$\text{«S» Propiedad } \beta: [x, y \in C(S_1) \ \& \ S_1 \subset S_2] \rightarrow [x \in C(S_2) \leftrightarrow y \in C(S_2)], \forall x, y \quad [18]$$

Si x , y son los mejores elementos en S_1 , un subconjunto de S_2 , ninguno de los dos puede ser el mejor en S_2 sin que el otro también lo sea. La propiedad únicamente es satisfecha si R es PI transitiva [16].

En virtud de la propiedad α "... si el campeón del mundo en algún juego es pakistaní, entonces también debe ser campeón en Pakistán" [Sen 1970, 17]. De acuerdo con la propiedad β , "... si algún pakistaní es campeón del mundo, entonces todo campeón de Pakistán debe ser campeón del mundo" [Sen 1970, 17].

Piensa Sen (Lema 1*m) que la propiedad α es suficiente para que exista una elección racional. La propiedad β no se cumple cuando en su país los dos mejores pakistaníes siempre quedan empatados y , no obstante, uno de ellos llega a ser el campeón del mundo. Este resultado, que no cumple la propiedad β , no riñe con la racionalidad. La propiedad β es más severa que α , ya que la relación generada por una función de elección que satisface β es un orden. La FBS exige que la relación de preferencia sea un orden (cuadro 2). Por consiguiente, la propiedad β cumpliría este requerimiento de la FBS.

El criterio de racionalidad propuesto por Sen en la propiedad α [17] tiene un carácter incluyente que no está presente en la concepción de Arrow, quien asocia la racionalidad a la reflexividad y a la transitividad. Al ser menos exigente que β , α es compatible con la FDS que, a diferencia de la FBS, no implica la existencia de un orden. La FDS es un cuasi orden colectivo y , en este sentido, basta con que cumpla con la propiedad (cuadro 2).

LA REGLA DE ELECCIÓN COLECTIVA, EL MDM Y LA FBS

Regreso a la gráfica 1. La línea doble de la parte superior de la gráfica (señalada por MDM) marca el paso de las preferencias individuales a las preferencias sociales, de la elección individual a la elección social. Una de las formas de realizar esta transición es el método de la decisión por mayoría (MDM).

He presentado algunas definiciones que son relevantes para entender el paso de la elección individual a la elección social (Arrow) o la elección colectiva (Sen). Hasta este momento de la exposición, las diferencias entre Arrow y Sen apenas comienzan a insinuarse. Los distanciamientos son evidentes en el momento de plantear el proceso de elección social.

En el lenguaje de Sen, el paso de la elección individual a la elección colectiva es posible gracias a la regla de elección colectiva.

«S» Definición 2*1. Una regla de elección colectiva (REC) es una relación funcional f tal que para cada conjunto de ordenamientos individuales R_1, \dots, R_n (un ordenamiento para cada individuo), determina una y sólo una relación de preferencia social R , $R = f(R_1, \dots, R_n)$. [19]

Sen centra la atención en dos RECs: el método de decisión por mayoría (MDM) y la regla Pareto extendida (RPE). El MDM le permite a Sen dialogar directamente con Arrow porque es el método que éste privilegia en sus trabajos del 51 y el 63.

«S» Definición 5*1. El método de decisión por mayoría se sostiene si y sólo si
 $\forall x, y \in X: x R y \leftrightarrow [N(x P y) \geq N(y P x)]$
 donde $\forall a, b \in X$, $N(a P b)$ es el número de personas para quienes $a P b$. [20]

La principal característica del MDM es que las preferencias sociales entre x , y dependen únicamente de las preferencias individuales entre x , y .

Una vez definida la REC, Sen plantea una serie de postulados alrededor del principio paretiano, que lo llama "la vaca sagrada en la literatura sobre el bienestar social" [Sen 1970, 83]. Y aunque el principio de Pareto está en el "centro de los centros" [Sen 1970, 198], se comete un grave error cuando se pretende universalizarlo. Así que Sen reconoce, al mismo tiempo, la fuerza y las limitaciones del principio paretiano.

El óptimo de Pareto tiene dos problemas básicos: es un cuasi orden y no permite avanzar en los aspectos distributivos. De allí que no sirva para comprender el "ordenamiento individual extendido", que se presenta cuando la persona elige teniendo en cuenta, de alguna manera, a los otros. El ordenamiento individual extendido obliga a hacer comparaciones interpersonales, de utilidad o de bienestar.

Las relaciones de Pareto, marcadas por el sobre-índice P , son:

«S» Definición 2*3. $\forall x, y \in X$,
 a) $x R^P y \leftrightarrow [\forall i: x R_i y]$
 b) $x P^P y \leftrightarrow [x R^P y \& \sim (y R^P x)]$
 c) $x I^P y \leftrightarrow [x R^P y \& y R^P x]$ [21]

R^P es un cuasi orden (Lema 2*a de Sen). R^P va más allá de la elección individual, porque hace explícita "toda combinación lógicamente posible de las preferencias individuales". En el terreno de la elección colectiva los cuasi órdenes son muy problemáticos porque la REC resultante no es decisiva.

«S» Definición 2*2. Una regla de elección colectiva (REC) es decisiva si y sólo si su rango está restringido a relaciones de preferencia completas R . [22]

R^P puede ser compatible con [22] dada esta condición

«S» Lema 2*b. Una condición necesaria y suficiente para que R^P sea un orden y para que $R = R^P$ sea una regla de elección colectiva decisiva es que

$$\forall x, y \in X: [(\exists i: x P_i y) \rightarrow (\forall j: x R_j y)] \quad [23]$$

Sen ha realizado el ejercicio de mostrar que R^P no genera un conjunto vacío y por tanto es compatible con una función de elección. Ya están planteados los elementos básicos para entender las diferencias entre la FBS y la FDS. Gracias a [23] la pregunta por las condiciones de posibilidad de la elección social o colectiva ya es legítima.

En la gráfica 1 el paso de la elección individual a la elección social lleva a dos situaciones de imposibilidad: T2A y T3A. La última hace explícito, como punto de partida, el cuasi orden de la relación de preferencia individual. Por cualquiera de los dos caminos se advierte la imposibilidad de conseguir una FBS que sea un orden.

Sen presenta así la FBS de Arrow:

«S» Definición 3*1. Una función de bienestar social (FBS) es una regla de elección colectiva f , cuyo rango está restringido al conjunto de ordenamientos sobre X . Esta restricción es la condición O sobre f . [24]

Sen formula las condiciones que Arrow [1963] le impone a la función de bienestar. Recurre a la presentación del 63 porque esta versión incorpora las críticas que numerosos autores le hicieron al trabajo del 51.

— La condición U, o de dominio no restringido. El dominio de la regla f debe incluir todas las combinaciones lógicamente posibles de los ordenamientos individuales.

— La condición P, se refiere al principio de Pareto:

— La condición I, independencia de las alternativas irrelevantes.

— La condición D, de no dictadura. No existe un individuo i que logre imponer su criterio a los demás.

Arrow muestra que no existe una FBS que satisfaga las condiciones U, P, I y D. Los teoremas T2A y T3A son versiones del mismo resultado.

LA FUNCIÓN DE DECISIÓN SOCIAL DE SEN - FDS

Para salir del *impasse* planteado por Arrow, Sen propone la función de decisión social (FDS),

«S» Definición 4*1. "Una función de decisión social (FDS) es una regla de elección colectiva f , cuyo rango está restringido a aquellas relaciones de preferencia R , cada una de las cuales genera una función de elección $C(S, R)$ sobre el conjunto total de alternativas X . Esta restricción es la condición O^* sobre f . [25]

En el caso de la FDS, R es una relación de preferencia reflexiva y completa. Y en lugar de ser transitiva es cuasi transitiva (cuadro 2). La cuasi transitividad se define con respecto a P y la transitividad con respecto a R [5]. Al abrir la posibilidad a la cuasi transitividad [6], la FDS despeja el camino para ir más allá de la imposibilidad de Arrow.

«S» Teorema 4*1. Hay una FDS que satisface las condiciones U, P, I y D para cualquier conjunto finito X . [26]

Y, entonces, ya no hay imposibilidad. Sen va más lejos y muestra que aún introduciendo una regla de Pareto más fuerte todavía es posible encontrar una FDS. La formulación [26] únicamente requiere que se cumpla la propiedad α . Pero si a la FDS se le impone la propiedad β [18] como condición necesaria, entonces la FDS llevaría, como la FBS, a una situación de imposibilidad.

LA REGLA DE ELECCIÓN COLECTIVA Y LA RPE

La política pública es la expresión de la elección colectiva. Por esta razón, la elección colectiva tiene relación con la economía del bienestar, la teoría de la planeación y, en general, la economía pública. Y como estas dimensiones no están exentas de juicios de valor, las implicaciones éticas deben abordarse de manera explícita.

Se diferencia dos tipos de juicios de valor: los básicos y los no básicos. Los primeros se aplican "en cualquier circunstancia concebible". El individuo no los modifica en ninguna situación. Los otros juicios son no básicos. La distinción entre ambos tipos de juicios siempre es problemática. Mientras que puede demostrarse que algunos juicios de valor son no básicos, no hay manera de demostrar que un juicio de valor es básico.

La distinción entre juicios básicos y no básicos es necesaria para examinar hasta qué punto la persona está dispuesta a ceder en su posición con el fin de aceptar la elección colectiva. Los juicios básicos dificultan la elección social porque, en determinadas circunstancias, ésta exige que el individuo replantee su posición en aras de la decisión colectiva. Si alguien tiene un juicio básico y constata que su opinión será derrotada a través de alguna de las posibles reglas de elección colectiva, se opondrá a la aplicación de dicha regla.

Las consideraciones sobre la elección social son pertinentes cuando se aplican a los juicios que "tienden a ser no básicos" [Sen 1970, 70].

Para comprender mejor esta problemática, Sen introduce cuatro condiciones adicionales que son inspiradas en May: anonimato (A), neutralidad (N), respuesta positiva (S) y no respuesta negativa (NS). Y, además hace explícitas las implicaciones de la regla Pareto extendida.

«S» Definición 5*2. Para todos los pares (R_1, \dots, R_n) y (R'_1, \dots, R'_n) de n-tuplas de órdenes individuales en el dominio de una función de elección colectiva f , que los proyecta, respectivamente, en R y R' ,

a) Si (R_1, \dots, R_n) que es un reordenamiento de los componentes de (R'_1, \dots, R'_n) , implica que $\forall x, y \in X: x R y \leftrightarrow x R' y$, entonces y sólo entonces se mantiene el anonimato (condición A).

b) Si $\forall x, y, z, w \in X: [\forall i: x R_i y \leftrightarrow z R'_i w] \& [\forall i: y R_i x \leftrightarrow w R'_i z] \rightarrow [x R y \leftrightarrow z R' w] \& [y R x \leftrightarrow w R' z]$, entonces y sólo entonces se mantiene la neutralidad (condición N).

c) Si $\forall x, y \in X: [\forall i: \{(x P_i y \rightarrow x P'_i y) \& (x I_i y \rightarrow x R'_i y)\} \& \exists k: \{(x I_k y \& x P'_k y) \vee (y P_k x \& x R'_k y)\}] \rightarrow (x R y \rightarrow x P' y)$, entonces y sólo entonces se mantiene la respuesta positiva (condición S). [27]

Las condiciones U, A, N, S ocasionan dos situaciones de imposibilidad, tanto para la FBS (Corolario 5*1.1 de Sen) como para la FDS (Teorema 5*2 de Sen). La condición N implica la condición I. Ni la FBS, ni la FDS cumplen las condiciones U, A, N y S porque en ambos casos se viola la transitividad sin que ésta pueda reemplazarse por la aciclicidad o la casi transitividad.

Gracias a la condición de no respuesta negativa (NS) y a la RPE, es posible salir de este nuevo atolladero.

«S» Condición NS (no respuesta negativa). Para todos los pares (R_1, \dots, R_n) y (R'_1, \dots, R'_n) de n-tuplas de órdenes individuales en el dominio de una función de elección colectiva f , que los proyecta, respectivamente, en R y R' , la no respuesta negativa se mantiene si y sólo si

$$\forall x, y \in X: [\forall i: (x P_i y \rightarrow x P'_i y) \& (x I_i y \rightarrow x R'_i y)] \rightarrow [(x P y \rightarrow x P' y) \& (x I y \rightarrow x R' y)] \quad [28]$$

La regla de Pareto extendida afirma que los pares que no son Pareto comparables son socialmente indiferentes. Así que la falta de completitud del principio de Pareto se traduce en una situación social que es Pareto indiferente. MDM satisface la condición de respuesta positiva (S), mientras que RPE cumple la de no respuesta negativa (NS). El principio de respuesta positiva —compatible con el MDM— se traduce en una relación monótona entre las preferencias individuales y las sociales: si la utilidad del individuo mejora también mejora la de la sociedad.

Sen propone dos presentaciones de la RPE. Una es la regla débil Pareto extendida (RDPE). Y la otra es la RPE propiamente dicha.

«S» La regla débil Pareto extendida (RDPE) es una regla de elección colectiva tal que $\forall x, y \in X: x R y \leftrightarrow \sim (y P^{PP} x)$ [29]

P^{PP} es una versión de la relación estricta de Pareto más débil que P^P [21].

«S» Definición 2*4. $\forall x, y \in X, x P^{PP} y \leftrightarrow \forall i: x P_i y$ [30]

Al aplicar [30] a [29], la RDPE es

$\forall x, y \in X: x R y \leftrightarrow \sim (\forall i: y P_i x)$ [31]

Desde la perspectiva de la elección colectiva, $x R y$ gracias a que no es cierto que $\forall i: y P_i x$. Nótese que en el lado derecho se deja abierta la posibilidad para que haya pares no comparables. Esta no comparabilidad característica de un cuasi orden desaparece a nivel colectivo, ya que la elección colectiva asume que los pares que el individuo no compara son, por lo menos, socialmente indiferentes.

«S» La regla de Pareto extendida (RPE) es una regla de elección colectiva tal que $\forall x, y \in X: x R y \leftrightarrow \sim (y P^P x)$ [32]

Y aplicando [21] a [32],

$\forall x, y \in X: x R y \leftrightarrow \sim [y R^P x \ \& \ \sim (x R^P y)]$

$\forall x, y \in X: x R y \leftrightarrow \sim [(\forall i: y R_i x) \ \& \ \sim (\forall i: x R_i y)]$ [33]

[31] y [33] se caracterizan porque extienden el cuasi orden (no completo) de Pareto a la elección colectiva.

Y ahora sí es factible regresar a una situación que recupere la posibilidad de la elección colectiva. Y demuestra que la RPE es compatible con una REC que cumpla con las condiciones U, I, P, A (Teorema 5*3). Además, la RPE también satisface las condiciones N y NS.

LA IMPOSIBILIDAD DE UN LIBERAL PARETIANO

El anonimato (condición A) y la neutralidad (N) son compatibles con la independencia de las alternativas irrelevantes (I). Estas tres condiciones están muy cercanas al espíritu liberal. Sin embargo, el liberalismo tiene dificultades con el principio paretiano, ya que la escogencia con criterios liberales puede llevar a situaciones Pareto inferiores [Sen 1970, 1970 b].

Sen define las condiciones de liberalismo (L) y de liberalismo mínimo (L*). El liberalismo en sentido amplio implica que para *cada* persona i hay al menos un par de alternativas distintas (x, y), tal que el individuo

es decisivo en la elección social entre ellos en cualquier orden. Si el individuo escoge $x P_i y \rightarrow x P y$. Si la persona escoge $y P_1 x \rightarrow y P x$. Esta definición es problemática porque cuando se aplica a un sólo individuo, también sería consistente con una lógica dictatorial. Para evitar este tipo de ambigüedades, Sen propone la condición del liberalismo mínimo (L^*), que involucra al menos dos personas.

«S» Condición L^* (liberalismo mínimo). Hay al menos dos personas k, j y dos pares de alternativas distintas $(x, y), (z, w)$, tales que k, j son decisivos sobre $(x, y), (z, w)$, respectivamente. Cada par puede ser tomado en cualquier orden. [34]

Las condiciones P, L^* son incompatibles y por tanto no hay una FDS que satisfaga las condiciones U, P y L^* (Teorema 6*1 de Sen). Tampoco hay una FDS que satisfaga las condiciones U, P y L . La incompatibilidad entre el liberalismo mínimo y el principio de Pareto lleva a situaciones de imposibilidad.

LAS FUNCIONES DE BIENESTAR

Volviendo a la gráfica 1, la línea punteada del lado derecho expresa un tipo de preocupación muy diferente a la desarrollada hasta ahora. Sen se aleja de Arrow. Ya no está interesado en mostrar los límites de su axiomática. Abandona aquel utilitarismo que no admite comparaciones interpersonales y adopta en una lógica claramente contractualista. Ahora Sen no parte de la función de utilidad sino la función de bienestar individual.

La primera ruptura de Sen con Arrow termina con la afirmación de la imposibilidad de un liberal paretiano. La segunda ruptura es más profunda. Ya no se trata solamente de hacer explícitas contradicciones tales como la del liberal paretiano, sino de modificar el punto de partida, el campo de la elección y los procedimientos. El punto de partida es la función de bienestar de la persona. La elección se realiza en un contexto en el que las comparaciones interpersonales son fundamentales. Y desde la perspectiva procedimental, hace explícito el contrato.

X es el conjunto de estados sociales alternativos x . Cada individuo i tiene un conjunto L_i , de funciones de bienestar (W_i) con una valoración real. Los W_i se definen sobre X .

El bienestar individual está medido de manera ordinal si "cada elemento de L_i es una transformación monótona y positiva de cualquier otro elemento" [Sen 1970, 105]. Está medido cardinalmente si "cada elemento de L_i es una transformación lineal positiva de cualquier otro elemento" [Sen 1970, 105].

Sen no se amarra a la ordinalidad. Admite la cardinalidad. De todas maneras, y dependiendo de los propósitos, habrá que lograr un compromiso entre ambas aproximaciones [Sen 1976, 385]. Si la generalización que permite la ordinalidad no sacrifica las comparaciones interpersonales, la ordinalidad podría ser preferida a la cardinalidad. Pero Sen no convierte este principio en una camisa de fuerza.

«S» Definición 7*1. Una combinación funcional, W , es cualquier elemento del producto cartesiano $\prod_{i=1}^n L_i$, denotado L . [35]

En esta definición Sen introduce las comparaciones interpersonales de bienestar de manera explícita. Sea L^{CI} un subconjunto de L , $L^{CI} \subseteq L$. El índice superior CI explicita el hecho de que L admite comparaciones interpersonales. Cada elemento de L^{CI} representa la suma de las diferencias del bienestar individual entre cualquier par $x, y \in X$. Finalmente, $x \succ R^\alpha y$ significa que el bienestar agregado en el estado x es preferido o indiferente al bienestar agregado en el estado y .

El uso de funciones de bienestar individual plantea tres problemas: la medida del bienestar individual, la comparación interpersonal del bienestar de los individuos y la forma de la función de bienestar que exprese las relaciones de preferencias sociales, dadas unas funciones de bienestar individuales.

Sen diferencia entre la no comparabilidad, la plena comparabilidad y la comparabilidad unitaria.

«S» Definición 7*3.

- a) La no comparabilidad se mantiene si y sólo si $L^{CI} = L$.
- b) La plena comparabilidad se mantiene si y sólo si W^{CI} que es un elemento cualquiera de L^{CI} implica que L^{CI} incluye únicamente todas las combinaciones funcionales W tal que $\forall i$,
 $W_i = a + bW_i^{CI}$, donde $a, b > 0$, son constantes e invariantes con i .
- c) La comparabilidad unitaria se mantiene si y sólo si W^{CI} que es un elemento cualquiera de L^{CI} implica que L^{CI} incluye únicamente todas las combinaciones funcionales W tal que $\exists i$,
 $W_i = a_i + bW_i^{CI}$, donde a_i puede variar con i , pero $b > 0$, debe ser invariante con respecto a i . [36]

Cuando hay plena comparabilidad pueden establecer comparaciones uno a uno entre el bienestar de los diferentes individuos. La comparabilidad unitaria establece como parámetro de referencia el bienestar de uno de los individuos.

La función de la solución negociada (FSN), que es la última línea horizontal de la gráfica 1, hace explícita la negociación —el contrato— como una forma de pasar de la función de bienestar individual al ordenamiento social. El modelo de Nash es una de las posibles FSN, así que las soluciones de equilibrio ya no tienen que ser Pareto óptimas.

«S» Definición 8*1. Una función de la solución negociada (FSN) es una relación funcional que escoge uno y sólo un estado social $x^c \in X$, par cualquier combinación funcional $W \in L$, dada la relevancia del estado social $x^q \in X$ que representa el status quo. [37]

El status quo es el punto de referencia de la comparación. La conveniencia del contrato se decide a partir de la situación actual.

«S» Definición 8*2. El funcional de bienestar social (FFBS) es una relación funcional que especifica uno y sólo un ordenamiento social R sobre X , para cualquier W , i.e., para cualquier n -tupla de funciones de bienestar individual W_1, \dots, W_n , cada una definida sobre X . [38]

La FBS es un caso especial de la FFBS y, como sucede con aquélla, aquí también se presenta un teorema de imposibilidad. A este resultado se llega cuando se postula la no comparabilidad y la independencia de alternativas irrelevantes. Pero el problema desaparece cuando se abre la puerta a las comparaciones interpersonales.

Para formalizar las comparaciones interpersonales, Sen propone la relación (x, i) , que se lee: estar en la posición del individuo i en el estado x . Esta presentación transparenta las comparaciones interpersonales. Corresponde a la "simpatía extendida". El ordenamiento individual extendido es R^{EX} . La elección individual tiene en cuenta, de manera explícita, la forma como cada persona percibe el bienestar del otro.

«S» Definición 9*2. R^{EX} es el ordenamiento del i ésimo individuo definido sobre el producto cartesiano de X y H , siendo X el conjunto de los estados sociales y H el conjunto de los individuos. [39]

De esta manera las comparaciones interpersonales están incluidas directamente en R^{EX} .

«S» Definición 9*4. Una regla de elección colectiva general (RECG) es una relación funcional que especifica una y solamente una relación de preferencia social R sobre un conjunto de estados sociales X , para cualquier n -tupla de ordenamientos $(R^{EX}_1, \dots, R^{EX}_n)$, donde cada R^{EX}_i es un ordenamiento sobre el producto X y H . [40]

Con estos elementos ya es factible formalizar diversos postulados de justicia, como el maximin (M) de Rawls,

«S» Definición 9*5.

Para todo par $x, y \in X$, $x M y \leftrightarrow [\exists k: \{\forall i: (x, i) R^{EX}(y, k)\}]$ [41]

Si no existe nadie en el estado x peor que el individuo k en el estado y , entonces x es al menos tan justo como y . El camino propuesto por Rawls es uno entre los muchos que se derivan de la RECG. El abanico de soluciones a los diversos teoremas de imposibilidad se amplía cuando se introducen las comparaciones interpersonales de utilidad, los diversos grados de comparabilidad y la cardinalidad.

¿EL ABANDONO DE LA FBS?

En la sección titulada "abandono de la Función de Bienestar Social (FBS)", Cuevas [1998, 109-110] muestra que la teoría ha ido abandonando la FBS de Arrow. Y señala tres caminos alternativos: 1) El de Sen, quien "demostró que las condiciones paretianas podrían interferir con los derechos individuales", 2) el de Nozick, para quien la FBS no logra recoger "el proceso de formación (o negociación) de derechos individuales, así como las interacciones de dicho proceso con otros valores sociales y otros elementos del bienestar, 3) el de la "economía constitucional", que "busca extirpar no sólo el concepto de una FBS sino la sustancia misma que da vida a tal concepto, es decir, la noción como tal de bienestar social".

La referencia que hace Cuevas a Sen correspondería a lo que he llamado la primera ruptura. La segunda ruptura, que señala el derrotero de los trabajos de Sen de los años ochenta y noventa, no es mencionada por Cuevas. El distanciamiento de Arrow le permite a Sen avanzar en dos direcciones: de un lado, en la construcción de índices de pobreza y desigualdad y, de otra parte, en la adecuación de estos índices a la formulación de las políticas públicas que, finalmente, son la expresión de una elección social.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arrow, K. 1951. *Social Choice and Individual Values*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1963, hasta la pág. 91.
- Arrow, K. 1963. *Social Choice and Individual Values*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1963, desde la pág. 92.
- Cuevas, H. 1998. *Proceso Político y Bienestar Social*, Universidad Externado de Colombia.
- Sen, A. 1970. *Collective Choice and Social Welfare*, Elsevier, Amsterdam.

- Sen, A. 1970b. "The Impossibility of a Paretian Liberal", *Journal of Political Economy*, 78, febrero, 152-157. Reproducido en *Choice, Welfare and Measurement*, 1982, Harvard University Press, 1997, 285-290.
- Sen, A. 1976. "Poverty: An Ordinal Approach to Measurement", *Econometrica* 44, 2, 219-231. Reproducido en *Choice, Welfare and Measurement*, 1982, Harvard University Press, 1997, 373-387.
- Sen, A. 1997. "Individual Preference as the Basis of Social Choice", Arrow, K.; Sen, A.; Suzumura, K., editores, *Social Choice Re-examined*, International Economic Association, IEA, vol. I, 15-38.
- Van, Parijs P. 1993. "Amartya Sen", Van Parijs P, editor, *Ni Ghetto ni Tour D'Ivoire. L'Éthique Économique et Sociale Aujourd'hui*, Academia, Louvain-la-Neuve, Bélgica, 72-76.