EL MODELO DE GENERACIONES TRASLAPADAS COMO MODELO MONETARIO

Francisco Lozano G.,
Edgar Villa P., Sergio Monsalve G.

Edgar Villa es profesor de economía en la Universidad Externado de Colombia. Francisco Lozano y Sergio Monsalve son Profesores en la Universidad Nacional de Colombia, en los departamentos de Teoría y Política Económica y Matemáticas y Estadística, respectivamente.

Resumen

Francisco Lozano G., Edgar Villa P. y Sergio Monsalve G. "El modelo de generaciones traslapadas como modelo monetario", ***Cuadernos de Economía*****, v. XVI, n. 27, Bogotá, 1977, páginas 91-111.**

En este artículo se presenta el modelo básico de generaciones translapadas de intrecambio puro y se introduce el modelo OLG monetario. Se examinan las condiciones que garantizan la existencia de equilibrios bajo expectativas racionales y sus características de optimalidad, y se describen las tendencias actuales en la literatura reciente sobre los desarrollos del modelo OLG como modelo monetario.

Abstract

Francisco Lozano G., Edgar Villa P. y Sergio Monsalve G. "The general equilibrium model: static or sterile?", ***Cuadernos de Economía*****, v. XVI, n. 27, Bogotá, 1977, pages 91-111.**

This article introduces the basic overlapping generations model (OLG) of pure exchange and the OLG model with fiat money. It examines conditions under what rational expectations equilibria do exist, and studies the properties of optimality of those equilibria. Furthermore, it describes the recent tendencies in the economic literature about the developments of the OLG model as a monetary model.

INTRODUCCIÓN

En Lozano *et al.* [1997b] se mostró que una economía competitiva del tipo Arrow-Debreu (A-D) no permite incorporar el dinero en forma satisfactoria, aun bajo incertidumbre. Se mostró, además, que en un formato de equilibrio general, el dinero debería estudiarse en un contexto *dinámico*. El modelo de equilibrio general walrasiano o competitivo en un marco verdaderamente dinámico es, sin lugar a dudas, el modelo de Generaciones Traslapadas (OLG) de Samuelson [1958]. Por tal razón, a veces se lo denomina *modelo Arrow-Debreu dinámico* [Wallace 1980].

Samuelson [1958] elaboró un modelo que postulaba una estructura demográfica en la que se traslapan dos generaciones: "jóvenes" y "viejos". En este mundo, los agentes económicos (consumidores) interactúan entre sí a lo largo de su ciclo de vida. Cuando son jóvenes comercian con agentes viejos, y cuando viejos, con agentes jóvenes. Este modelo es intertemporal pues el tiempo está dividido en períodos discretos; el intervalo básico es el que transcurre entre el nacimiento de una generación y la siguiente, y no existe un período final para la economía. Aquí se considera un modelo con una población constante y sin herencias donde cada generación está conformada por un "consumidor representativo" que vive dos períodos. Así, en un punto en el tiempo, la economía está compuesta por dos generaciones: la joven y la vieja; es decir, por un agente joven y uno viejo. Existe una mercancía perecedera única, de la que cada agente tiene una dotación *exógenamente* determinada. Cuando la economía se considera en su conjunto, es decir, a través del tiempo, el número de agentes y de mercancías es infinito.

Período	t	t + 1	t + 2	t + 3	t + 4 ...
Gen. 1	joven	viejo			
Gen. 2		joven	viejo		
Gen. 3			joven	viejo	
Gen. 4				joven	viejo
.					
.					
.					

El modelo OLG es un modelo walrasiano en cuanto cada consumidor maximiza una función de utilidad y los mercados se vacían en cada período. Sin embargo, *los precios no están dados* sino que están determinados endógenamente por la actividad económica. Y aunque la noción de equilibrio es, en esencia, la de un equilibrio walrasiano dentro de una estructura dinámica, la existencia de un número infinito de consumidores y mercancías junto con el traslapo de generaciones producen diferencias esenciales entre el modelo OLG y el modelo Arrow-Debreu:

1. Debreu [1970] probó que en condiciones adecuadas (las funciones de exceso de demanda son diferenciables con respecto a los precios y a la distribución de los recursos; la norma del vector de las funciones de exceso de demanda tiende a infinito cuando un precio cualquiera tiende a cero) el conjunto de economías que no poseen equilibrios localmente únicos tiene una medida igual a cero dentro del conjunto de economías A-D. Por su parte, *las economías OLG poseen un continuo de equilibrios determinísticos.*

2. Como se dijo antes, el modelo A-D no permite incorporar el dinero en forma satisfactoria, aun bajo incertidumbre: el dinero presenta un *valor positivo indeterminado.* Sin embargo, veremos que uno de los equilibrios determinísticos del modelo de generaciones traslapadas es el estado monetario estacionario en el que *el dinero legal mantiene un valor positivo constante para siempre y está determinado en forma endógena.*

3. El Primer Teorema de la Economía del Bienestar asegura que los equilibrios de la economía A-D son óptimos de Pareto en las condiciones usuales: convexidad de los conjuntos de consumo y de las preferencias e insaciabilidad local alrededor de los consumos de equilibrio. Aun si se imponen estas condiciones, *un equilibrio de una economía de generaciones traslapadas puede no ser óptimo de Pareto.* Esto podría obedecer a que no existe un activo que permita ahorrar entre períodos e incrementar la utilidad de las generaciones.

4. Debreu y Scarf [1963] mostraron que el equilibrio de una economía A-D pertenece al núcleo de cualquier replicación de la economía. Geanakoplos [1987] mostró que el núcleo de una economía de generaciones traslapadas puede ser vacío.

Todas estas diferencias sugieren que *pese a que la concepción de los modelos A-D y de generaciones traslapadas es walrasiana, su naturaleza es distinta: el primero es estático mientras que el segundo es dinámico.*

EL MODELO OLG DE INTERCAMBIO PURO

El modelo de Generaciones Traslapadas puede, en general, caracterizarse así:

1. Existe un número infinito contable de consumidores $H = \{1, 2,...\}$. Los elementos h H son los índices de los consumidores; c_y^h es el consumo del consumidor h cuando es joven y c^{oh} el consumo del consumidor h cuando es viejo. El h-ésimo consumidor elige un plan de consumo $c^h = (c^{yh}, c^{oh})$ en su conjunto de consumo X^h. Se supone que para todo $h \in H$, X^h es cerrado, convexo y tiene una cota inferior para $\leq$.
2. La función de utilidad (ordinal) del h-ésimo consumidor es

   $U^h : X^h \rightarrow \mathbf{R}$

tal que U^h es aditivamente separable, monótona creciente, cóncava estricta y doblemente diferenciable con continuidad. Es decir, U^h es de la forma

$$U^h(c^{yh}, c^{oh}) = U^h(c^{yh}) + \beta U^h(c^{oh}), \text{ para todo } h \in H$$

donde $\beta \in (0,1)$, $U'(\bullet)$ 0, y $U''(\bullet) < 0$ y continua. β es el *coeficiente de impaciencia*, es decir, β "cercano a 0" significa que el consumidor es "muy impaciente" y β "cercano a 1" significa que el consumidor es "paciente".

Para dar una estructura temporal a este modelo, suponemos que cada consumidor h elige un consumo para el período *t* cuando es joven y un consumo para el período *t* +1 cuando es viejo, c_t^{yh} y c_{t+1}^{oh}, respectivamente. Suponemos, además, que la población no crece y que existe una mercancía perecedera agregada para consumo.

3. Cada consumidor recibe dotaciones w^y cuando es joven y w^o cuando es viejo, donde w^y w^o; es decir, suponemos que la dotación es mayor cuando es joven que cuando es viejo.

Por razones de exposición, en adelante supondremos que sólo existe un *agente representativo* en la economía. Así, $U^h = U$, $c_t^{yh} = c_t^y, c_t^{oh} = c_t^o$, para todo h[1].

1 Aunque pueda creerse, en primera instancia, lo contrario, esta hipótesis no altera sustancialmente los resultados aquí obtenidos.

Definición 1 (Economía OLG de Intercambio Puro). Una Economía de Generaciones Traslapadas de Intercambio Puro G es una cuátrupla (H, U^h, w^{yh}, w^{oh}) donde H es el conjunto de consumidores, U^h es la función de utilidad del h-ésimo consumidor, y c^{yh} y c^{oh} son el consumo del h-ésimo consumidor cuando es joven y cuando es viejo, respectivamente.

El problema de la existencia de un equilibrio y equilibrios autárquicos

Como todos los consumidores tienen la misma función de utilidad y las mismas dotaciones iniciales cuando son jóvenes y viejos, el problema de encontrar un equilibrio de la economía G consiste en resolver el siguiente problema del consumidor representativo:

$$\max_{c_t^y;\, c_{t+1}^o} U(c_t^y, c_{t+1}^o) = U(c_t^y) + \beta U(c_{t+1}^o)$$

sujeto a:

$$p_t c_t^y + p^e_{t+1} c_{t+1}^o = w^y p_t + w^o p^e_{t+1}$$

$$c_t^y + c_t^o = w^y + w^o$$

Dado los precios p_t y p^e_{t+1}, el agente representativo maximiza su utilidad intertemporal dada su restricción presupuestal intertemporal y la restricción de factibilidad. Suponemos que el agente representativo tiene *expectativas racionales* y, por tanto, perfecta previsión: el precio esperado del período en que es viejo es igual al precio que regirá en ese período, es decir, $p^e_{t+1} = p_{t+1}$.

Las condiciones suficientes y necesarias para la existencia de una solución a este problema son:

$$U'(c_t^y)/U'(c_{t+1}^o) = \beta p_t / p_{t+1} \qquad [1]$$

$$p_t c_t^y + p_{t+1} c_{t+1}^o = p_t w^y + p_{t+1} w^o \qquad [2]$$

$$c_t^y + c_t^o = w^y + w^o \qquad [3]$$

Definición 2. Una asignación (c_t^y, c_{t+1}^o) se denomina *autárquica* si $c_t^y = w^y$ y $c_{t+1}^o = w^o$, para todo $t \geq 0$, es decir, una asignación es autárquica si los consumos planeados por cada generación son iguales a las dotaciones iniciales respectivas para cada período.

Definición 3. Si el precio del consumo en la generación *t* es igual al precio del consumo en la generación *t*+1 se dice que hay *arbitraje de precios*, es decir, $p_t = p_{t+1}$ para todo $t \geq 0$.

Definición 4 (Equilibrio de una Economía OLG de Intercambio Puro). Un Equilibrio de la Economía **G** se define como un conjunto de sucesiones

$$\{p_t\}^{\infty}_{t=0}, \quad \{c_t^y\}^{\infty}_{t=0}, \quad \{c_t^o\}^{\infty}_{t=0}, \quad p_t > 0, \qquad c_t^y \geq 0, \qquad c_t^o \geq 0$$

que satisface las ecuaciones [1], [2] y [3]. Es decir, un equilibrio para **G** es el conjunto de sucesiones de precios y consumos de las generaciones jóvenes y viejas tal que cada consumidor maximiza su utilidad sobre su conjunto presupuestal y hay equilibrio de mercado.

Teorema 1 (Existencia de Equilibrios para una Economía OLG de Intercambio Puro). En condiciones de no arbitraje en precios, y $c_0^o = w^o$, $c_0^y = w^y$, el único equilibrio de la Economía **G** es la autarquía; es decir, en equilibrio no hay intercambio.

Prueba. Veamos cómo son, en general, las soluciones a estas ecuaciones para luego caracterizar los Equilibrios no monetarios de esta economía. Como, en equilibrio, las funciones de demanda, $c_t^y(p_t, p_{t+1})$, y $c_t^o(p_t, p_{t+1})$ para todo *t*, son homogéneas de grado cero en precios, se puede definir $\lambda = p_{t+1}/p_t$.

Remplazando [3] en [2] tenemos,

$$w^o p_t - p_t c_t^o + p_{t+1} c_{t+1}^o = w^o p_{t+1}$$

Luego

$$c_{t+1}^o - c_t^o/\lambda = w^o(1 - 1/\lambda) \qquad [4]$$

La solución de esta ecuación en diferencias es

$$c_t^o = w^o - \mu/\lambda^t \qquad \text{para } \mu \in \mathbf{R} \qquad [5]$$

Reemplazando en [3] se obtiene

$$c_t^y = w^y + \mu/\lambda^t \qquad [6]$$

Las soluciones (bajo no arbitraje) de [1], [5] y [6] son:

Si $\lambda > 1$ entonces, de acuerdo con las condiciones iniciales $c_0^o = w^o$, $c_0^y = w^y$, tenemos que $\mu = 0$. Luego $c_t^y = w^y$, y, $c_t^o = w^o$ para todo *t*, por lo que de [1], λ se encuentra resolviendo

$$\lambda = \beta\, U'(w^o)/U'(w^y) \quad \text{y} \quad p_{t+1} = \lambda\, p_t$$

En conclusión, bajo no arbitraje, el único Equilibrio puede caracterizarse así:

a) $p_o > 0$ fijo (condición inicial)

b) $c_0^o = w^o$, $c_0^y = w^y$

c) $p_t = p_o (\beta\, U'(w^o) / U'(w^y))^t$

d) $c_t^y = w^y$, $c_{t+1}^o = w^o$, para todo *t*

Ejemplo 1. El siguiente ejemplo ilustra que el equilibrio de una economía G es en realidad el equilibrio autárquico.

Consideremos la siguiente Economía de Generaciones Traslapadas de Intercambio Puro G donde todos los consumidores tienen la función ordinal de utilidad y dotaciones iniciales siguientes:

$$U(c_t^y, c_{t+1}^o) = (c_t^y)^{1/2} + \beta(c_{t+1}^o)^{1/2}$$

$$w = (w^y, w^o) = (2, 1)$$

El problema del consumidor representativo es:

$$\max_{c_t^y,\, c_{t+1}^o} (c_t^y)^{1/2} + \beta(c_{t+1}^o)^{1/2}$$

sujeto a $p_t c_t^y + p_{t+1} c_{t+1}^o = 2p_t + p_{t+1}$

Las funciones de demanda son:

$$c_t^y = (p_{t+1}^2 + 2p_t p_{t+1}) / (p_t p_{t+1} + \beta^2 p_t^2)$$

$$c_{t+1}^o = \beta^2 (p_t p_{t+1} + 2p_t^2) / (\beta^2 p_t p_{t+1} + p_{t+1}^2)$$

La condición para que el mercado se vacíe es $c_t^y + c_t^o = 3$. Tomando $\lambda = p_{t+1}/p_t$, la solución general es de la forma:

$$p_t = \gamma_1 + \gamma_2 (-2^{1/2}\beta)^t + \gamma_3 (2^{1/2}\beta)^t \qquad \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbf{R}$$

Bajo no arbitraje, $\gamma_1 = 0$.

Si $\lambda = -2^{1/2}\beta$, $p_{t+1}/p_t = -2^{1/2}\beta < 0$. Por tanto, supondremos $\gamma_2 = 0$ porque los precios son no negativos por hipótesis.

Entonces, el Equilibrio de la Economía G es, para $t \geq 0$,

$$p_t = p_0 (2^{1/2}\beta)^t$$

$$c_t^y = (p_{t+1}^2 + 2p_t p_{t+1}) / (p_t p_{t+1} + \beta^2 p_t^2)$$

$$c_{t+1}^o = \beta^2 (p_t p_{t+1} + 2p_t^2) / (\beta^2 p_t p_{t+1} + p_{t+1}^2)$$

En este Equilibrio *no monetario,* los agentes consumen todas sus dotaciones en el período correspondiente, como se observa al evaluar las funciones de demanda en $p_t = p_0(2^{1/2}\beta)^t$:

$$c_t^{y*} = (2\beta^2 + 4\beta)/(\beta^2 + 2\beta) = 2$$

$$c_t^{o*} = (2^{1/2}\beta^3 + 2\beta^2)/\ (2^{1/2}\beta^3 + 2\beta^2) = 1$$

Los consumos de cada generación son iguales a sus dotaciones iniciales; es decir, no hay intercambio entre generaciones porque no existe un bien durable (un activo) que les permita ahorrar de un período a otro.

Equilibrios autárquicos vs. óptimos de Pareto

Definición 5. En una Economía **G** = (H, U^h, w^y, w^o), diremos que una asignación factible, c^H, *domina, en el sentido de Pareto,* a otra, c'^H, si y sólo si

$$U^h(c^{yh}) + \beta U^h(c^{oh}) \geq U^h(c'^{yh}) + \beta U^h(c'^{oh}) \quad \text{para todo } h \in H,$$

con alguna desigualdad estricta. Una asignación es *óptima de Pareto* si y sólo si es factible y no existe ninguna asignación factible que la domine en el sentido de Pareto.

Quizás una de las características más notables del modelo OLG de Intercambio Puro es que, en general, el equilibrio autárquico no es óptimo de Pareto, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. Veremos que la distribución intergeneracional de autarquía del ejemplo 1

Gen 1 $\longrightarrow$ (2, 1)
Gen 2 $\longrightarrow$ (2, 1)
Gen 3 $\longrightarrow$ (2, 1)

. . .
. . .
. . .

no es óptima de Pareto. Para ello, consideremos la siguiente distribución intergeneracional

Gen 1 $\longrightarrow$ (2, 3/2)
Gen 2 $\longrightarrow$ (3/2, 3/2)
Gen 3 $\longrightarrow$ (3/2, 3/2)

. . .
. . .
. . .

Esta distribución es un equilibrio de mercado, es decir, $c_t^y + c_t^o = w^y + w^o$, para todo *t*. Para un β suficientemente cercano a uno ($\beta \geq 0.85$) se tiene que

$$\text{Gen 1: } U(2, 1) = 2^{1/2} + \beta(1)^{1/2} < U(2, 3/2) = 2^{1/2} + \beta\,(3/2)^{1/2}$$

$$\text{Gen 2: } U(2, 1) = 2^{1/2} + \beta(1)^{1/2} \leq U(3/2, 3/2) = (3/2)^{1/2} + \beta\,(3/2)^{1/2}$$

Por tanto, el equilibrio (p_t^*, c_t^{y*}, c_t^{o*}) no es óptimo de Pareto.

EL MODELO OLG MONETARIO

Suponemos que la Economía de Generaciones Traslapadas funciona con dinero legal sin respaldo (*fiat money*) aceptado por convención; es decir, con un dinero que no está respaldado por las dotaciones iniciales de la economía, pero que es emitido por una autoridad monetaria, y que todos los consumidores aceptan para realizar sus transacciones en su ciclo de vida. En Lozano *et al.* [1997b] se mostró que los agentes de una economía A-D no tenían ningún motivo para mantener saldos de dinero al final del período, aun siendo dinero *inside*. La introducción de dinero legal en esta economía era demasiado artificial puesto que el dinero no se encontraba en la función de utilidad de los consumidores y no se consideraba la posibilidad de que la economía se repitiera en el futuro. En la Economía de Generaciones Traslapadas, que posee una estructura dinámica, se mostrará que *aunque el dinero no está respaldado por las dotaciones iniciales, los agentes tienen un motivo para ahorrar dinero.* Es plausible, entonces, suponer que los agentes aceptan dinero legal emitido por la autoridad monetaria para realizar sus transacciones.

Definición 6 (Economía OLG Monetaria). Una Economía OLG Monetaria **GM** es una Economía OLG con dinero legal.

El problema de la existencia de un equilibrio y equilibrios indeterminados

Como todos los consumidores tienen la misma función de utilidad y las mismas dotaciones iniciales cuando son jóvenes y viejos, el problema de encontrar un equilibrio de la economía **GM** consiste en resolver el siguiente problema del consumidor representativo:

$$\max_{s_t} \; U(c_t^y, c_{t+1}^o) = U(c_t^y) + \beta U(c_{t+1}^o)$$

sujeto a :

$$c_t^y = w^y - (s_t/p_t)$$

$$c_{t+1}^o = w^o + (s_t/p_{t+1})$$

donde s_t representa el nivel de ahorro nominal de un bien durable para el consumidor representativo en la generación t, que ahorra cuando es joven y que gasta cuando es viejo.

Además, suponemos que el ahorro nominal de la generación t es igual a la cantidad de dinero legal, M_t, que la autoridad monetaria pone a disposición de los agentes económicos de la generación t: $s_t = M_t$.

Definición 7. Sea **GM** una Economía OLG Monetaria. Dada una sucesión de oferta monetaria legal $\{M_t^s\}^\infty_{t=0}$, $M_t^s \geq 0$ para todo t, decimos que las sucesiones

$$\{p_t\}^\infty_{t=0},\ \{c_t^y\}^\infty_{t=0},\ \{c_t^o\}^\infty_{t=0},\ \{s_t\}^\infty_{t=0},\ p_t > 0,\ c_t^y \geq 0,\ c_t^o \geq 0$$

conforman un equilibrio monetario de **GM** si y sólo si:

$$U'(c_t^y)/U'(c_{t+1}^o) = \beta p_t/p_{t+1},\ c_t^y < w^y, \text{ para todo } t = 0, 1, 2,... \quad [1']$$

$$c_t^y = w^y - (s_t/p_t);\ c_{t+1}^o = w^o + (s_t/p_{t+1}), \text{ para todo } t = 0, 1, 2,... \quad [2']$$

$$M_t^s = s_t, \text{ para todo } t = 0, 1, 2,... \quad [3']$$

es decir, una sucesión de precios y consumos forman un equilibrio monetario de **GM** si cada consumidor maximiza su utilidad sobre su conjunto presupuestal; en cada período, hay equilibrio de mercado y el ahorro nominal es igual a la oferta monetaria.

Definición 8. Un Equilibrio Monetario Estacionario de **GM** se define como un equilibrio monetario tal que para todo $t \geq 0$, $M_t = M$, $p_t = p$, $c_t^y = c^y$, $c_t^o = c^o$ para algunos números positivos M, p, c^y, c^o fijos.

El siguiente teorema muestra que existe un Equilibrio Monetario Estacionario único para la Economía **GM**.

Teorema 2. Si β es suficientemente cercano a la unidad y $w^y > w^o$, existe un Equilibrio Monetario Estacionario *único* finito para la Economía **GM**.

Prueba. Sea $F: \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ definida así:

$$F(\beta, M) = U'(w^y - M/p) - \beta U'(w^o + M/p)$$

Entonces, F es una función diferenciable con continuidad en su dominio, y además,

$$F(1,M^*) = 0, \text{ donde } M^* = p(w^y - w^o)/2 \text{ y } \frac{\partial F}{\partial M} > 0 \text{ en } \mathbf{R}^+$$

Por el *teorema de la función implícita* [Lang 1993] existe un intervalo abierto U alrededor de 1, y una función

$$M: U \to \mathbf{R}^+$$
$$\beta \to M(\beta)$$

tal que

$$M(1) = M^* = p\,(w^y - w^o)/2$$

$$F(\beta, M(\beta)) = 0, \text{ para todo } \beta \in U$$

Esta función M es diferenciable con continuidad. Debe señalarse que, por homogeneidad, $M(\beta) = \lambda p$. Y así $p = M/\lambda(\beta)$, donde $\lambda : U \to \mathbf{R}^+$ es también una función diferenciable con continuidad.

Debe tenerse en cuenta que la existencia de este equilibrio exige que β sea suficientemente cercano a uno, es decir, que los agentes sean suficientemente *pacientes.*

El valor del dinero en el equilibrio monetario estacionario es $(M(\beta)/p) > 0$; así, el dinero mantiene un valor constante bien definido y para siempre. En estos modelos, el dinero legal es dinero A-D legal con un *valor determinado endógenamente* en el estado estacionario. Esto contrasta con el modelo A-D en que el dinero presenta un *valor positivo indeterminado* porque la autoridad monetaria fija arbitrariamente el precio del numerario en unidades monetarias. En el modelo OLG, aun bajo expectativas racionales, se responde a la pregunta de Hahn [1966], quien buscaba un modelo monetario donde el valor positivo del dinero se determinara endógenamente y no se supusiera *a priori*. Por esta razón, se considera que el modelo OLG podría ser una estructura adecuada para construir una teoría monetaria a partir de una teoría del valor.

Equilibrios estacionarios vs. óptimos de Pareto

Lozano *et al.* [1997b] muestran que en el modelo Arrow-Debreu con incertidumbre la introducción de dinero en la economía no mejora, en el sentido de Pareto, la asignación de equilibrio. En ese modelo, el dinero hace posible realizar intercambios que antes no lo eran, pero no aumenta el conjunto de asignaciones sostenibles de la economía. En el modelo OLG, la asignación de equilibrio de la economía no monetaria no es, en general, un óptimo de Pareto. El teorema siguiente muestra que la asignación del equilibrio monetario estacionario es óptima de Pareto.

Teorema 3. En una Economía OLG Monetaria **GM**, un Equilibrio Monetario Estacionario es óptimo de Pareto.

Prueba. Supongamos que para una cierta sucesión de números positivos $\{\varepsilon_t\}^{\infty}_{t=0}$ la distribución temporal

$(c^y, c^o + \varepsilon_0)$

$(c^y - \varepsilon_0 , c^o + \varepsilon_1)$

$(c^y - \varepsilon_1 , c^o + \varepsilon_2)$

. .

. .

. .

$(c^y - \varepsilon_{t-1} , c^o + \varepsilon_t)$

mejora, en el sentido de Pareto, el equilibrio monetario estacionario; es decir

$$U(c^y - \varepsilon_{t-1}) + \beta U(c^o + \varepsilon_t) \geq U(c^y) + \beta U(c^o)$$

Entonces

$$\beta U(c^o + \varepsilon_t) - \beta U(c^o) \geq U(c^y) - U(c^y - \varepsilon_{t-1}) \qquad [7]$$

y por concavidad estricta de la función de utilidad

$$\beta U(c^o + \varepsilon_t) - \beta U(c^o) < \beta U'(c^o)\varepsilon_t \qquad [8]$$

De [7] y [8], obtenemos

$$\beta U'(c^o) > \{U(c^y) - U(c^y - \varepsilon_{t-1})\}/\varepsilon_t \qquad [9]$$

Por otra aplicación de la concavidad de la función de utilidad

$$U(c^y - \varepsilon_{t-1}) - U(c^y) < U'(c^y)(-\varepsilon_{t-1})$$

y así

$$\{U(c^y) - U(c^y - \varepsilon_{t-1})\}/\varepsilon_{t-1} > U'(c^y) \qquad [10]$$

De [9] y [10] obtenemos

$$1 = U'(c^y)/\beta U'(c^o) < \varepsilon_t/\varepsilon_{t-1}$$

Luego $0 < \varepsilon_{t-1} < \varepsilon_t$ para todo t.

Si $\varepsilon_t \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces la condición de recursos, $c^y - \varepsilon_t$ para todo t, no se tendría, lo cual es una contradicción.

Si $\varepsilon_t \rightarrow \varepsilon$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces tomando límites en la ecuación [7]

$$\beta U(c^o + \varepsilon) - \beta U(c^o) \geq U(c^y) - U(c^y - \varepsilon)$$

y repitiendo el procedimiento de las ecuaciones [8], [9] y [10] se obtendría

$$1 = U'(c^y)/\beta U'(c^o) < 1$$

lo que es una contradicción.

El teorema siguiente muestra que la economía OLG tiene un continuo de equilibrios determinísticos. Uno de estos es el equilibrio monetario estacionario, en el cual el dinero mantiene siempre un valor constante. Los otros equilibrios convergen todos a la autarquía y, así, el dinero pierde valor gradualmente y tiende a anularse.

Teorema 4. Bajo una oferta monetaria constante, β suficientemente cercano a 1, $w^y > w^o$ y $U(\bullet)$ suficientemente cóncava, la Economía OLG Monetaria **GM** tiene un continuo de Equilibrios determinísticos. Uno de estos es el estado Monetario Estacionario, y los otros son un continuo de equilibrios monetarios que sólo dependen del nivel de precios inicial y que convergen a la autarquía.

Prueba. Defínanse

$$\varphi(p_t) = U'(w^y - (M/p_t))/p_t$$

$$\psi(p_{t+1}) = \beta U'(w^o + (M/p_{t+1}))/p_{t+1}$$

Para $U(\bullet)$ suficientemente cóncava

$$\varphi'(p_t) = [U''(w^y - (M/p_t))M - U'(w^y - (M/p_t))p_t]/p_t^3 < 0$$

$$\psi'(p_{t+1}) = -\beta[U''(w^y + (M/p_{t+1}))M + U'(w^y + (M/p_{t+1}))p_{t+1}]/p_{t+1}^3 < 0$$

Como la condición de equilibrio [1'] es

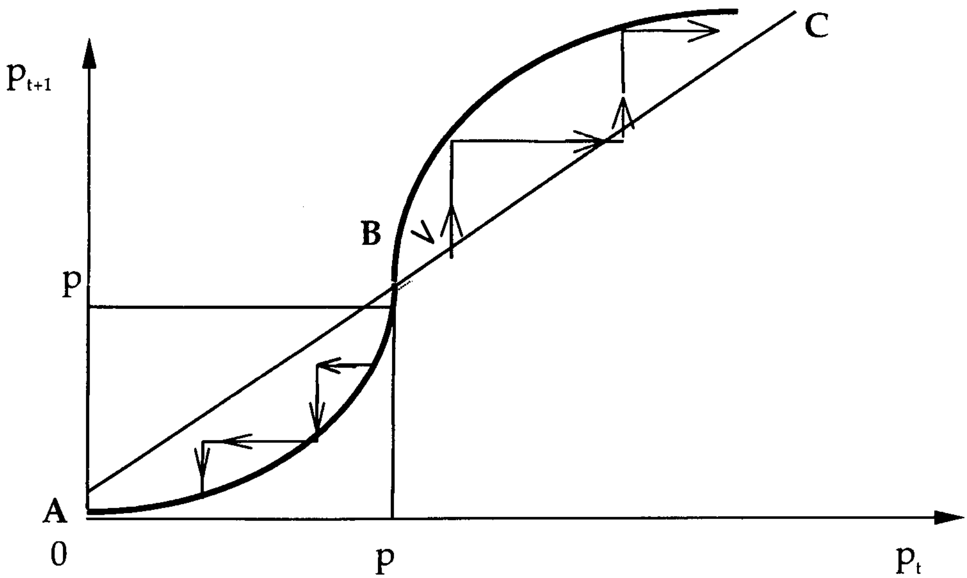
$$\varphi(p_t) = \psi(p_{t+1})$$

entonces existe, $(\psi^{-1} \circ \varphi): \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ diferenciable, estrictamente creciente, no-acotada tal que

$$p_{t+1} = (\psi^{-1} \circ \varphi)(p_t) \qquad [11]$$

Por el Teorema 2, hemos ya probado la existencia de un único equilibrio monetario estacionario, determinado por un nivel de precios único p. Así, $p = (\psi^{-1} \circ \varphi)(p)$.

Si $p \in (p, +\infty)$ entonces de acuerdo a [11], cualquier sistema de precios de equilibrio $\{p_t\}^{\infty}{}_{t=0}, p_0 = p$, satisface $p_t \rightarrow \infty$, cuando $t \rightarrow \infty$; así conducirá la economía al estado de autarquía: $c_t^y \rightarrow w^y, y, c_t^o \rightarrow w^o$, cuando $t \rightarrow \infty$.



Grafica. Dinámica de precios. Se muestran los tres estados estacionarios. El punto **A** se excluye porque almenos un precio debe ser positivo. El punto **B** es el estado estacionario bajo arbitraje. El punto **C** es el estado "estacionario" de ***autarquía.***

Ejemplo 3. El siguiente ejemplo ilustra el Teorema 3 acerca de la forma en que el ahorro que realiza un consumidor entre un período y otro mejora su bienestar, haciendo que el equilibrio sea un óptimo de Pareto.

El problema del consumidor representativo en una Economía Monetaria **GM** es:

$$\max_{c_t^y,\, c_{t+1}^o} (c_t y)^{1/2} + \beta(c_{t+1}{}^o)^{1/2}$$

$$\text{sujeto a } \; p_t c_t^y + M_t = 2p_t$$

$$p_{t+1}\, c_{t+1}{}^o - M_t = p_{t+1}$$

Remplazando las restricciones en la función de utilidad, puede reescribirse como:

$$\underset{M_t}{\text{Max}}\ [2 - (M_t/p_t)]^{1/2} + \beta[1 + (M_t / p_{t+1})]^{1/2}$$

La condición de primer orden es

$$dU/dM_t = -(1/2p_t)\ [2 - (M_t/p_t)]^{-1/2} + (\beta/2p_{t+1})[1 + (M_t/p_{t+1})]^{-1/2} = 0$$

La función de demanda de dinero es

$$M_t = (2\beta^2 p_t^2 - p_{t+1}^2)/(p_{t+1} + \beta^2 p_t)$$

Las funciones de demanda son

$$c_t^y = (p_{t+1}^2 + 2p_t p_{t+1})/(p_t p_{t+1} + \beta^2 p_t^2)$$

$$c_{t+1}^o = \beta^2(p_t p_{t+1} + 2p_t^2)/(\beta^2 p_t p_{t+1} + p_{t+1}^2)$$

Debe advertirse que si el consumidor representativo no ahorra en dinero, el equilibrio es autárquico, es decir, los consumos de equilibrio son las dotaciones iniciales, igual que en el Equilibrio de la Economía no Monetaria G. Sin embargo, en esta economía OLG monetaria, los consumidores ahorran dinero cuando son jóvenes de modo que pueden hacer intercambios cuando son viejos. Así, la Restricción de Clower surge como un resultado del modelo y no como una hipótesis *ad hoc*.

En el Estado Estacionario, $p = p_t = p_{t+1}$ y $M_t = M$. Por tanto, el precio en el Estado Estacionario es

$$p = M(1+\beta^2)/(2\beta^2 - 1)$$

Los consumos de Equilibrio en el Estado Estacionario son

$$c^y = 3/(\beta^2 + 1)$$

$$c^o = 3\beta^2/(\beta^2 + 1)$$

ESTADO ACTUAL DE LA TEORÍA Y CONCLUSIONES

Diversidad de expectativas

Como hemos visto, el modelo OLG [Samuelson 1958, Wallace 1980] muestra, típicamente, un continuo de equilibrios deterministas. Uno de estos equilibrios es el estado monetario estacionario, en el que el dinero legal mantiene siempre un valor constante. Los demás equilibrios convergen siempre a la autarquía y, así, el dinero pierde valor gradualmen-

gradualmente[2]. El estado monetario estacionario llama la atención inmediatamente puesto que tiene un referente en la experiencia cotidiana. Sin embargo, los demás equilibrios no parecen ser plausibles. Para los agentes de las economías de mercado modernas es un hecho que el dinero ha mantenido en general su papel como medio de intercambio. Quizás nadie considere la posibilidad de que una economía moderna se transforme en una economía de intercambio (o al menos no dentro de un futuro previsible). En la sección anterior se mostró que con expectativas racionales, el modelo OLG no puede explicar la existencia de dinero legal con valor, excepto en el estado estacionario.

En los últimos quince años, algunos economistas han sugerido abordar el problema, ya no con la hipótesis de expectativas racionales, sino con la noción de *reglas de aprendizaje* [Lucas 1986, Marcet y Sargent 1989]. Con estas hipótesis, el modelo OLG a veces converge al estado monetario estacionario, lo que hace de éste un posible estado económico de largo plazo. Sin embargo, otros han mostrado que esta propiedad sufre de una "falta de generalidad inherente": aunque *ciertas* reglas de aprendizaje en *ciertos* modelos producen equilibrios económicamente significativos, *otras* reglas en *otros* modelos sólo aumentan el número de trayectorias de equilibrio posibles. Algunas reglas de aprendizaje pueden producir trayectorias de precios complejas que no convergen a ningún estado monetario estacionario [Grandmont y Laroque 1991]. Además, como muestra Duffy [1994], si los agentes utilizan una regla adaptativa para formar expectativas acerca de la inflación (en lugar del nivel de precios), la economía puede converger a un continuo de equilibrios monetarios *no estacionarios*.

Debido a la falta de generalidad, Lucas [1996] cree que es imposible entender el problema de la indeterminación de equilibrios por métodos puramente matemáticos: "Es difícil ver lo que podría avanzar la discusión, reuniendo una colección de individuos, colocándolos en una situación de interés y observando lo que hacen".

Algunos autores ya habían seguido este camino. Lim, Prescott y Sunder [1994] utilizaron métodos experimentales para examinar el modelo OLG con oferta monetaria constante. Sin embargo, sus resultados apoyan la idea de la existencia de un equilibrio monetario estacionario.

El reto de Lucas para encontrar un método puramente matemático ha llevado a que algunos autores "Brock y Hommes [1995], Benhabib y Farmer [1994], Grandmont [1994], de Vilder [1995]" exploren métodos de *dinámicas de aprendizaje* que tengan un alto grado de generalidad. Actualmente se cree

2 Ya habíamos mencionado que la coexistencia de muchas trayectorias de equilibrio posibles se conoce como el problema de la *indeterminación*.

que el ingrediente necesario para alcanzar esa generalidad es la *diversidad de expectativas*: la admisión de muchas reglas de expectativas diferentes en el mismo modelo parece reducir la posibilidad de que las características cualitativas del modelo dependan de unas reglas particulares de expectativas o de unos parámetros específicos.

Políticas de estabilización en un Modelo OLG con diversidad de expectativas

¿Puede un gobierno utilizar una política apropiada para amortiguar o eliminar las fluctuaciones económicas? Este problema controversial, que ha ocupado a los economistas durante largo tiempo, es central en el campo de la economía monetaria.

Hay algunas razones para investigar este problema de política monetaria usando el modelo que presentamos. Un prerrequisito para discutir políticas de estabilización es, obviamente, un modelo plausible en el que existan fluctuaciones qué estabilizar. Kehoe, Levine, Mas-Colell y Woodford [1986] muestran que, en modelos OLG de intercambio puro, dos hipótesis excluyen la existencia de fluctuaciones endógenas: a) sustituibilidad perfecta de los bienes de consumo fechados y/o b) previsión perfecta.

Benhabib y Day [1982] y Grandmont [1985] muestran que debilitar la hipótesis a) crea la posibilidad de fluctuaciones endógenas complicadas. Grandmont [1986] estudia las políticas de estabilización correspondientes. Sin embargo, la violación de la hipótesis de sustituibilidad perfecta requiere que la función de ahorros sea decreciente localmente en la tasa de interés. Como una función de ahorros decreciente al crecimiento de la tasa de interés parece improbable desde el punto de vista empírico [Reichlin 1986], estos modelos no ofrecen una explicación totalmente convincente de las fluctuaciones endógenas.

Otros autores debilitan la hipótesis de previsión perfecta b) suponiendo una forma distinta de expectativas. Bullard [1994] y Grandmont y Laroque [1991], por ejemplo, demuestran la posibilidad de fluctuaciones cíclicas bajo una regla de aprendizaje de mínimos cuadrados. De otro lado, quienes suponen expectativas sobre información pasada enfrentan dos problemas: a) cualquier elección de una regla de aprendizaje particular es siempre un proceso *ad hoc* y b) las expectativas *hacia atrás* [*backwards expectations*] a menudo requieren que los agentes hayan cometido errores de previsión repetida y sistemáticamente. Debido a estas dificultades, los modelos de aprendizaje suelen ser considerados como *herramientas de selección de equilibrios* [Sargent 1993]: para cada tipo de regla de aprendizaje existe un tipo de equilibrio local que es entonces escogido como el resultado de largo plazo más plausible para la economía.

La reducción de la posibilidad de que los resultados dependan de una determinada regla de aprendizaje, introduciendo diversidad de expectativas, ayuda a sortear estas dificultades. Creemos que esta aproximación podría ser un paso significativo para elaborar un modelo monetario plausible que permita el análisis de problemas económicos sustanciales.

Conclusiones

El objetivo de gran alcance de los modelos OLG con diversidad de expectativas es aplicar estas herramientas a los problemas discutidos por Lucas [1996] en su discurso Nobel. En particular, se busca construir modelos en que el aprendizaje juegue papel importante en la explicación de la neutralidad monetaria en el largo plazo y de sus efectos reales en el corto plazo. Y aunque la literatura sobre este problema se remonta a más de doscientos años atrás [Hume 1752], los modelos aquí presentados la complementan al adicionar elementos inspirados en el trabajo computacional sobre aprendizaje [Le Baron 1995].

Para entender por qué el aprendizaje es importante en los modelos monetarios y no sólo un criterio de selección de equilibrios remitimos a Grandmont [1992], quien muestra claramente que los modelos de expectativas racionales no son muy útiles para explicar la volatilidad de muchas series económicas: "las series de tiempo económicas que presentan la mayor volatilidad son aquéllas en donde las expectativas son determinantes al modelar las decisiones presentes. Imponer la hipótesis de expectativas racionales llevaría a conclusiones contrarias a los hechos observados". Además, el aprendizaje admite el comportamiento dinámicamente inestable, que es más coherente con la evidencia empírica.

Las principales objeciones a los modelos de aprendizaje se han centrado alrededor del proceso de selección: en modelos de aprendizaje simple, los agentes pueden continuar usando una regla aun después de que se ha encontrado que es sistemáticamente equivocada. *Actualmente se cree en un proceso de "selección natural" que descarta las reglas implausibles, y centra el modelo alrededor del equilibrio de expectativas racionales.* Esta idea de "centrar alrededor del equilibrio" es un problema de investigación futura.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arrow, K., Block, H. y Hurwicz, L. 1959. "On the Stability of Competitive Equilibrium, II", *Econometrica* 27.

Azariadis, C. 1982. "Self Fulfilling Prophecies", *Journal of Economic Theory* 25.

Benhabib, J. y Day, R. 1982. "A Characterization of Erratic Dynamics in the Overlapping Generations Model", *Journal of Economics, Dynamics and Control* 4.

Benhabib, R. y Farmer, R. 1994. "Indeterminacy and Increasing Returns", *Journal of Economic Theory* 63.

Brock, W. y Hommes, C. 1995. "Rational Routes to Randomness", SSRI Working Paper No. 9506, University of Winconsin, Madison.

Bullard, J. 1994. "Learning Equilibria", *Journal of Economic Theory* 64.

Debreu, Gerard. 1970. "Economies with a Finite Set of Equilibria", *Mathematical Economics: Twenty Papers of Gerard Debreu*, Cambridge University Press.

Debreu, G. y Scarf, H. 1963. "A Limit Theorem on the Core of an Economy", *International Economic Review* 4.

De Vilder, R. 1995. "Endogenous Business Cycles", Ph.D. Thesis, Tinbergen Institute Research Series, No.96, University of Amsterdam.

Duffy, J. 1994. "On Learning and the Non-Uniqueness of Equilibria in an Overlapping Generations Model with Fiat Money", *Journal of Economic Theory* 64.

Geanakoplos, J. 1987. "Overlapping Generations Model of General Equilibrium", *The New Palgrave: General Equilibrium*, J. Eatwell, M. Milgate y P. Newman (eds.), The Macmillan Press Limited, 1989.

Grandmont, J.-M. 1983. *Money and Value : A Reconsideration of Classical and Neoclassical Monetary Theories*, Cambridge University Press.

Grandmont, J.-M. 1985. "On Endogenous Competitive Business Cycles", *Econometrica* 53.

Grandmont, J.-M. 1986. "Stabilizing Competitive Business Cycles", *Journal of Economic Theory* 40.

Grandmont, J.-M. 1992. "Expectations, Driven, Non-Linear Business Cycles", Cowles Foundation, Discussion Paper No. 1022.

Grandmont, J.-M. 1994. "Expectations Formation and Stability of Large Socioeconomic Systems", CEPREMAP, Discussion Paper No. 9424.

Grandmont, J.-M. y Laroque, G. 1991. "Economic Dynamics with Learning: Some Instability Examples", Barnett *et al.* (eds.), *Equilibrium Theory and Applications*, Cambridge University Press.

Hahn, F. 1966. "On Some Problems of Proving the Existence of Equilibrium in a Monetary Economy", F. Hahn y F. Brechling (eds), *The Theory of Interest Rates*, Macmillan, London.

Hahn, F. 1983. "Money and General Equilibrium", Money, Growth and Stability, Basil Blackwell, Oxford, 1985.

Hume, D. 1752. "Of Money and Of Interest", *Writings on Economics*, E. Rotwein editor, University of Wisconsin Press.

Kehoe, T., Levine, D., Mas-Colell, A y Woodford, M. 1986. "Gross Substitutability in Large Sequence Economics", mimeo.

Lang, S. 1993. *Real and Functional Analysis*, GTM, Springer Verlag.

Le Baron, B. 1994. "Chaos and Non-Linear Forecastability in Economics and Finance", Department of Economics, University of Wisconsin, Madison.

Lim, S., Prescott, E y Sunder, S. 1994. "Stationary Solution to the Overlapping Generations Model of Fiat Money: Experimental Evidence", *Empirical Economics* 19.

Lozano, F. y Villa, E. 1997. "El Dinero en el Modelo Arrow-Debreu", Tesis de Magister en Economía, Universidad Nacional de Colombia.

Lozano, F., Villa, E. y Monsalve, S. 1997a. "El Modelo Arrow-Debreu es un Modelo Estático", *Cuadernos de Economía* 26, Universidad Nacional de Colombia, Santafé de Bogotá.

Lozano, F., Villa, E. y Monsalve, S. 1997b. "El Dinero en el Modelo Arrow-Debreu", *Lecturas de Economía*, Universidad de Antioquia, Medellín (de próxima publicación).

Lucas, R. 1986. "Adaptive Behavior and Economic Theory", *Journal of Business* 59.

Lucas, R. 1996. "Nobel Lecture: Monetary Neutrality", *Journal of Political Economy* 104.

Marcet, A. y Sargent, T. 1989a. "Least Squares Learning and the Dynamics of Hyperinflation", Barnett et. al (eds.), *Economic Complexity: Chaos, Sunspots, Bubbles and Non-Linearity*, Cambridge University Press.

Marcet, A. y Sargent, T. 1989b "Convergence of Least Squares Learning in Environments with Hidden State Variables and Private Information", *Journal of Political Economy* 97.

Reichlin, P. 1986. "Equilibrium Cycles in an Overlapping Generations Economy with Production", *Journal of Economic Theory* 40.

Samuelson, P. 1958. "An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money", *Journal of Political Economy* 66.

Wallace, N. 1980. "The Overlapping Generations Model of Fiat Money", Kareken y Wallace (eds.), *Models of Monetary Economics*, Minneapolis, Federal Reserve Bank of Minneapolis.

Walras, L. 1874. *Elements of Pure Economics*, Homewood, Illinois, Irwin, 1954.