EL MODELO ARROW-DEBREU ES UN MODELO ESTÁTICO

Francisco Lozano G.,
Edgar Villa P., Sergio Monsalve G.
Edgar Villa es profesor de Economía en la Universidad Externado de Colombia.
Francisco Lozano y Sergio Monsalve son profesores
de la Universidad Nacional de Colombia,
en los departamentos de Teoría y Política Económica
y Matemáticas y Estadística, respectivamente.

Resumen

Francisco Lozano G., Edgar Villa P., Sergio Monsalve G. "El modelo Arrow-Debreu es un modelo estático", *Cuadernos de Economía,* v. XVI, n. 26, Bogotá, 1997, páginas 21-46.

En este artículo, parte de un estudio más amplio, se hace una presentación del modelo Arrow-Debreu y se analizan algunas de sus limitaciones teóricas. Su objetivo principal es mostrar que el modelo es estático y que no pueden derivarse consideraciones dinámicas de él. Además, se muestra que las principales malas interpretaciones del modelo surgen al considerársele como un modelo dinámico.

Abstract

Francisco Lozano G., Edgar Villa P., Sergio Monsalve G. "The Arrow-Debreu's Model is a Static Model", *Cuadernos de Economía,* v. XVI, n. 26, Bogotá, 1997, pages 21-46.

This article, which forms part of a wider study, presents the Arrow-Debreu's model, analyzing some of its theoretical limitations. Its main objective is to show that the model is static and that dynamic considerations can not be inferred from it. Besides, it shows that most misinterpretations of the model arise from considering it a dynamic model.

INTRODUCCIÓN

El problema central en la Teoría del Equilibrio General de una economía bajo *competencia perfecta* consiste en explicar un modelo en el que los precios de las mercancías son tomados exógenamente (es decir, que ninguno de los agentes de la economía tiene influencia sobre ellos), en el que los agentes buscan maximizar funciones objetivo (el beneficio en el caso de los productores y la satisfacción en el caso de los consumidores) y en el que existe igualdad entre la oferta y la demanda agregadas en todos los mercados. El primer modelo de la Teoría del Equilibrio General fue elaborado por León Walras [1874].

Walras y sus sucesores percibieron que su teoría sería poco sólida sin un argumento que soportara la existencia de por lo menos un equilibrio. Walras notó la correspondencia entre el número de precios por determinar y el número de ecuaciones que expresan la igualdad entre la oferta y la demanda; pero esto no era suficiente para determinar el equilibrio porque sólo los precios relativos afectan el comportamiento de los agentes y las ecuaciones no son necesariamente independientes.

La Teoría del Equilibrio General identificó dos problemas adicionales al de la existencia del equilibrio: su estabilidad y su unicidad. Cada uno tuvo un desarrollo histórico diferente pero, de los tres, el más importante fue, quizás, el de la existencia. Es en el contexto de este problema que se enmarca el aporte del modelo Arrow-Debreu (en adelante A-D).

Aun antes de la formulación del modelo A-D en los años cincuenta, ya se habían dado pasos hacia una prueba de existencia del equilibrio competitivo, fundamentalmente en el trabajo de Wald [1936] y Von Neumann [1937]. Sin embargo, debe notarse que antes de que se abordara de nuevo el problema de la existencia, los aportes se encaminaron más hacia la estabilidad dinámica del equilibrio general. Fue Samuelson [1947] el que distinguió claramente entre equilibrio y estabilidad. Quizás la razón por la que el problema de la dinámica del equilibrio precedió en cierta medida al de su existencia sea que aunque exista un equilibrio competitivo, es necesario estudiar las condiciones que garantizan que una economía competitiva tienda en el tiempo a un equilibrio.

Volviendo a la existencia del equilibrio general competitivo, el problema central desde Walras había sido demostrar la existencia de un sistema de precios que satisficiera las siguientes condiciones:

1. Que igualara las ofertas y demandas agregadas en todos los mercados simultáneamente;

2. Que cada consumidor satisficiera sus preferencias al máximo dentro de su conjunto de consumo y sujeto a su restricción presupuestaria; y,

3. Que cada productor maximizara sus beneficios dentro de su conjunto de producción y bajo supuestos económicamente plausibles.

Arrow y Debreu [1954], y Debreu [1959] formularon el teorema de existencia bajo hipótesis plausibles.[1]

El modelo de equilibrio general A-D es un formato para resolver sólo algunas preguntas, o mejor, se creó para explicar el problema especificado anteriormente; sin embargo, a él se lo critica porque no puede dar cuenta de algún fenómeno económico en particular. Lo que sí debe enfatizarse es que el modelo A-D ha comprobado ser muy flexible en el tratamiento de algunos temas que originalmente fueron excluidos: la incertidumbre, los mercados de activos, los mercados incompletos, un número infinito de mercancías, bienes públicos y externalidades, entre otros. Debe decirse claramente, pues, que si el modelo A-D en sus versiones más generales no da cuenta de algún fenómeno económico, esto por sí mismo no quiere decir que la teoría 'falsee' en cualquier sentido la *realidad*.

En la sección 2 se hará una presentación del modelo A-D. La tercera tratará el comportamiento del consumidor y establecerá las condiciones bajo las que la correspondencia de demanda es hemicontinua superior. El comportamiento del productor se analizará en la sección 4 cuyo objetivo básico es mostrar la hemicontinuidad superior de la correspondencia de oferta. En la sección 5 se presentará al subastador como un agente que maximiza cierta función objetivo: el valor del exceso de de-

---

1 Varias de las hipótesis se han debilitado considerablemente; para un ejemplo, ver Debreu [1962].

manda agregada. En la sección 6 se definirán las nociones de economía, de economía de propiedad privada y de equilibrio y se presentará el Teorema de Existencia del Equilibrio, siguiendo a Debreu [1959].

En la sección 7 se define la noción de Óptimo de Pareto y se presentan los dos teoremas de la Economía del Bienestar: se muestra que éstos no se cumplen exclusivamente para una economía de propiedad privada. En la sección 8 se introduce el concepto de cuasi-equilibrio que permite debilitar algunas de las hipótesis del Teorema de Existencia del Equilibrio; además, se muestran condiciones suficientes para garantizar la existencia del equilibrio utilizando técnicas del cálculo diferencial. Por último, en la sección 9 se comentan ciertas limitaciones del modelo A-D y algunas conclusiones erróneas que de él se han derivado.

CARACTERÍSTICAS DEL MODELO ARROW-DEBREU

La economía se desarrolla en un período de tiempo previamente establecido y que se divide en un número finito de intervalos llamados fechas. El espacio en el que se desarrolla la actividad económica se divide, a su vez, en un número finito de regiones llamadas lugares. Así, una mercancía del tipo A-D es un bien o servicio que se caracteriza por sus propiedades físicas y por la fecha y el lugar en los que se encuentra disponible. Por ejemplo, dos bienes con características físicas idénticas en una fecha determinada pero situados en dos lugares diferentes, se consideran dos mercancías diferentes. De forma análoga, dos bienes idénticos físicamente y localizados en un mismo lugar pero en dos fechas diferentes, representan dos mercancías distintas.[2]

Ahora bien, la cantidad de cada mercancía se representa por un número real y su precio es un número real asociado a ella. Esta definición de precio no hace referencia a ninguna unidad monetaria. Existe un número entero positivo l de mercancías. Un sistema de precios p es un punto de R^l.

De otra parte, la economía está conformada por dos sectores: un número finito de consumidores y un número finito de productores. El comportamiento de cada uno de los agentes se explica como el proceso de maximizar una función objetivo sujeta a restricciones: el consumidor maximizará su satisfacción sujeto a la restricción de presupuesto, y el

---

2 También podrían incluirse los diversos estados de la naturaleza en la definición de mercancía y tratarse, con el aparato analítico que se desarrollará más adelante, el problema de la incertidumbre. Así, "una sombrilla en una fecha y lugar específicos será una mercancía diferente si el día es soleado o lluvioso".

productor intentará maximizar sus beneficios sujeto a la restricción de sus posibilidades de producción.

Finalmente, *el modelo A-D es un modelo estático* definido para un período previamente determinado. Walras creó de manera exógena un agente, llamado subastador, quien al comienzo del período emite unos precios para cada una de las mercancías. El objetivo del subastador es maximizar la función del valor del exceso de demanda. Ésta es su función de utilidad y debe escoger un sistema de precios que la maximice.

La función de este último agente, no proviene de un comportamiento racional: los consumidores y productores buscan maximizar sus funciones de utilidad y beneficio, objetivos que pueden considerarse plausibles; pero la maximización de la función del valor del exceso de demanda es una hipótesis exógena que no se deriva del comportamiento racional de los agentes individuales. No obstante, aunque el objetivo del subastador no provenga de un comportamiento racional, una vez que se acepta su papel de maximizar la función del valor del exceso de demanda, él es un agente como cualquier otro, consumidor o productor. Este comportamiento del subastador refleja la conocida regla de la *ley de la oferta y la demanda*, es decir, ante un exceso de demanda en el k-ésimo mercado, su precio se incrementa, y ante un exceso de oferta, su precio disminuye. Sin embargo, el subastador no hace verdaderamente dinámico el modelo A-D.

EL COMPORTAMIENTO DEL CONSUMIDOR

Un *consumidor* es, en general, un individuo o un grupo de individuos (una familia) con un objetivo unificado. El objetivo de cada consumidor es elegir un plan de consumo, es decir, una especificación de las cantidades de bienes a consumir y de las cantidades de trabajo a ofrecer al comienzo del período (y para todo el período) de forma tal que se satisfagan de la mejor forma posible sus preferencias. Las cantidades de bienes a consumir se representan mediante números positivos, y las cantidades de las distintas clases de trabajo a ofrecer se representan mediante números negativos. Al conjunto de todos los planes de consumo se le denomina conjunto de consumo. Bajo ciertas condiciones, que más adelante se precisarán, el problema que debe resolver el consumidor puede plantearse como la maximización de una función llamada de utilidad que representa sus preferencias sobre el conjunto de consumo.

Existe un número entero positivo m de consumidores. Cada consumidor está indizado por $i = 1, 2, ..., m$. El i-ésimo consumidor elige un vector, su plan de consumo x_i, en un subconjunto no vacío de R^l, su conjunto de consumo X_i. Dado un consumo x_i para cada consumidor, $x = \Sigma_i x_i$ se llama el consumo total; el conjunto $X = \Sigma_i X_i$ se llama el conjunto de consumo agregado. Supondremos aquí, para efectos de la prueba de existencia del equilibrio, que:

para todo i

X_i es cerrado; [a.1]

X_i es convexo; [a.2]

X_i tiene una cota inferior para $\preceq_i$; [a.3]

Sobre X_i se define un preorden completo $\preceq_i$ tal que:

No existe consumo de saciedad en X_i; [b.1]

Para todo x_i' en X_i, los conjuntos $\{x_i \in X_i \mid x_i \preceq_i x_i'\}$ y $\{x_i \in X_i \mid x_i \succeq_i x_i'\}$ son cerrados en X_i; [b.2]

si x_i^1 y x_i^2 son dos puntos de X_i, y si t es un número real en (0, 1), entonces $x_i^2 \succ_i x_i^1$ implica $[\succ_i x_i^2 + (1\text{-}t)x_i^1] \succ_i x_i^1$; [b.3]

Si w_i es el vector de dotaciones iniciales del i-ésimo consumidor, entonces existe x_i° en X_i tal que $x_i^\circ << w_i$; [c]

Explicaremos brevemente cada una de estas hipótesis:

[a.1] X_i cerrado significa que para cualquier sucesión de planes de consumo que converja a un punto de R^1, este punto es un plan de consumo;

[a.2] X_i convexo significa que la combinación convexa de cualesquiera dos planes de consumo, es un plan de consumo. La hipótesis de convexidad implica la perfecta divisibilidad de las mercancías; es decir, el consumidor puede disponer de cualquier cantidad de cada mercancía representada por un número real;

[a.3] Que X_i tenga una cota inferior significa que existe un γ_i en R^1 tal que $\gamma_i \leq x_i$ para todo x_i en X_i;

[b.1] Que no exista un consumo de saciedad en el conjunto de consumo del i-ésimo consumidor significa que para cualquier plan de consumo existe otro plan de consumo preferido. Obsérvese que este supuesto no implica que el i-ésimo consumidor prefiere planes de consumo con más mercancías a planes de consumo con una menor cantidad de ellas;

[b.2] Este supuesto es llamado continuidad de las preferencias. Garantiza la existencia de una función de 'utilidad' continua a partir de un preorden de preferencias definido sobre el conjunto de consumo del i-ésimo consumidor;

Lema 1. Existencia de una función de utilidad. Sea X_i un subconjunto conexo de R^1 completamente preordenado por $\preceq_i$. Bajo [b.2] existe $U_i : X_i \rightarrow R$ continua que preserva el preorden, llamada la Función de Utilidad del i-ésimo consumidor. Esta función es única salvo por transformaciones homotéticas.

Prueba: Ver Debreu [1959];

[b.3] Esta hipótesis se conoce como *convexidad simple de las preferencias* y significa que el i-ésimo consumidor considera una ponderación de dos planes de consumo al menos tan buena como cualquiera de ellos. Obsérvese que la prueba de existencia del equilibrio no requiere la convexidad estricta de las preferencias, es decir, que la combinación convexa de dos planes de consumo indiferentes entre sí sea preferida a cualquiera de ellas. Dicho de otra forma, no se requiere que las curvas de indiferencia sean *suaves* o diferenciables en todos sus puntos, como usualmente se supone en la microeconomía básica. Este axioma implica que, dado un sistema de precios, el consumidor puede elegir varios planes de consumo maximizadores de la utilidad;

[c] Este axioma significa que para cada consumidor, un plan de consumo posible es aquel que posea una menor cantidad de las mercancías que tiene el consumidor como dotaciones iniciales para el período. De esta forma, se excluye la posibilidad de que la riqueza de un consumidor sea igual al mínimo compatible con su conjunto de consumo.[3]

Definición 1. El conjunto presupuestario del i-ésimo consumidor, a los precios p, se define como:

$T_i(p) = \{x_i \in X_i \mid px_i \leq \omega_i\}$, donde $\omega_i = pw_i$;

Bajo el lema 1, sea

$S_i = \{p \in R^l \mid \text{existe } x_i \in T_i(p), U_i(x_i) \text{ es máximo en } T_i(p)\}$;

Estos son los vectores de precios para los cuales existe, para el i-ésimo consumidor, un plan de consumo que maximiza su satisfacción dado su presupuesto.

3 Esta hipótesis garantiza que la correspondencia de demanda individual sea hemicontinua superiormente. Como señala Hildenbrand, "Cualquier teorema de existencia del equilibrio competitivo, donde la demanda es derivada de la maximización de la utilidad individual, tiene que enfrentar una dificultad matemática básica, el que la correspondencia de demanda de un consumidor no sea hemicontinua superior cuando su riqueza es igual al mínimo compatible con su conjunto de consumo" [1983, 20-21].

Lema 2. Bajo [a.1], [a.2], [b.2] y [c], si suponemos que X_i es acotado entonces $S_i \neq \varnothing$.

Dado un sistema de precios p y su riqueza ω_i, un número real, el i-ésimo consumidor elige su plan de consumo x_i en su conjunto de consumo X_i tal que $px_i \leq \omega_i$ y tal que x_i es un mayor elemento para $\preceq_i$, sobre el conjunto de planes de consumo que satisfacen la restricción de riqueza. Un plan de consumo elegido de esta forma se llama un consumo de equilibrio del i-ésimo consumidor relativo a p.

Definición 2. La *correspondencia de demanda* del i-ésimo consumidor se define como:

$$\xi_i : S_i \to X_i;$$

$$p \to \xi_i(p) = \{x_i \in T_i(p) \mid U_i(x_i) \text{ es máximo en } T_i(p)\};$$

Esta correspondencia le asigna a cada vector de precios en S_i los planes de consumo que maximizan la satisfacción del i-ésimo consumidor de acuerdo con su restricción de presupuesto.

Lema 3. Bajo [b.1], [b.2] y [b.3], si $x_i \in \xi_i(p)$ entonces $px_i = \omega_i$.

Es decir, para maximizar su utilidad, el i-ésimo consumidor debe gastar todo su presupuesto.

Lema 4. Bajo [a.1], [a.2], [b.1], [b.2], [c], además de suponer que X_i es acotado, la correspondencia de demanda ξ_i es hemicontinua superior sobre S_i.

Lema 5. Bajo [b.1], si $x_i \in \xi_i(p)$ entonces $p \neq 0$.

Es decir, si el i-ésimo consumidor está maximizando su utilidad y no existe consumo de saciedad en su conjunto de consumo, no todas las mercancías son *libres*.

EL COMPORTAMIENTO DEL PRODUCTOR

Un *productor* es una abstracción tanto sobre las formas legales de organización (corporación, propietario independiente) como sobre los tipos de actividad (agricultura, manufactura, construcción). Cada productor debe elegir un plan de producción; es decir, una especificación de las cantidades de insumos necesarias para producir unas determinadas cantidades de productos, para el período de tiempo en el que se desarrolla la actividad económica. Los insumos se representarán mediante números negativos y los productos mediante números positivos.

El objetivo del productor es maximizar el beneficio, es decir la diferencia entre los ingresos por la venta de los productos y los costos por la compra de los insumos, dado su limitado conocimiento tecnológico.

Al conjunto de todos los planes de producción se le denomina conjunto de producción. Existe un número entero positivo n de productores. Cada productor está indizado por $j = 1, 2, ..., n$. El j-ésimo productor elige un vector, su plan de producción y_j, en un subconjunto no vacío de R^l, su conjunto de producción Y_j. Dada una producción y_j para cada productor, $y = \Sigma_j y_j$ se llama la producción total; el conjunto $Y = \Sigma_j Y_j$ se llama el conjunto de producción agregado. Supondremos aquí para efectos de la prueba de existencia del equilibrio, que:

para todo j

$0 \in Y_j$; [d.1]

Y_j es cerrado; [d.2]

Y_j es convexo; [d.3]

$Y_j \cap (-Y_j) = \{0\}$; [d.4]

$Y_j \supset (-\Omega)$, donde $\Omega = \{x \in R^l \mid x \geq 0\}$; [d.5]

Explicaremos brevemente cada uno de estos axiomas:

[d.1] Este axioma se denomina *posibilidad de inacción* y significa que el j-ésimo productor tiene la posibilidad para el período de no llevar a cabo ninguna acción productiva. Este supuesto garantiza que los beneficios de cada productor sean no negativos;

[d.2] Y_j cerrado significa que para cualquier sucesión de planes de producción del j-ésimo productor que converja a un punto de R^l, este punto es un plan de producción para el j-ésimo productor;

[d.3] Y_j convexo significa que la combinación convexa de cualesquiera dos planes de producción para el j-ésimo productor, es un plan de producción para él;

[d.4] Esta hipótesis se conoce como la *irreversibilidad* del conjunto de producción individual. Afirma que un plan de producción no puede ser revertido, es decir, los productos generados a partir de ciertos insumos no pueden producir dichos insumos. Esto es consistente con la noción de mercancía A-D ya que la producción toma tiempo y las mercancías están fechadas;

[d.5] Esta hipótesis se llama *libre disponibilidad* del conjunto de producción individual. Significa que es posible para cada productor utilizar cualquier cantidad de insumos sin generar un producto. De otra forma, un plan de producción cuyos productos sean todos nulos es posible.

Definición 3. El conjunto Y_j tiene rendimientos *no decrecientes a escala* si para cualquier $y_j \in Y_j$, $t > 1$ se tiene que $ty_j \in Y_j$. El conjunto Y_j tiene rendimientos *no crecientes a escala* si para cualquier $y_j \in Y_j$, $t < 1$ se tiene que $ty_j \in Y_j$. El conjunto Y_j exhibe rendimientos *constantes a escala* si para cualquier $y_j \in Y_j$, $t > 0$ se tiene que $ty_j \in Y_j$.

Lema 6. Bajo [d.1] y [d.3], el conjunto de producción Y_j tiene rendimientos no crecientes o constantes a escala.

Es decir, la convexidad junto con la posibilidad de inacción implica que cada conjunto de producción individual tiene rendimientos no crecientes o constantes a escala.

Lema 7. Bajo [d.1], [d.2], [d.3], [d.4] y [d.5], para todo $j = 1, 2, \ldots, n$, se tienen las mismas hipótesis para Y, es decir:

$$0 \in Y; \qquad [d.1']$$

$$Y \text{ es cerrado}; \qquad [d.2']$$

$$Y \text{ es convexo}; \qquad [d.3']$$

$$Y \cap (-Y) = \{0\}; \qquad [d.4']$$

$$Y \supset (-\Omega). \qquad [d.5']$$

Dado un sistema de precios p y una producción y_j, el beneficio del j-ésimo productor se define py_j. El beneficio agregado se define como py. Dado un sistema de precios p, el j-ésimo productor elige su producción en su conjunto de producción Y_j para maximizar su beneficio. Un plan de producción elegido de esta forma se llama una producción de equilibrio del j-ésimo productor relativo a p.

Definición 4. El conjunto de precios para los cuales existe un plan de producción, para el j-ésimo productor, que maximiza el beneficio es

$$T_j = \{p \in R^l \mid pY_j \text{ tiene un máximo}\}$$

Lema 8. Bajo [d.2] con Y_j acotado, se tiene que $T_j \neq \varnothing$.

Definición 5. La *correspondencia de oferta* del j-ésimo productor se define como:

$$\eta_j : T_j \to Y_j;$$

$$p \to \eta_j(p) = \{y_j \in Y_j \mid py_j \text{ es máximo sobre } Y_j\}.$$

Esta correspondencia le asigna a cada vector de precios en T_j los planes de producción que maximizan el beneficio del j-ésimo productor.

Definición 6. La función de beneficio del j-ésimo productor es:

π_j: $T_j \rightarrow Y_j$;

$p \rightarrow \pi_j(p) = \text{Max } pY_j$.

Lema 9. Bajo [d.2], si suponemos que Y_j es acotado, la correspondencia de oferta η_j es hemicontinua superior sobre T_j.

Lema 10. Sean $y_1, \ldots, y_j, \ldots, y_n$ puntos de $Y_1, \ldots, Y_j, \ldots, Y_n$ respectivamente. Dado p, py = Max pY si y sólo si $py_j = \text{Max } pY_j$ para todo j.

Lema 11. Bajo [b.1] y [d.5], si $p \in T_j$, entonces $p \geq 0$, $p \neq 0$.

Es decir, la hipótesis de libre disponibilidad excluye los precios negativos.

EL COMPORTAMIENTO DEL SUBASTADOR

Existe un agente de mercado *ficticio*, el subastador, cuyo objetivo es elegir un vector de precios no negativos que maximice la siguiente función de utilidad t, definida por:

$$t((x_i), (y_j), p) = p\,[\Sigma_i x_i - \Sigma_j y_j - \Sigma_i w_i]$$

Es decir, si el i-ésimo consumidor (i = 1,.., m) elige el consumo x_i y el j-ésimo productor (j = 1, ..., n) elige la producción y_j, el agente de mercado elige el vector de precios p tal que $t((x_i), (y_j), p)$ sea máxima.

EL CONCEPTO DE ECONOMÍA

Al comienzo del período existen unas dotaciones de mercancías agregadas dadas exógenamente. Se puede caracterizar ahora lo que se considera una *economía.* Ésta se define por los conjuntos de consumo completamente preordenados por una relación de preferencia, los conjuntos de producción individuales y las dotaciones iniciales agregadas.

Por su parte, en una *economía de propiedad privada,* los consumidores son los dueños de las firmas, es decir, poseen una participación en los beneficios de las mismas y poseen todas las dotaciones iniciales. Luego, una economía de propiedad privada se define por los conjuntos de consumo completamente preordenados por una relación de preferencia, los conjuntos de producción individuales, las participaciones de los consumidores en los beneficios de los productores y las dotaciones iniciales de los consumidores individuales cuya suma son las dotaciones agregadas.

El teorema de existencia probado por Debreu [1959] se refiere a la economía de propiedad privada, pero se mostrará más adelante que la estructura del modelo A-D admite economías para las que existe un equilibrio y que no son necesariamente de propiedad privada.[4]

Definición 7. Una economía **E** está definida así:

Para cada $i = 1, 2, ..., m$, un subconjunto no vacío X_i de R^l completamente preordenado por $\preceq_i$;

Para cada $j = 1, 2, ..., n$, un subconjunto no vacío Y_j de R^l;

Las dotaciones iniciales $w \in R^l$.

Definición 8. Una economía de propiedad privada **EP** está definida por:

Una economía $\mathbf{E} = ((X_i, \preceq_i), (Y_j), w)$;

Para cada i, por un punto w_i de R^l tal que $\Sigma_i w_i = w$;

Para cada par (i, j), por un número real no negativo θ_{ij} tal que $\Sigma_i \theta_{ij} = 1$ para todo j.

Definición 9. Un equilibrio de la economía de propiedad privada **EP** es una $(m + n + 1)$-tupla $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$ de puntos de R^l tal que:

x_i^* es un mayor elemento de $\{x_i \in X_i \mid p^* x_i \leq p^* w_i + \Sigma_j \theta_{ij} p^* y_j^*\}$ para $\preceq_i$, para todo i;

y_j^* maximiza el beneficio relativo a p^* sobre Y_j, para todo j;

$x^* - y^* = w$.

Teorema 1. Teorema de Existencia del Equilibrio. La economía de propiedad privada $\mathbf{EP} = ((X_i, \preceq_i), (Y_j), (w_i), (\theta_{ij}))$ tiene un equilibrio si

para todo i se satisfacen [a.1], [a.2], [a.3], [b.1], [b.2], [b.3] y [c];

para todo j se satisfacen [d.1], [d.2'], [d.3'], [d.4'] y [d.5'].

Prueba. Ver Debreu [1959].

LOS DOS TEOREMAS DE LA ECONOMÍA DEL BIENESTAR

En 1951-52, Arrow y Debreu, separadamente, trataban y resolvían otro de los problemas centrales de la Teoría del Equilibrio General: el problema del bienestar económico.

Definición 10. Un estado $((x_i), (y_j))$ de **E** se dice *sostenible* si satisface: $x_i \in X_i$ para todo i, $y_j \in Y_j$ para todo j, $x - y = w$. Es decir, un estado $((x_i), (y_j))$

4 La economía socialista del tipo Lange está completamente cobijada dentro del modelo A-D, como se explicará más adelante. Ver Lange [1938].

es sostenible si x_i es un consumo posible para cada consumidor, y_j es una producción posible para cada productor, y es un equilibrio de mercado.

Dada una economía **E**, un consumo x_i para el i-ésimo consumidor es sostenible si existe un estado sostenible cuya componente correspondiente a este consumidor es x_i. El conjunto de todos sus consumos sostenibles es llamado su conjunto de consumo sostenible.

Definición 11. Un preorden $\preceq$ es definido sobre el conjunto **A** de estados sostenibles de una economía **E** por $((x_i), (y_j)) \preceq ((x_i'), (y_j'))$ si para todo i, $x_i \preceq_i x_i'$. Un *Óptimo de Pareto* de **E** es un elemento maximal de **A** para $\preceq$. Es decir, un estado $((x_i), (y_j))$ es Óptimo de Pareto si no existe otro estado sostenible $((x_i'), (y_j'))$ tal que para todo i, $x_i \preceq_i x_i'$ y para al menos un i $x_i \preceq x_i'$.

Un Óptimo de Pareto es un estado sostenible para el cual no existe un estado sostenible tal que todos los consumidores se encuentren por los menos en la misma situación, en términos de preferencia, y al menos alguno de ellos mejore.

Teorema 2. La economía $\mathbf{E} = ((X_i, \preceq_i), (Y_j), w)$ tiene un Óptimo de Pareto si:

Para todo i se satisfacen [a.1], [a.2], [a.3] y [b.2];

Y es cerrado, convexo y satisface $Y \cap \Omega = \{0\}$;

$w \in X - Y$.

Prueba. Ver Debreu [1959].

Definición 12. Un estado $((x_i^*), (y_j^*))$ de **E** es un equilibrio relativo al sistema de precios p en R^l si:

x_i^* es un mayor elemento de $\{x_i \in X_i \mid px_i \leq px_i^*\}$ para $\preceq_i$, para todo i;

y_j^* maximiza py_j sobre Y_j, para todo j;

$x^* - y^* = w$.

Teorema 3. Primer teorema de la Economía del Bienestar.

Sea **E** una economía tal que, para todo i, se satisfacen [a.2] y [b.3]. Un equilibrio $((x_i^*), (y_j^*))$ relativo a un sistema de precios p, donde ningún x_i^* es un consumo de saciedad, es un Óptimo de Pareto.

Prueba. Ver Debreu [1959].

Teorema 4. Segundo teorema de la Economía del Bienestar.

Sea **E** una economía tal que, para todo i, se satisfacen [a.2], [b.2], [b.3], [d.2′] y $w_i \neq \text{Min } pX_i$. Dado un óptimo $((x_i^*), (y_j^*))$ donde algún $x_i'^*$ no es un consumo de saciedad, existe un sistema de precios diferente de 0 tal que $((x_i^*), (y_j^*))$ es un equilibrio relativo a p.

Prueba. Ver Debreu [1959].

ALGUNAS AMPLIACIONES DEL MODELO ARROW-DEBREU

El cuasi-equilibrio

Las condiciones del teorema 1 no son las más débiles para garantizar la existencia de un equilibrio.[5] Debreu [1962] introduce el concepto de *cuasi-equilibrio* con el fin de debilitar las hipótesis y generalizar el modelo:

Definición 13. Un cuasi-equilibrio de la economía de propiedad privada **EP** $= ((X_i, \preceq_i), (Y_j), (w_i), (\theta_{ij}))$ es una (m + n + 1)-tupla $((x_i^*), (y_j^*), (p^*))$ de puntos de $((X_i), (Y_j), R^l)$, respectivamente, tal que:

Para todo i, x_i^* es un mayor elemento de $\{x_i \in X_i \mid p^*x_i \leq p^*w_i + \Sigma_j \theta_{ij}\, p^*y_j^*\}$ para $\preceq_i$ y/o $p^*x_i^* = p^*w_i + \Sigma_j \theta_{ij}\, p^*y_j^* = \text{Min}\ p^*X_i$

Para todo j, $p^*y_j^* = \text{Max}\ p^*Y_j$

$\Sigma_i x_i^* - \Sigma_j y_j^* = \Sigma_i w_i$

$p^* \neq 0.$

Esta definición de cuasi-equilibrio fue construida para sobrepasar la dificultad matemática básica que surge cuando se excluye la hipótesis [c], es decir, cuando la riqueza es igual al mínimo del conjunto de consumo. Además, esta noción permite debilitar algunas hipótesis:

1. La hipótesis [b.1] que afirma que para todo consumidor no existe un consumo de saciedad sobre su conjunto de consumo, puede reemplazarse por la hipótesis de que no existe un consumo de saciedad sobre su conjunto de consumo *sostenible.* Es decir, puede existir un consumo de saciedad para algún consumidor por fuera de su conjunto de consumo sostenible;

2. El supuesto de la convexidad simple de las preferencias [b.3] puede reemplazarse por la convexidad débil de las preferencias, es decir, que para

5 Este debilitamiento de las hipótesis se enmarca en el método de construcción de la teoría económica sintetizado por Tjalling Koopmans [1957]: "El estudio de los modelos más sencillos queda libre de la acusación de falta de realismo, en la medida que constituyen el prototipo de otros modelos ulteriores más realistas pero también más complicados".

todo x_i' en X_i, el conjunto $\{x_i \in X_i \mid x_i \succ_i x_i'\}$ es convexo. Esto admite preferencias para las que sus curvas de indiferencia son bandas o regiones;

3. El conjunto de producción agregado Y puede reemplazarse por un conjunto de producción Y cerrado y convexo que lo contenga y que origine los mismos consumos sostenibles que Y. Esta hipótesis permite que el conjunto de producción agregado no sea necesariamente convexo, lo que implica que el conjunto de producción agregado pueda exhibir regiones con rendimientos crecientes a escala;

4. El supuesto de irreversibilidad del conjunto de producción agregado [d.4'], resulta ser una hipótesis superflua. Utilizando nuevas técnicas matemáticas puede excluirse.

El modelo Arrow-Debreu en forma diferencial

El siguiente teorema muestra las condiciones bajo las que existe un equilibrio utilizando el cálculo diferencial.

Teorema 5. La economía de propiedad privada **EP** = $((X_i, U_i), (Y_j), (w_i), (\theta_{ij}))$ tiene un equilibrio si

para todo i se satisfacen [a.1], [a.2], [a.3], [c] y $U_i : X_i \to R$ es una función de utilidad, diferenciable dos veces con continuidad, monótona creciente y cuasicóncava estricta; y,

para todo j $f_j : R^l \to R^l$ es una función de producción, diferenciable dos veces con continuidad, cóncava estricta y que satisface $f_j(0) = 0$;

Prueba. Este es un corolario del teorema 1.

Las hipótesis de este teorema son más restrictivas que las del teorema 1. En particular, la cuasiconcavidad estricta de la función de utilidad del i-ésimo consumidor implica que sus preferencias son estrictamente convexas. La monotonicidad creciente de la función de utilidad del i-ésimo consumidor implica que no existe un consumo de saciedad sobre su conjunto de consumo.

ALGUNAS INTERPRETACIONES Y LIMITACIONES DEL MODELO ARROW-DEBREU

El modelo Arrow-Debreu es estático

La actividad económica se desarrolla en un período de tiempo bien determinado *a priori*: un día, una semana, un mes, un año, etcétera. Cada uno de los consumidores, de los productores y el subastador eligen un plan de consumo, un plan de producción y un vector de precios al comienzo del período y no pueden revisarlos durante el mismo. Esto se conoce en la teoría moderna como consistencia temporal.

El subastador elige un vector de precios que maximiza el valor del exceso de demanda agregado, lo que implica que incrementará el precio de aquellas mercancías para las que existe un exceso de demanda, y reducirá el precio de las mercancías en las que se observa un exceso de oferta. Este proceso es conocido como el *tâtonnement de Walras*. No existe ningún comportamiento dinámico en esta regla. Desde el punto de vista de la Teoría de Juegos, el modelo A-D resulta ser un *juego estático*, por lo que el problema de la existencia de un equilibrio competitivo resulta equivalente al problema de la existencia de un equilibrio de Nash para un juego finito dimensional [Debreu 1982].

Ese comportamiento del subastador es tan sólo suficiente para garantizar la existencia de un equilibrio, pero *no implica la convergencia hacia el equilibrio*. No se pueden hacer consideraciones dinámicas de un modelo que es estático. Además, como se observará más adelante, si la economía se replica en el tiempo, la regla seguida por el subastador no garantiza la convergencia hacia el equilibrio. Realmente, existe una diferencia entre el problema de la existencia y el *modus operandi* del modelo.

Esa regla no es la única que puede seguir el subastador. Walras formuló la siguiente regla de ajuste: considérese que los mercados se encuentran en algún orden y el subastador elige unos precios al comienzo del período, ajustando el precio del primer mercado, manteniendo los demás precios constantes, hasta equilibrarlo. Luego, ajusta el precio de la segunda mercancía, manteniendo los demás precios constantes, hasta que el exceso de demanda de esa mercancía sea cero. El subastador realiza el mismo proceso en todos los mercados. En general, las funciones de exceso de demanda de cada mercancía no dependen únicamente de su propio precio, sino también del precio de otras mercancías, por lo que al equilibrar un mercado se puede causar un exceso de demanda positivo o negativo en otro mercado que se encontraba en equilibrio.[6]

---

6 Este proceso de ajuste no es necesariamente convergente en el tiempo, como lo señala el siguiente teorema: si el sistema es normalizado, es globalmente estable si el jacobiano de las funciones de exceso de demanda tiene una diagonal dominante: si cada elemento de la diagonal es negativo y excede en valor absoluto la suma de todos los otros elementos de su fila. Es decir, el exceso de demanda de cada mercancía es más afectado por cambios en el precio propio que por cambios en los precios de las demás mercancías [Intriligator 1971, 241-245].
Nota: el sistema normalizado es el conjunto de las funciones de exceso de demanda cuando una de las funciones ha sido excluida por la ley de Walras. Puede mostrarse que la estabilidad global del sistema normalizado no coincide, nece-

El *tâtonnement* propuesto por Walras se caracteriza porque no ocurren transacciones durante el proceso de ajuste de los precios, es decir, las transacciones no pueden llevarse a cabo fuera de los precios de equilibrio. Esto le obligaba a suponer que el proceso era convergente a través del tiempo. Si el proceso no convergía, no había actividad económica alguna. No solamente es necesario que haya convergencia, sino que, además, ésta debe producirse en un número finito de períodos.

El modelo A-D no exige, necesariamente, que las transacciones se lleven a cabo únicamente a los precios de equilibrio. Arrow consideró una economía de intercambio puro que se lleva a cabo en un tiempo dividido en períodos y en la que todas las mercancías duran únicamente un período y en cada uno de ellos los agentes reciben unas dotaciones iniciales, idénticas para todos los períodos [Hahn 1987]. En este modelo, los agentes pueden intercambiar por fuera del equilibrio sin importar si la economía converge o no a él pero con la condición que a cualquier vector de precios no se afecten los excesos de demanda de los períodos siguientes.

Cuando se analiza la dinámica del modelo A-D, en el que se considera que la economía es estacionaria, es decir, que los conjuntos de consumo, las preferencias de los consumidores, los conjuntos de producción y las dotaciones iniciales no varían,[7] *la ley de la oferta y la demanda* no garantiza que a partir de un vector de precios inicial, la economía tienda a través del tiempo a una situación de equilibrio. Se requiere imponer condiciones adicionales bastante fuertes sobre las funciones de exceso de demanda de cada mercancía.

El primero en atacar el problema fue Samuelson, quien sólo pudo establecer condiciones sobre la estabilidad local del sistema por medio de la linealización del sistema dinámico original. No se estableció, sin embargo, ninguna conclusión sobre la estabilidad global, es decir, sobre la convergencia hacia el vector de precios de equilibrio independientemente de los precios iniciales.

En 1958, Arrow, Block y Hurwicz encontraron condiciones para garantizar la estabilidad global del equilibrio general [Takayama 1984]. Una condición suficiente es que todos los bienes sean *sustitutos brutos a todos los niveles de precios*, es decir, que si el precio de un bien disminuye (au-

---

sariamente, con la estabilidad global del sistema no normalizado [Takayama 1984, 313-319].

7 Una clase de procesos de *no tâtonnement* es aquella donde se presenta una variación en el tiempo de la economía, es decir, una variación en los conjuntos de consumo, o en las preferencias de los consumidores, o en los conjuntos de producción y/o en las dotaciones iniciales.

menta) la demanda de todas las demás mercancías debe disminuir (aumentar). Otra condición alternativa es que las funciones de exceso de demanda agregada satisfagan el *axioma débil de preferencia revelada*. Para un consumidor individual, este axioma dice que si a un vector de precios p el consumidor revela directamente preferida x a x' donde $x \neq x'$, entonces no puede revelar x' directamente preferida a x a cualquier nivel de precios p'. Es interesante anotar que este axioma sobre las funciones de demanda agregada no se deduce del comportamiento racional de los agentes [Takayama 1984].

La Teoría del equilibrio general competitivo y el capitalismo

Uno de los más grandes prejuicios que se tiene ante la teoría del equilibrio general competitivo, aun en su formulación en el modelo A-D, es considerar que defiende implícita o explícitamente el *capitalismo*. Se ha querido asociar la teoría del equilibrio general competitivo con la defensa teórica del capitalismo y más aún, se ha argumentado que es una explicación del propio capitalismo.

No entendemos esa postura académica y no sabemos de dónde provenga. Lo cierto es que el modelo A-D no incluye categorías de las que caracterizan a una economía capitalista o a una socialista. Por ejemplo, la economía planificada a la Lange [1938] es compatible con la estructura del modelo A-D. Tal vez la confusión proviene de dos fuentes de tergiversación semántica: la noción de *mercado* y la definición de una economía de *propiedad privada*.

La noción de mercado

Pareciera que en la literatura económica no formal se concibe al mercado como antónimo de planificación y como sinónimo de *libre mercado*. De forma análoga, se concibe el libre mercado como competencia perfecta. El concepto que subyace al de competencia perfecta no es el de rivalidad entre agentes, sino todo lo contrario: es una noción pasiva donde los agentes son precio aceptantes. En el lenguaje económico cotidiano, la noción de competencia es de rivalidad entre firmas: cada una trata de jugar estratégicamente con el objeto de apoderarse de cierta parte del mercado o de excluir a las otras firmas. Este sentido de la competencia no está presente en el concepto de *competencia perfecta*. De otra parte, la definición en el modelo A-D de la noción de *mercado* es la de una entidad (a veces sitio geográfico) donde las demandas y ofertas de los agentes se agregan. No significa una economía sin intervención estatal.

La noción de economía de propiedad privada

Pareciera que la definición de economía de propiedad privada de Debreu ha conducido a identificarla con una de tipo capitalista. Nótese que la noción de Debreu es la de una economía donde los consumidores son dueños de sus dotaciones iniciales y participan en los beneficios de las firmas (definición 8). El teorema de existencia presentado más arriba corresponde a una economía de este tipo. Quizás sea esa una de las fuentes de la mala interpretación, ya que se asocia el concepto de *propiedad privada* a uno equivalente al de una economía capitalista o que lo implica. Además, Debreu muestra que el Teorema de Existencia del Equilibrio se tiene para cualquier economía **E** tal como ha sido definida:

Teorema 6. El estado $((x_i^*), (y_j^*))$ es un equilibrio relativo a p^* para una economía **E** si y sólo si $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$ es un equilibrio de una economía de propiedad privada **EP** derivada de **E** especificando apropiadamente las dotaciones iniciales y las participaciones de los consumidores en los beneficios de los productores.

Prueba. Ver Debreu [1959].

Es decir, se puede probar la existencia de un equilibrio competitivo para una economía, independientemente de la propiedad privada de las dotaciones iniciales y de las participaciones de los consumidores en los beneficios de las firmas. Con esto queda claro que el modelo A-D es compatible con una economía de tipo capitalista y con una planificada del tipo Lange.

Quizás las nociones de mercado y competencia perfecta mal entendidas lleven a algunos a relacionar esta teoría con la ideología neoliberal, de defensa del libre mercado. En vista de lo anterior, es claro que la Teoría del Equilibrio General competitivo formalizada en el modelo A-D *no* es una defensa del libre mercado y de la no intervención estatal en la economía.

La función de producción agregada y la noción de capital

Desde la aparición del artículo de Joan Robinson [1953], se ha debatido en torno a la agregación del capital en lo que suele llamarse la 'Teoría neoclásica'. Se argumenta que una función de producción agregada de la forma $Y = f(K, L)$ es inconsistente si no se define en qué unidades de medida se agregan el capital y el trabajo. Fue una crítica válida en el sentido que llamó la atención sobre la forma en que se deben agregar las cantidades físicas.

Se ha querido asociar a veces esta crítica al modelo A-D. Sin embargo, este modelo no contiene una teoría del capital.[8] La forma en que se

8 Es de anotar que Debreu nunca utiliza la palabra *capital* en su obra.

agregan las mercancías es perfectamente consistente porque, una vez definida su noción, se agregan tan sólo mercancías homogéneas. En ningún momento se agregan cuando son heterogéneas: no se requiere una medida para agregar, por ejemplo, máquinas con edificios, palas o cualquier mercancía que se clasifique como factor capital. En realidad, el modelo no pretende agregar las mercancías en tres tipos de factores como tierra, capital y trabajo; sólo suma las mercancías medidas en las mismas unidades. Esta confusión ha generado críticas infundadas que han obscurecido y prejuiciado el estudio serio de la teoría.

Sin embargo, la crítica es válida en el caso de algunos modelos neoclásicos, aunque no los descalifica puesto que reconoce que éstos arrojan luz sobre una gran cantidad de estudios macroeconómicos.

La convexidad y los rendimientos a escala

Son frecuentes las afirmaciones relacionadas con la incompatibilidad entre el modelo A-D y los conjuntos de producción que exhiben rendimientos crecientes a escala. Al respecto, conviene hacer dos aclaraciones:

1. La hipótesis de convexidad del conjunto de producción agregado implica que la tecnología de la economía total admite rendimientos no crecientes a escala, es decir, rendimientos constantes y decrecientes a escala. Es posible, entonces, que existan conjuntos de producción individuales con etapas de rendimientos crecientes a escala.

La exclusión de los rendimientos crecientes a escala no es arbitraria. Dado un vector de precios, si la tecnología exhibe exclusivamente rendimientos crecientes no existe un plan de producción que maximice el beneficio: si existe un plan de producción que genere un beneficio positivo, al incrementar arbitrariamente la escala de producción se incrementará indefinidamente el beneficio. Obsérvese que si, además de ser cerrado, el conjunto de producción fuera acotado, existiría un plan de producción maximizador del beneficio aun con rendimientos crecientes. Es decir, el modelo A-D admite rendimientos crecientes a escala si los conjuntos de producción son cerrados y acotados.

2. Para demostrar la existencia de un vector de precios de equilibrio, Debreu [1959] supone que el conjunto de producción de la economía es convexo. Las hipótesis no exigen que los conjuntos de producción de cada productor sean convexos.[9] Sin embargo, puede mostrarse que existe un plan de producción que maximiza sobre el conjunto de producción agregado si y sólo si los planes de producción individuales correspon-

9 Obsérvese que un conjunto convexo puede ser la suma de conjuntos no convexos.

dientes a ese plan de producción agregado maximizan el beneficio sobre sendos conjuntos de producción individuales. Luego los conjuntos de producción individuales no pueden exhibir rendimientos crecientes a escala exclusivamente, porque si se presentaran no existiría un plan maximizador del beneficio. Es perfectamente consistente con el modelo que algunos productores tengan porciones de sus conjuntos de producción con rendimientos crecientes a escala.

El significado de la competencia perfecta

Competencia perfecta se define como una situación en la que los consumidores y los productores no pueden influir por medio de sus decisiones sobre los precios del mercado; es decir, los agentes toman como dados los precios para determinar sus planes de demanda y oferta. Es la actitud de los agentes hacia el mercado lo que define una estructura de mercado; en particular, si los consumidores y los productores, independientemente de cuántos sean, son tomadores de precios, nos enfrentamos a una situación de competencia perfecta.

Un número grande de productores y consumidores no es una característica propia de la competencia perfecta. Ella muestra tan sólo en qué contexto es más probable observar una conducta competitiva por parte de los consumidores y productores: es más plausible que los agentes tomen los precios como dados si ellos creen que son una parte ínfima del mercado y creen que no tienen la capacidad de alterar los precios. Por ejemplo, si hay un pequeño número de productores en un mercado específico y ellos consideran que no pueden afectar el precio del producto, estamos en presencia de un mercado perfectamente competitivo.

La definición de competencia perfecta requiere una figura como la del subastador porque si los consumidores y productores determinan conjuntamente los precios, no es claro cómo ellos mismos puedan tomar los precios como dados. La exclusión del subastador implicaría un alejamiento de la competencia perfecta y conduciría a modelos donde los agentes son fijadores de precios.

Una característica que usualmente se atribuye a la competencia perfecta es que el número de firmas es variable en una industria de acuerdo con los beneficios que los productores obtengan dentro de ella. Si todos los conjuntos de producción individuales exhiben rendimientos constantes a escala, los beneficios óptimos son cero, y para algunos vectores de precios el plan de producción es indeterminado. Por tanto, si el número de productores es una variable, es indeterminado. Si los conjuntos de producción exhiben rendimientos decrecientes a escala y el número de productores es una variable, el tamaño óptimo de planta es infinitesimal y el número de firmas indeterminado. Esto parecería una debilidad del modelo A-D. Sin embargo, el número de consumidores y productores se considera dado en el modelo. El modelo es estático y no puede responder a una pregunta de carácter dinámico: la determinación del número óptimo de firmas en competencia perfecta.

Los teoremas fundamentales de la Economía del Bienestar

El primer teorema de la Economía del Bienestar (teorema 3) afirma que un *equilibrio es un Óptimo de Pareto.* Las condiciones bajo las que se obtiene esta conclusión son bastante restrictivas: convexidad de los conjuntos de consumo y de las preferencias y no saciedad local alrededor de los consumos de equilibrio, para todos los consumidores.

El segundo teorema de la Economía del Bienestar (teorema 4) afirma que dada una asignación óptima de Pareto, ésta puede ser soportada por un vector de precios diferente de cero. Las hipótesis bajo las que se tiene este resultado son aún más restrictivas que las del primer teorema. Además de la convexidad de los conjuntos de consumo y de las preferencias para todos los consumidores, se requiere la continuidad de las preferencias, la exclusión del caso en el que la riqueza sea el mínimo del conjunto de consumo y la convexidad del conjunto de producción agregado.

Dado un equilibrio correspondiente a unas dotaciones iniciales, el primer teorema del bienestar afirma que éste es un Óptimo de Pareto y que, dado este Óptimo de Pareto, deben especificarse las dotaciones iniciales de los consumidores para que, según el segundo teorema del bienestar, éste sea el equilibrio inicial.

Debe observarse que la noción de Óptimo de Pareto es *independiente* de la forma como están distribuidas las dotaciones iniciales entre los consumidores; sólo depende de las cantidades agregadas de mercancías existentes en la economía (dotaciones iniciales y oferta); mientras, la noción de equilibrio depende de la forma como estén distribuidas las dotaciones iniciales. Es por esto que se puede afirmar que un equilibrio es un Óptimo de Pareto muy especial, es decir, todo equilibrio es un refinamiento del concepto de Óptimo de Pareto.

Es muy importante notar que el teorema está especificado para una economía **E** y no para una economía de propiedad privada **EP**. Así, la condición de optimalidad de Pareto del equilibrio es válida para cualquier economía caracterizada por los conjuntos de consumo completamente preordenados, los conjuntos de producción y las dotaciones agregadas.

El modelo A-D muestra las condiciones bajo las que existe un equilibrio y es un Óptimo de Pareto. Debe enfatizarse que la noción de optimalidad de Pareto no es necesariamente deseable para la economía porque no implica ningún criterio de justicia y equidad. La noción de Óptimo de Pareto es un concepto muy débil como criterio normativo: existen asignaciones óptimas que son inequitativas en el sentido que algunos consumidores pueden obtener todas las mercancías de la economía, y los demás, ninguna cantidad de ellas.

Como el modelo A-D es estático no es posible afirmar que la economía tienda en el tiempo a un equilibrio eficiente en el sentido de Pareto. Está claro entonces, que del modelo A-D *no* se puede inferir que el *libre juego de las fuerzas del mercado* 'conduzca' a situaciones óptimas.

El modelo de equilibrio general A-D no afirma que si se aseguran los supuestos del teorema 1, la economía *real* va a tender en algún sentido dinámico a un equilibrio. Evidentemente, el concepto de equilibrio es sólo una construcción mental útil que sirve para entender ciertos fenómenos del mundo real. Como afirma Machlup,

> el equilibrio no debería entenderse más que como un recurso mental para llevar a cabo experimentos mentales [...] el equilibrio no es bueno ni malo; no es sino el punto imaginario en el cual los resultados deducidos de una causa propuesta pueden considerarse como completos [1967, 52].

El modelo Arrow-Debreu es vacío

El modelo A-D se dice *vacío* porque no es econométricamente implementable. Esta afirmación se sustenta en el conocido teorema elaborado por Sonnenschein, Mantel y Debreu [Debreu 1974].

Definición 14. Sea $P = \{p \in R^l_+ \mid \| p \| = 1\}$ el conjunto de los vectores de precios estrictamente positivos con norma euclídea unitaria,

Un consumidor es un par $(\preceq_i, w_i)$ donde $\preceq_i$ es un preorden completo, continuo, monótono y convexo estricto, y w_i es un vector en R^l_+;

Una función $z_i : P \to R^l$ es una función de exceso de demanda del i-ésimo consumidor si para todo $p \in P$, $w_i + z_i(p)$ es un mayor elemento de $\{x_i \in R^l_+ \mid px_i \leq pw_i\}$ para $\preceq_i$.

Definición 15. Una economía de intercambio puro E' se define por:

Para cada i = 1, 2, ..., m un preorden $\preceq_i$ sobre R^l_+ y $w_i \in R^l_+$.

Definición 16. Una función continua $z: P \to R^l$ es una función de exceso de demanda para la economía de intercambio puro $E' = ((R^l_+, \preceq_i), w_i)$ si para todo p en P, $pz(p) = 0$.

Teorema 7. (Sonnenschein-Mantel-Debreu). Sea z una función de exceso de demanda, para todo $\varepsilon > 0$, existen m consumidores cuyas funciones de exceso de demanda individual suman z sobre $S_\varepsilon = \{p \in P \mid \text{para todo } h, p_h \geq \varepsilon\}$.

Prueba. Ver Debreu [1974].

El teorema muestra que una función continua que satisfaga la ley de Walras (pz(p) = 0 para todo p en P) es la suma de un número finito de funciones de exceso de demanda individual. Dicho de otra forma, cualquier función continua que satisfaga la ley de Walras proviene de un comportamiento maximizador de las preferencias por parte de los consumidores. Además, dicha descomposición no es única; es decir, una función de exceso de demanda agregada puede provenir de diferentes sumas de funciones de excesos de demanda individual. Esto implica que si se conoce una función de exceso de demanda agregada, es imposible deducir las funciones de exceso de demanda de los consumidores. Así, es imposible realizar ejercicios econométricos dado que no es posible determinar de qué economía de intercambio puro proviene una función de exceso de demanda agregada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arrow, Kenneth y Debreu, Gerard. 1954. "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy", *Mathematical Economics* [1983].

Arrow, Kenneth y Hahn, Frank. 1971. *Análisis general competitivo,* Fondo de Cultura Económica, México, versión en español 1977.

Debreu, Gerard. 1959. *The Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium,* Cowles Foundation, Yale University.

Debreu, Gerard. 1962. "New Concepts and Techniques for Equilibrium Analysis", *Mathematical Economics* [1983].

Debreu, Gerard. 1970. "Economies with a Finite Set of Equilibria", *Mathematical Economics* [1983].

Debreu, Gerard. 1974. "Excess Demand Functions", *Mathematical Economics* [1983].

Debreu, Gerard. 1982. "Existence of Competitive Equilibrium", *Handbook of Mathematical and Economic Theory,* II, Arrow e Intriligator, editores, North-Holland Publishing Company.

Hahn, Frank. 1987. "Auctioneer", *The New Palgrave: General Equilibrium,* John Eatwell, Murray Milgate y Peter Newman, editores, The Macmillan Press Limited, 1989.

Hildenbrand, Werner. 1983. "Introduction", *Mathematical Economics* [1983].

Intriligator, Michael. 1971. *Mathematical Optimization and Economic Theory*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nueva Jersey.

Koopmans, Tjalling. 1957. *Tres ensayos sobre el estado de la ciencia económica*, Antoni Bosch, Barcelona.

Lange, Oskar. 1938. *Sobre la teoría económica del socialismo*, Ediciones Ariel, Barcelona, 1970.

Machlup, Fritz. 1967. "Equilibrio y desequilibrio", *Semántica económica*, Siglo XXI editores, México, versión en español 1974.

Mathematical Economics: Twenty Papers of Gerard Debreu, 1983. Cambridge University Press.

Nash, John. 1950. "Equilibrium Points in N-person Games", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.*, 36.

Robinson, Joan. 1953. "La Función de Producción y la Teoría del Capital", *Capital y crecimiento*, Harcourt y Laing, compiladores, Fondo de Cultura Económica, México, versión en español 1977.

Samuelson, Paul. 1947. *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, Cambridge.

Takayama, Akira. 1984. *Mathematical Economics*, segunda edición, Cambridge University Press.

Von Neumann, John. 1937. "A Model of General Economic Equilibrium", *Review of Economic Studies*, 13, traducción 1945.

Wald, Abraham. 1936. "On Some Systems of Equations of Mathematical Economics", *Econometrica*, 19, traducción 1951.

Walras, León. 1874. *Elements of Pure Economics*, Londres: Allen y Unwin, versión en inglés 1954.