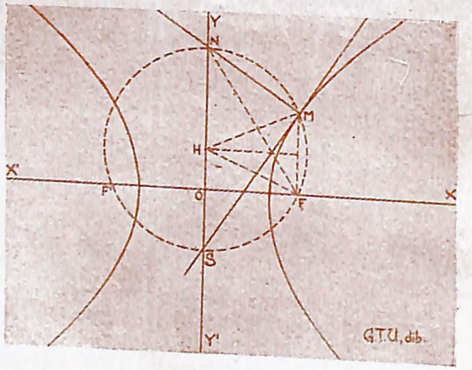
Trabajos originales

TEOREMA I°

En toda hipérbola el producto de los interceptos sobre el eje de las Y (eje no trasverso) de la tangente y normal a un punto cualquiera de la curva, es constante e igual al cuadrado de la semi-distancia focal, con signo negativo.



DEMOSTRACION

El teorema en cuestión dice que $SO \times ON = -c^2$. La ecuación de la tangente a la hipérbola en un punto (x, y) es: $\frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} = 1$ que para $X = o$ da $Y = SO = -\frac{b^2}{y}$ (1)

La ecuación de la normal en ese punto es:

$Y - y = \frac{-a^2 y}{b^2 x}(X - x)$ que para $X = o$ da: $Y = ON = y + \frac{a^2 y}{b^2} = \frac{y(a^2 + b^2)}{b_2} = \frac{c^2 y}{b^2}$ (2).

Multiplando (1) y (2); $SO \times ON = -\frac{b^2}{y} \frac{c^2 y}{b^2} = -c^2$ L. Q. S. Q D.

COROLARIO I

De la igualdad (1) resulta: $SO.\ y = -b^2$ que se enuncia: el

producto de la ordenada en el origen de la tangente a un punto cualquiera de la hipérbola y la ordenada de este punto es constante e igual al cuadrado del semidiámetro menor b, con signo negativo.

COROLARIO II

Lo mismo, de la ecuación (2) se deduce: $\frac{y}{ON} = -\frac{b^2}{c^2}$ es decir: "La relación entre la ordenada de un punto cualquiera de una hipérbola y el intercepto de la normal sobre el eje trasverso es constante e igual a $\frac{b^2}{c^2}$".

Se deduce también el siguiente teorema, de mucho interés:

TEOREMA II

"Un punto cualquira de una hipérbola, los focos y las intersecciones de la tangente y normal en ese punto, con el eje no trasverso están sobre una misma circunferencia.

DEMOSTRACION

Con NS como diámetro describamos una circunferencia. Según el teorema anterior se tiene: Valor absoluto de SO x Valor absoluto de $ON = c^2 = OF^2$. Luégo F está sobre la misma circunferencia y F' también por simetría. L. Q. S. Q. D.

COROLARIO I

"El lugar geométrico de las intersecciones de las perpendiculares en los puntos medios de los radios vectores de una hipérbola es el eje no trasverso". En efecto, si H es el centro del círculo, HM = HF y por tanto la perpendicular bajada de H sobre el radio vector FM caerá en su punto medio. Como H. está sobre el eje no trasverso se deduce lo que se quería demostrar.

COROLARIO II

Se deduce un procedimiento muy sencillo para trazar la tangente y normal a la hipérbola por un punto dado sobre la curva: se levanta la perpendicular en el punto medio de uno de los radios vectores hasta encontrar el eje no trasverso; haciendo centro en este punto H con un radio HF se corta en S y N. Las rectas MS y MN serán la tangente y normal respectivamente, en M.

La misma regla se aplica a la elipse cambiando "eje no trasverso" "por eje menor".