#233

La intuición y la lógica en matemáticas

(V. nuestro número 4)

Cosa extraordinaria! Si releemos las obras de los antiguos, nos sentiremos llevados a clasificarlos todos entre los intuitivos. Y, no obstante, la Naturaleza resulta siempre la misma, y no es probable que haya comenzado a crear en este siglo espíritus amantes de la lógica.

Si nos fuera posible colocarnos en la corriente de ideas q' dominaban en su tiempo, reconoceríamos que muchos de aquellos antiguos geómetras eran analíticos por sus tendencias. Euclides, por ejemplo, ha levantado una especie de andamiaje erudito, donde sus contemporáneos no podían encontrar ningún defecto. En esta amplia construcción, en que cada pieza, sinembargo, responde a un sentimiento intuitivo, podemos todavía hoy, sin grandes esfuerzos, ver la obra de un lógico.

No han cambiado, pues, los espíritus, sino las ideas; los intuitivos han permanecido siendo los mismos, pero sus lectores les han exigido más concesiones.... ¿Cuál es el motivo de esta evolución?

Es muy fácil descubrirlo, La intuición no puede darnos el rigor, ni siquiera la certidumbre, y esto lo hemos observado todos. Citemos algunos ejemplos: sabemos que existen funciones continuas desprovistas de derivadas. Nada más chocante para la intuición que esta proposición que nos impone la lógica. Nuestros padres no hubieran dejado de decir: "Es evidente que toda función continua tiene una derivada, puesto que toda curva tiene una tangente". Cómo es posible que la intuición nos engañe hasta este punto? Pues es porque cuando tratamos de imaginar una curva, no podemos representárnosla sin espesor; de igual manera q' cuando nos imaginamos una recta la vemos siempre bajo la forma de una banda de cierta latitud, y aunque sabemos perfectamente que estas líneas no tienen espesor, y nos esforzamos también en imaginarnoslas cada vez más delgadas para aproximarnos al límite, nunca llegamos a él.

Y claro está que podremos siempre representarnos estos dos hilos delgadísimos, rectilíneo el uno y curvilíneo el otro ,en tal posición que se toquen ligeramente el uno sobre el otro, sin atravesarse; siendo así llevados, a menos de no ser advertidos por un análisis riguroso, a la conclusión de que una curva tiene siempre una tangente. (1)

Tomaré como segundo ejemplo el principio de Dirichlet, sobre el cual descansan tantos teoremas de física matemática, que hoy se establecen por razonamientos muy concluyentes, pero muy largos, y que antes, por el contrario, eran objeto de una demostración breve. Una cierta integral, dependiente de una funcinó arbitraria no puede, nunca anularse. Se deduciría así, que debe tener un mínimo. El defecto de este razonamiento salta inmediatamente a la vista, porque empleamos el término abstracto de **función** y estamos familiarizados con todas las singularidades que pueden presentar las funciones, cuando se entiende esta palabra en el sentido más general.

Pero no había sucedido lo propio si nos hubiésemos servido de imágenes concretas, si hubiéramos, por ejemplo, considerado esta función como un potencial eléctrico, pudiéndose creer legítimo en este caso afirmar que el equilibrio electroestático puede ser alcanzado. Sinembargo, quizá una comparación física hubiése despertado alguna vaga desconfianza; pero si hubiéramos tenido cuidado de traducir en el lenguaje de la geometría, intermedio entre el del análisis y el de la física, aquellas desconfianzas no hubiesen surgido, y quizá se podría, aun hoy, engañar a algunos lectores desprevenidos.

La intuición no nos da, por lo tanto, la certidumbre. Hé aquí por qué era precisa la evolución; veamos ahora cómo se ha hecho.

No se tardó en advertir que no podría introducirse el rigor en los razonamientos si no se empezaba por introducirlo ante todo en las definiciones. Los objetos, de cuyo exámen se ocupan los matemáticos hace ya mucho tiempo, estaban mal definidos; se creía conocerlos, porque se les representaba con los sentidos en la imaginación; pero no se tenía de ellos más que una imagen grosera y no una idea precisa sobre la cual pudiera fundarse el razonamiento. En este sentido realizaron los lógicos todos sus esfuezos. Empecemos por el número inconmensurable. La idea vaga de continuidad, que debíamos a la intuición, se ha resuelto en un sistema complicado de desigualdades establecidas sobre números enteros. Por este lado, las dificultades que procedían del paso al límite, o de la consideración de los infinitamente pequeños, han sido definitivamente resueltas.

No quedan hoy en análisis más que números enteros, o sistemas finitos o infinitos de números enteros, unidos entre sí por una red de relaciones de igualdad o desigualdad.

Las *matemáticas*, como queda dicho, se han **aritmetizado.** (2)

III

La primera cuestión que se nos presenta: Está completamente terminada esta evolución? Hemos llegado por fin al rigor absoluto? En cada estadio de la evolución, nuestros padres *creían* haberle alcanzado? Si ellos se *engañaban*, no nos engañamos también *nosotros?*

Cuando creemos que en nuestros *razo*namiento hemos prescindido del *senti*miento intuitivo, los filósofos nos dirán que estamos equivocados y que hemos padecido una verdadera ilusión: La lógica pura no nos llevaría más que a tautologías, porque ni consigue crear nada nuevo, ni puede salir de ella ninguna ciencia.

Aquellos filósofos tienen razón en un sentido; para hacer aritmética, como para hacer geometría, o para hacer otra ciencia cualquiera, hay necesidad de alguna cosa más que la lógica pura. Y esta otra cosa no podemos designarla con otra palabra que la de **intuición.** Pero cuantas ideas diferentes se ocultan bajo unos mismos nombres?

Comparemos estos cuatro axiomas:

1o.—Dos cantidades iguales a una tercera, son iguales entre sí.

2o.—Si un teorema es verdadero para el número 1 y si se demuestra que es verdadero para n -|- 1, con tal que lo sea para n, lo será también para todos los números enteros.

3o.—Si sobre una recta el punto C está entre A y B, y el punto D entre A y C, el punto D estará entre A y B.

4o.—Por un punto no se puede trazar más que una paralela a una recta.

Los cuatro deben ser atribuídos a la intuición, y, sin embargo, el primero es el enunciado de una de las reglas de la lógica formal; el segundo es un verdadero juicio sintético **a priori,** además de ser *el fundamento de la inducción matemática rigurosa; el tercero es una especie del llamamiento a la imaginación, y el último es una definición disfrazada.*

La intuición no se funda exclusivamente sobre el testimonio de nuestros sentidos, porque éstos resultarían bien pronto impotentes; es imposible, por ejemplo, representarnos el kilógono, y no obstante, podemos razonar por intuición sobre los polígonos en general, en los cuales está comprendido aquel como caso particular.

Todo el mundo sabe lo que Poncelet entendía por el **principio de continuidad.** Lo que resulta verdadero en una cantidad real, decía Poncelet, debe serlo también para una cantidad imaginaria; lo que es verdadero en la hipérbola, cuyas *asíntotas son reales, tiene que serlo igualmente en la elipse, cuyas asímtotas son imaginarias.*

Poncelet era uno de los espíritus más intuitivos del siglo diecinueve; lo era con pasión, con ostentación, casi mirando el principio de continuidad como una de las concepciones más atrevidas; y sinembargo, este principio sólo descansaba sobre el testimonio de nuestros sentidos, siendo, por lo tanto, contradictorio asimilar en este testimonio la hipérbola con la elipse. No había en ello más que una especie de generalización precoz e instintiva que no pretendo defender.

Tenemos, pues, muchas clases de intuiciones; en primer término la que invocamos con los sentidos y la imaginación; después la generalización por inducción, calcada, por decirlo así, sobre los procedimientos de las ciencias experimentales; y tenemos por último la intuición del número puro, de donde ha salido el segundo de los axiomas que enunciaba hace un momento, y que puede engendrar el verdadero razonamiento matemático.

Las dos primeras no pueden darnos la certidumbre, como he demostrado más arriba con ejemplos; pero, quién dudará seriamente de la tercera, quién dudará de la aritmética?

Por consiguiente, en el análisis de hoy, cuando se quiere proceder con verdadero rigor, no hay más que silogismos o llamamientos a esta intuición del número puro, que es la única que no puede engañarnos, y hasta es posible decir hoy que el rigor absoluto está conseguido.

Henri Poincaré

NOTAS

(1). Es evidente que el lector no iniciado en el estudio de las matemáticas hallará demasiado oscuro y poco apto para dilucidar el concepto de Poincaré sobre que la intuición en matemáticas no puede darnos el rigor, el ejemplo de las funciones continuas desprovistas de derivadas. Ofreciendo excusas a los lectores sí iniciados en tales estudios, damos aquí algunas nociones elementales sobre las funciones derivadas, con lo cual esperamos darle completa claridad al ejemplo del ilustre matemático.

Cuando una variable y depende de otra variable x de tal manera que a cada valor dado arbitrariamente a x corresponde un valor único y determinado de y, se dice que y es una función de x y esta dependencia de las dos cantidades variables se indica por el símbolo

$$y = F(x)$$

La cantidad x se llama variable independiente porque puede dársele arbitrariamente cualquier valor. Supongamos que se le dan dos valores, a y $a + h$: la función toma dos valores correspondientes $F(a)$ y $F(a + h)$. A la cantidad h se le llama *incremento* de la variable independiente y la diferencia positiva o negativa

$$F(a + h) - F(a).$$

es el incremento de la función. Una función es continua cuando se puede darle a h un valor bastante pequeño para que el incremento de la función resulte tan pequeño como se quiera. Los incrementos de la función y de la variable independiente se suelen designar por la notación Δy, Δx.

Sea ahora la función

$$y = F(x)$$

y x, x_1, dos valores de la variable independiente comprendidos en un intervalo en que la función sea continua. Si dejando a x un valor fijo se hace tender el incremento Δx hacia cero, el incremento Δy de la función también tiende hacia O, pero la relación

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

tiende en general hacia un límite determinado, que depende de la naturaleza de la función dada y, en general, del valor fijo x. Este límite es una nueva función de x, que se llama la *derivada* de F (x) y se la representa por alguno de los símbolos

$$y', \; F'(x), \; Dy, \; DF(x), \; \frac{dy}{dx}$$

De modo que la derivada de una función es el límite hacia el cual tiende la relación entre el incremento de esta función y el incremento de la variable, cuando este último tiende hacia cero. Esta definición analítica se expresa comunmente por

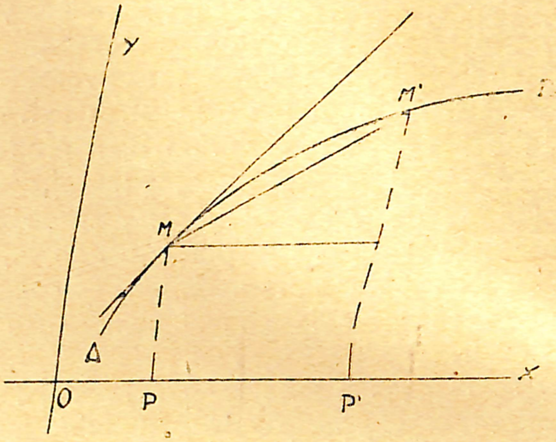
$$F'(x) = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Con la expresión *hacer tender* una cantidad como h hacia cero, se quiere significar simplemente que se le asignan valores cada vez más pequeños a esa cantidad, pero no es fácil ver que con esa operación del pensamiento la expresión

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

tienda hacia un valor límite, bien determinado en cada caso, pues si de una vez hacemos h=O obtenemos cero sobre cero, justamente el símbolo de la indeterminación.

Esta dificultad de la definición analítica de la derivada de una función se subsana con la interpretación geométrica siguiente, que aclara de una vez lo de "los hilos delgadísimos, rectilíneo el uno y curvilíneo el otro, en tal posición que se tocan sin atravesarse".



La ecuación y = F (x), referida a dos ejes, OX y OY, representa una cierta curva AMB, como se ve en la figura. Las "coordenadas" del punto M de la curva, supuesto fijo, son OP=x, PM=y. Consideramos un segundo punto de la curva, M', cuyas coordenadas son

$$OP' = x + \Delta x,$$
$$P'M' = y + \Delta y.$$

Si Δx tiende hacia cero, Δy tiende igualmente hacia cero, pero la relación $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiene por límite la derivada F' (x). Ahora bien, esa relación es la cantidad que fija la dirección de la secante MM', que por cierto se llama coeficiente angular de esa secante; cuando M' se acerca a M, la secante tiende hacia una posición límite y determinada, que es la tangente a la curva en el punto M. Así la derivada es igual al coeficiente angular de la tangente llevada a la curva representativa de la función en el punto M de coordenadas x e y.

La existencia de la derivada implica la de la tangente, y recíprocamente. Por eso dice Poincaré que nuestros padres no hubieran dejado de decir: "Es evidente que toda función continua tiene una derivada, puesto que toda curva tiene una tangente". (En un punto dado, se entiende).

(2). Cuando no había sobre los números inconmensurables otra teoría distinta a la de Euclides, la representación gráfica de las funciones, como la que acabamos de considerar en la nota precedente, permitía a los geómetras interpretar el significado de los valores irracionales de las variables y de las funciones. *En esa teoría, un número inconmensurable, era, por definición, la relación entre dos magnitudes geométricas inconmensurables entre sí, tales como el lado del cuadrado y la diagonal.* Al determinar la medida de la diagonal del cuadrado construído sobre la unidad de longitud, se puede ver que el cuadrado de tal medida es igual a 2. Si elevamos al cuadrado la serie infinita de los números conmensurables, obtendremos números que van aumentando constantemente, pero ninguno de ellos será igual a 2. Resulta de eso que el número 2 divide los números racionales en dos clases que contienen respectivamente: la primera, los números racionales cuyos cuadrados son menores que 2; la segunda, los números racionales cuyos cuadrados son mayores que 2. Estas dos clases de números se caracterizan por la propiedad siguiente: se puede determinar una serie infinita de números de la primera clase, *a la cual corresponderá una serie infinita de números de la segunda clase, a condición de que la diferencia entre dos números cualesquiera tomados respectivamente en esas dos series, sea menor que un número cualquiera h,* por pequeño que sea. Los números de la primera serie miden longitudes menores que la diagonal del cuadrado y conmensurables con el lado de ese cuadrado, mientras que los números de la segunda serie miden longitudes mayores que la diagonal y también conmensurables con el lado. Esto talvez nos da una idea de esa "vaga idea de la continuidad" de los números inconmensurables de que habla Poincaré.

En la teoría moderna de los números, los irracionales se definen por pura aritmética, independientemente de toda operación de medida de magnitudes, sean geométricas o de cualquiera otra especie, estableciendo un sistema de números ordinales (en cierto orden), sobre el cual se funda después la teoría de la mensura. En particular, las coordenadas de un punto en un plano se definen por números, y no por longitudes, los que se asignan de acuerdo con alguna regla. La teoría de las funciones ha podido desarrollarse así sin referencia a gráficos, o coordenadas, o longitudes. El proceso mediante el cual el análisis matemático se ha liberado de toda consideración sobre medida de cantidades, es lo que llaman "aritmetización del análisis". Recordemos que Poincaré contrapone a dos grandes matemáticos alemanes, Weierstrass y Riemann, el primero como de espíritu analítico, geómetra el segundo (ver Dyna, pág. 196). El nombre de Karl Weierstrass corresponde en la historia de las matemáticas a uno de los más distinguidos leaders del análisis aritmetizado en el siglo diecinueve, como corresponde el de Jorge Federico Riemann a uno de los más ilustres fundadores de la física matemática en ese mismo siglo.

C. G. de la C.

Los últimos descubrimientos sobre el hombre fósil

243

El hombre gardareno

Un descubrimiento notable ha sido anunciado recientemente por el doctor F. C. C. Hansen, profesor de anatomía de la Universidad de Copenhague. El profesor Hansen es la autoridad más destacada en todo lo que se refiere a la antropología de Groenlandia, y su monografía sobre la craneología del esquimal, es el tratado tipo de esta clase de estudios. Recibió de Groenlandia, poco ha, una serie de huesos humanos descubiertos en unas excavaciones practicadas en un cementerio del siglo XII, contiguo a la iglesia catedral del Gardar (Igaliko), al sudoeste de Groenlandia. Encontráronse en una tumba los restos de un obispo, que tenía a su lado el báculo y un anillo de oro en un dedo; las demás sepulturas