

# ANALISIS DE LAS ARMADURAS CONTINUAS POR MEDIO DE LA DISTRIBUCION DE MOMENTOS EN LOS EXTREMOS FIJOS

Por **HARDY CROSS**

N. de la R.:

DYNA preocupada por tener a los estudiantes de la Escuela de Minas y a todos sus lectores al corriente de los últimos sistemas empleados por los hombres de ciencia en lo relacionado con la ingeniería, publica hoy una traducción de un método para el análisis de armaduras estáticamente indeterminadas, enunciado y explicado por el profesor Illi Nois, en mayo de 1930, que ha sido muy bien recibido por los ingenieros norteamericanos especialistas en el cálculo de estructuras.

## SINOPSIS

El objeto de esta exposición es explicar brevemente un método que ha sido útil en el análisis de las armaduras estáticamente indeterminadas. La idea esencial que el autor desea presentar no encierra relaciones matemáticas excepto alguna de la más sencilla aritmética. Al aplicar el método es necesario determinar matemáticamente ciertas constantes, pero los medios que deben usarse para determinarlos no se discuten en esta exposición ni son ellas una parte del método. Esas constantes han sido derivadas por varios escritores y en varias formas diferentes entre sí, que no vale la pena repetir aquí esos métodos.

Las reacciones en vigas, tramos y arcos que están empotrados en sus extremos han sido extensamente discutidas. Ellas pueden encontrarse con relativa facilidad por métodos que son más o menos estandarizados. El método de análisis que aquí se presenta permite derivar de ellos los momentos, cizalladuras y empujes requeridos en el diseño de armaduras continuas complicadas.



## DEFINICIONES

Por ser muy importante, se dan a continuación las definiciones de tres términos: "momentos de extremos empotrados" (fixed-end moment), "rigidez" (Stiffness), y "factor de traslación" (Carry-over factor).

1o. Por momento de **'extremos empotrados'** en un miembro se entiende el momento que existiría en los extremos del miembro si estos estuvieran impedidos para la rotación.

2o "Rigidez" en el sentido aquí usado es el momento en un extremo de un miembro (que está rígidamente soportado en ambos extremos) necesario para producir una rotación unitaria en este extremo cuando el otro está fijo.

3o. "Factor de traslación": Si un extremo de un miembro colocado en soportes rígidos en ambos extremos se hace girar, en tanto que el otro extremo se sostiene fijo, la relación del momento en el extremo fijo al momento que produce la rotación en el extremo que gira se llama "factor de traslación".

## EFECTO DE LA ROTACION EN LAS UNIONES

Imagínese que a cualquier unión de una estructura, cuyos miembros están deformados bien sea por cargas o por otra causa cualquiera se le impida rotar y luego le sea permitido.

Llámesese la suma algebraica de los momentos de extremos empotrados en la unión el "momento de extremos empotrados desequilibrados".

Antes de que la unión sea libertada este momento de extremos empotrados desequilibrados no será por lo común cero. Después de que la unión es libertada, la suma de los momentos en los extremos debe ser cero. El cambio total en los momentos extremos debe ser por lo tanto igual al momento de extremos fijos desequilibrados. Este puede establecerse en otra forma diciendo que el momento de extremos empotrados desequilibrados ha sido "distribuído" en alguna relación a los miembros que forman la unión.

Cuando la unión es libertada, todos sus miembros giran el mismo ángulo, y esta rotación en el extremo está acompañada por un cambio en los momentos de los extremos. Este cambio es proporcional a la "rigidez" de los miembros.

Por tanto puede decirse que cuando la unión es libertada, el momento desequilibrado del extremo fijo es distribuido entre los miembros de la unión en proporción a su rigidez.

La rotación de unión al producir el equilibrio crea momentos en los otros extremos de los miembros de la unión. Ellos son iguales en cada miembro a los momentos distribuidos en la unión que gira, multiplicado por el factor de traslación del extremo rotor del miembro. Esto se deduce de la definición del "factor de traslación".

### DISTRIBUCION DE MOMENTOS

El método de la distribución de momentos es éste:

A) Supóngase que todas las uniones en la estructura están sostenidas de modo que ellas no puedan rotar y compútense los momentos en los extremos de los miembros para estas condiciones;

B) En cada unión distribúyase el momento desequilibrado en los extremos fijos de los miembros conectantes en proporción a la constante que para cada miembro se definió como su "rigidez".

C) Distribúyanse esos momentos usando el factor de traslación;

D) Repítase el proceso hasta que los momentos que deben trasladarse sean lo suficientemente pequeños para ser despreciados;

E) Súmense todos los momentos (momentos de extremos empotrados, momentos distribuidos, momentos trasladados) en cada extremo de cada miembro para obtener de ese modo el verdadero momento de dicho extremo.

Para las personas inclinadas a las matemáticas lo anterior le parecerá como un método para resolver una serie de ecuaciones simultáneas por medio de aproximaciones sucesivas. Las vigas se cargan en tanto que los extremos o uniones se sostienen rígidos; luego se permite a una de las uniones girar acompañando esto con la distribución del momento desequilibrado en esa unión, y los momentos resultantes se trasladan a las uniones adyacentes; luego se le permite girar a otra unión en tanto que las otras permanecen fijas; y el proceso se repite hasta que todas las uniones vuelven al equilibrio.

### CONSTANTES DE LAS VIGAS

Este método de análisis depende de la resolución de tres pro-



blemas en la mecánica de los materiales. Son ellos la determinación de los momentos en los extremos empotrados, de la rigidez en cada extremo, y del factor de traslación en cada extremo de cada miembro de cada armadura que se considera. La determinación de estos valores no es parte del método de la distribución de momentos y por tanto no se discuten en este estudio.

La rigidez de una viga de sección constante es proporcional al momento de inercia dividido por la luz, y el factor de traslación es igual  $-\frac{1}{2}$ . La prueba o derivación de lo anterior y de las fórmulas para los extremos empotrados se deja al lector. Ellas pueden deducirse por medio del cálculo; por los teoremas de áreas-momentos; por el teorema de los tres momentos, etc. En cualquier manual de estructuras pueden encontrarse fórmulas para vigas de sección uniforme y de extremos empotrados.

### SIGNOS DE LOS MOMENTOS FLEXORES

Es muy importante conservar las convenciones usuales y familiares para los signos de los momentos flexores ya que ellas son convenciones que se usan en el diseño.

Para vigas la conversión común usada es ésta; los momentos positivos son aquellos en que la flexión de la viga se produce hacia abajo. Para los miembros verticales se aplica la misma convención que para las vigas, siempre que la hoja sea girada para leer los miembros verticales de la derecha en la forma en que los miembros verticales en un dibujo son usualmente leídos. Las convenciones comunes para momentos flexores son aplicables tanto a las vigas como a las columnas si ellas se miran en la forma en que el dibujo es usualmente marcado y leído.

Los momentos en la parte superior de una columna, en la forma en que ésta se presenta en la estructura, deberán escribirse encima de la columna, y los de la parte inferior de la columna deben escribirse debajo, cuando la hoja está en la posición indicada para leer las columnas. Esto es necesario, porque los momentos positivos en el extremo derecho de una viga y en la parte superior de una columna representan tendencia a hacer girar la unión indicada en sentido contrario al movimiento del reloj.



En cuanto a las vigas es indiferente escribir los momentos encima o debajo; cualquiera de los dos arreglos puede ser conveniente. La confusión puede evitarse escribiendo los momentos de las columnas paralelos a ellas y los momentos de las vigas paralelamente a éstas. Cuando hay una unión, el momento total a la derecha y a la izquierda del soporte, es el mismo, tanto en valor absoluto como en signo. El momento desequilibrado es la diferencia algebraica de los momentos a ambos lados de la unión.

### RESTRICCIONES DEL METODO

Por el hecho de que los términos "rigidez" y "factor de traslación" se han definido para vigas que reposan en soportes rígidos, se sigue que la aplicación directa del método está limitada a aquellos casos en que las uniones no se mueven durante el proceso de la distribución de momentos. El método, sin embargo, puede ser aplicado en forma indirecta a casos en los cuales las uniones se mueven durante la distribución de momentos como se indicará más adelante. En la forma en que el método ha sido establecido, está restringido únicamente por la anterior condición de que las uniones no se muevan. Si esta condición se llena, es indiferente que los miembros sean de sección variable o constante, curvos o rectos, siempre que las constantes (A) "momentos en los extremos empotrados" en cada extremo, (B) "rigidez" en cada extremo y (C) "factor de traslación" en cada extremo, sean conocidos o puedan determinarse por métodos corrientes y puedan tabularse para diferentes tipos de miembros y condiciones de carga.

Se notará que en la mayor parte de los casos sólo se necesita exactitud en los momentos de los extremos empotrados.

En el ejemplo que sigue se ha asumido que los miembros son rectos y de sección uniforme. Las rigideces, por lo tanto, son proporcionales a los momentos de Inercia ( $I$ ) divididos por las longitudes ( $L$ ), pero los valores relativos dados por  $I : L$  en este problema podrían también ser las rigideces relativas de una serie de vigas de sección variable. En este último caso, sin embargo, los factores de traslación para las vigas no serían  $-\frac{1}{2}$ .





Los momentos en las vigas se describen paralelamente a las vigas. Los de las columnas paralelamente a ellas.

Los momentos de extremos empotrados originales se anotan al pie de los miembros en que concurren. Los momentos que se distribuyen o se trasladan a continuación, se anotan encima o debajo de los miembros, pero alejándolos de ellos.

La siguiente disposición de los momentos en las columnas es una parte esencial de la convención de signos adoptada:

Cuando el papel se tiene en la posición indicada para anotar los momentos, estos momentos se colocan encima de la columna si pertenecen a su parte superior (en B, F y C), y debajo, si pertenecen a su parte inferior (en A, C y G).

El momento en C en la viga B C, se anota encima de la viga para que no estorbe. No importa, sin embargo, que los momentos se anoten encima o debajo de la viga.

Los signos de los momentos de los extremos empotrados se determinan observando la dirección de la flexión, debida a las cargas, en los extremos de los miembros. Para aplicar a las columnas las convenciones ordinarias sobre signos de momentos flectores es necesario hacer girar el dibujo de la estructura.

El lector puede observar que la solución se va efectuando paso a paso. Siempre se trabaja con las últimas cifras mostradas (distribuyéndolas o trasladándolas) de tal modo que en el trabajo de estructuras comunes hay poca probabilidad de confusión respecto a la próxima etapa que debe ejecutarse.

Distribúyanse en cada unión el momento desequilibrado, como sigue:

1); en A no hay momento.

2); en B hay un momento desequilibrado de  $-100$  en un lado de la unión. Este momento se distribuye en B A y en B C en la relación de  $\frac{2}{4}$  de modo que el momento distribuido a B A es  $\frac{2}{2+4} \cdot 100 = 33,33$  y a B C,  $\frac{4}{2+4} \cdot 100 = 66,67$

Los signos que se describen en la única forma posible de balancear la unión teniendo el mismo momento total ( $-33,33$ ) tanto a la izquierda como a la derecha de la unión.

3) En C los momentos desequilibrados son: en CB,  $-100$ , y en CG,  $-50$ , dando un total de  $-150$  a la izquierda de la unión;



en CF, +80, en CD, —200, dando un total de —120 a la derecha de la unión. El momento total desequilibrado en la unión, es la diferencia entre los momentos totales a la derecha y a la izquierda de la unión, en este caso 30. Este se distribuye ahora en las respectivas proporciones, así:

$$\text{a CB, } \frac{4}{4+2+5+1} \cdot 30 = 10 ;$$

$$\text{a CF, } \frac{2}{4+2+5+1} \cdot 30 = 5 ;$$

$$\text{a CD, } \frac{5}{4+2+5+1} \cdot 30 = 12,5 ;$$

$$\text{y a CG, } \frac{1}{4+2+5+1} \cdot 30 = 2,5 ;$$

Hay únicamente una forma de poner los signos de tal modo que el total sea el mismo a ambos lados de la unión. Esto se hace reduciendo el excesivo momento negativo en la izquierda y aumentando el momento negativo en la derecha.

4) En F, el momento desequilibrado es +60. La articulación no tiene rigidez. El momento es, pues, distribuido entre el miembro FC y la articulación, en la relación de 2:0; todo él va al miembro. El momento total balanceado es  $60 - 60 = 0$ , es decir, como debe serlo en un extremo libre.

5) En G, el extremo empotrado es infinitamente rígido y el momento desequilibrado. —50 es distribuido entre el miembro, CG, y el apoyo en la relación 1:∞. Al miembro no le corresponde nada de él; el extremo queda fijo.

6) En D, el momento desequilibrado, —100, se distribuye a DC y a DE en la relación de 5:3.

7) En E, el momento desequilibrado es —10 en la cantiliver. No teniendo rigidez la cantiliver este momento desequilibrado se distribuye entre la viga, ED y la cantiliver en la relación de 3:0. Esto significa que todo corresponde a ED.

Todas las uniones han sido ahora balanceadas. A continuación trasládese de cada extremo de los miembros la mitad del momento



que se acaba de distribuir, cámbiese el signo, y escríbase en el otro extremo del miembro. Así; trasládese, sucesivamente, en AB, 0 de A a B y + 16.67 de B a A; en CB,  $-33.34$  de B a C y  $-5.0$  de C a B; en CF, + 2.5 de C a F y 30 de F a C; en CG, 0 de G a C, y  $-1.25$  de C a G; en CD, 6.25 de C a D y  $-31.25$  de D a C; y en DE, 18.75 de D a E y 5.00 de E a D.

Distribúyanse los momentos que se acaban de trasladar exactamente en la misma forma en que los momentos de extremos empotrados originales fueron distribuidos. Así: en A, 16.67 es distribuido 0 a AB (extremo empotrado) en B,  $-5.0$  es distribuido  $-1.67$  y 3.32; en C, el momento desequilibrado es  $(-33.34 + 0) - (30.00 - 31.25) = -32.09$  que es distribuido así: 2.67, +10.68,  $-5.34$ ,  $-13.35$ ; en F, 2.50 es distribuido tocándole al miembro  $-2.5$ ; G es extremo empotrado; en D, 1.25 se distribuye como  $-0.78$  y  $+0.47$ ; en E, el momento desequilibrado +18.75 es distribuido al miembro como  $-18.75$ .

Los momentos distribuidos están ahora trasladados como antes y luego redistribuidos; el proceso se repite tantas veces como se quiera. El proceso debería detenerse sin embargo después de cada distribución y verificarse para ver si la condición estática (Suma de  $M=0$ ) es satisfecha.

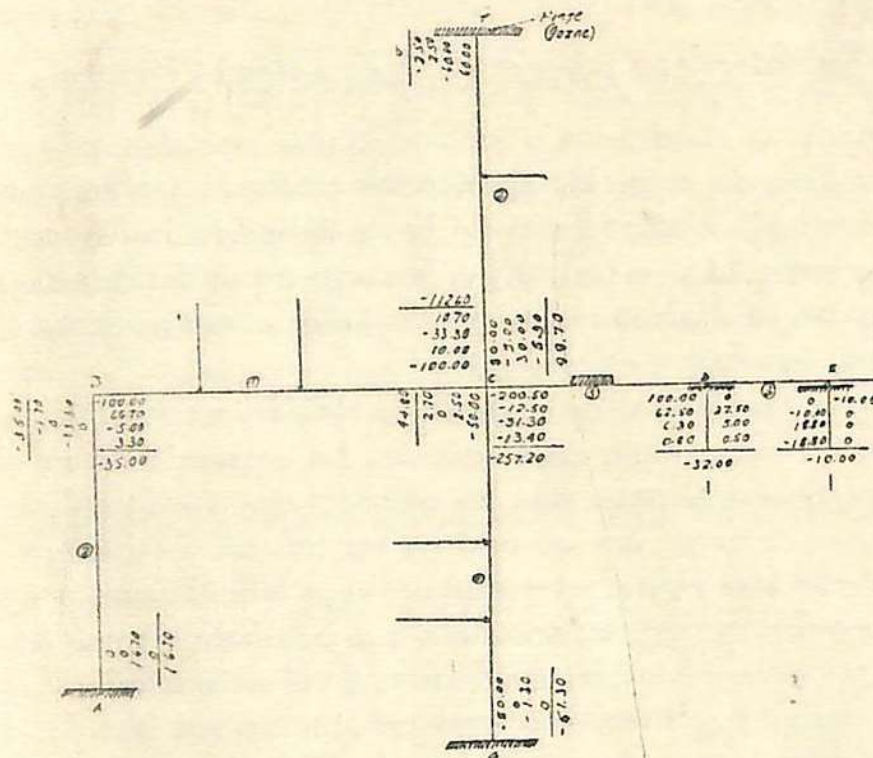
Cuando se nota que el proceso está suficientemente avanzado, todos los momentos en los extremos de cada miembro se suman para obtener el momento total en la unión. Después de que los momentos en las uniones han sido determinados, las otras cantidades, tales como momentos y cizalladuras, pueden obtenerse aplicando las leyes de la estática.

### CONVERGENCIA DE LOS RESULTADOS

La distribución en este caso se ha llevado con más precisión de lo que de ordinario se necesita, con el fin de mostrar la convergencia de los resultados. Los valores sucesivos de los momentos en las uniones después de las distribuciones se han dado en el cuadro (1) con el objeto de mostrar la relación de convergencia.

Para cálculos corrientes el proceso podría haberse terminado después de la segunda distribución. De haberse hecho esto, la solución habría quedado como lo muestra la figura 2. Para cualquier caso práctico los cálculos en este caso habrían terminado después





de la tercera distribución. Corrientemente, dos o tres distribuciones son suficientes. Esto no es verdadero en todos los casos, pero en cualquiera de ellos la exactitud de la solución en cualquiera de sus facces estaría indicada por la magnitud de los momentos trasladados en los miembros.

### VARIACIONES EN EL METODO

El autor ha desarrollado y usado en varias ocasiones algunas variaciones del método expuesto, pero la forma original es en sí misma tan simple y tan fácil de recordar que él mismo se siente inclinado a descartar las variaciones.

Una variación es tal vez interesante de recordar. Es a menudo monótono trasladar momentos al extremo de un miembro que puede moverse libremente y luego balancear el momento y volverlo a llevar atrás. Esto puede evitarse libertando el extremo libre de una vez por todas y dejándolo en esta forma. En este caso, para vigas de sección constante, la rigidez de la viga es los  $\frac{3}{4}$  del valor indica-



do 1:L. (1).

### CORRECCION PARA EL BALANCEO LATERAL

Armaduras cuadradas o trapezoidales, portales, armaduras en L, alcantarillas de caja, las estructuras similares actúan como vigas simples continuas siempre que no haya deflexión transversal. Si son simétricas respecto a la forma y a la carga no se deflectarán a los lados; tampoco se deflectarán hacia los lados si están constreñidas para ello.

El balanceo lateral de armaduras debido a su asimetría es rara vez un factor importante en el diseño. La corrección para el balanceo lateral puede hacerse por un método que puede aplicarse también en caso de carga transversal en los tramos. El método consiste en considerar que el tramo no se deflecta lateralmente y analizarlo como una serie de vigas continuas. La cizalladura total en las patas no será, excepto accidentalmente, igual a la cizalladura que se sabe que existe. La diferencia será una fuerza que impide el balanceo lateral. Ahora supóngase que todas las uniones estén fijas y la parte superior del tramo movida lateralmente. Asíumase una serie de momentos de extremos empotrados en las patas de tal modo que todas ellas tengan la misma deflexión. En este caso para miembros de sección uniforme los momentos de extremos empotrados en las columnas variarán como 1:L<sup>2</sup>. Distribúyase esos momentos de extremos empotrados y encuéntrese la cizalladura total en las patas. Los cambios en los momentos debidos al balanceo lateral y los momentos que se acaban de encontrar estarán en la misma relación algebraica en que están la cizalladura horizontal total desequilibrada en las patas debida al balanceo lateral cuando la armadura se analizó como una viga continua, y la cizalladura que se ha computado.

### TRAMOS DE VARIOS PISOS

Tramos de más de un piso, sujetos a balanceo lateral bien sea debido a un resultado de cargas desequilibradas o a fuerzas horizon-

---

(1). El momento necesario para producir una rotación dada en un extremo de una viga cuando el otro está libre es los  $\frac{3}{4}$  de lo que sería si el extremo estuviera fijo.

Después de que el extremo de la viga se ha libertado no se trasladan momentos a él.



tales, pueden resolverse por este método. Debe comprenderse que la solución exacta de estos problemas no es comúnmente de gran interés. El efecto aproximado se desea más bien que el análisis exacto.

Para analizar por este método un tramo de dos pisos será necesario hacerlo en dos partes, una para cada piso. De la cizalladura asumida en cada piso (produciendo por supuesto cizalladuras en los otros pisos), puede obtenerse un conjunto de valores de momentos. Estos pueden combinarse para obtener las verdaderas cizalladuras, y de las verdaderas cizalladuras pueden encontrarse los momentos verdaderos.

### APLICACIONES GENERALES DEL METODO

El método de distribuir momentos desequilibrados, explicado aquí, puede extenderse hasta incluir fuerzas desequilibradas en las uniones. Extendido en esta forma el método tiene grandes aplicaciones. Reacciones verticales y horizontales pueden distribuirse y trasladarse y así un rápido cálculo del efecto de muchos elementos que complican el diseño. El autor lo ha usado al estudiar problemas tales como series continuas de arcos, el efecto de la deflexión de vigas soportantes, y otros problemas.

Una aplicación sencilla de la distribución de momentos se presenta en el caso de fuerzas secundarias en armaduras. Muchas otras aplicaciones podrán indudablemente presentarse, pero se ha creído mejor limitar éste a las armaduras continuas en las cuales las uniones están fijas.

### CONCLUSIONES

Esta exposición se ha limitado a un método de análisis, porque se ha considerado útil hacerlo en esta forma. Por lo tanto se han omitido los siguientes puntos: 1) Métodos para construir curvas de momentos máximos; 2) métodos para construir curvas de cizalladuras máximas; 3) la importancia de los análisis para continuidad en el diseño de vigas de concreto; 4) esfuerzos de flexión en las columnas de concreto; 5) métodos de construir líneas de influencia; 6) el grado hasta el cual la continuidad existe en estructuras ordinarias de acero; 7) continuidad en estructuras de acero soldadas; 8) deformaciones plásticas más allá del yield point como un elemen-



to para interpretar los cálculos de esfuerzos secundarios; 9) efecto del tiempo de fraguado (time yield) en los momentos y cizalladuras en las vigas continuas de concreto; 10) plasticidad del concreto como un factor en el diseño de las armaduras de concreto; 11) cuando se trata de armaduras de concretos es preferible a adivinar los momentos, sacar los resultados de los estudios hechos por Winkler hace 50 años o calcularlos; 12) efecto de la torsión en los miembros conectantes; 13) economía relativa a las estructuras continuas; 14) flexibilidad relativa de las estructuras continuas; 15) aplicación de los métodos de análisis de armaduras continuas al deseo de baldosas planas; 16) probabilidades de carga y esfuerzos reversos como factores en el diseño de armaduras continuas; 17) la relación de precisión de la determinación de los esfuerzos en las fibras, y otras muchas consideraciones relacionadas con el diseño de armaduras continuas.

El método de análisis tiene valor si él es útil al diseñador. Hay aparentemente tres escuelas de pensamiento respecto al valor de análisis de armaduras continuas. Algunos dicen: "ya que esos problemas no pueden resolverse con exactitud a causa de incertidumbres de carácter físico, por qué ensayar a resolverlos?" Otros dicen: "Los valores de los momentos y cizalladuras no pueden encontrarse exactamente; úsese un método que combine una precisión razonable con la rapidez".

Por fin otros dicen: "Es mejor hacer un análisis absolutamente exacto y luego introducir todas las modificaciones que se juzguen apropiadas de acuerdo con las características íntimas de los materiales".

El autor pertenece a la segunda escuela; respeta el punto de vista de las otras dos, pero encuentra dificultoso comprenderlo. Aquéllos que concuerdan con sus puntos de vista encontrarán en el método aquí explicado una guía útil en el diseño.

Miembros de la última escuela notarán que el método aquí expuesto es absolutamente exacto si la exactitud absoluta se desea. Es un método de aproximaciones sucesivas; no un método aproximado.