

ERRATA: El artículo titulado "CALCULO DE PORTICOS" es propiedad del Dr. Luis de Greiff Bravo. Por un error de imprenta inexcusable, no lleva la revista el nombre del autor.

REVISTA "DYNA"  
Enrique Belis  
Disección.

# Técnica

## CALCULO DE PORTICOS

### El Pórtico de dos articulaciones.

1º) Determinación de las magnitudes hiperestáticas.

Para la determinación de las cuatro reacciones de apoyo (dos reacciones verticales y dos empujes), tenemos únicamente tres ecuaciones de equilibrio. La determinación de la magnitud hiperestática (que aquí suponemos ser  $H_A$ ), se hará teniendo en cuenta que la separación  $l$ , de los apoyos, no varía a causa de las cargas ( $\Delta l = 0$ ).

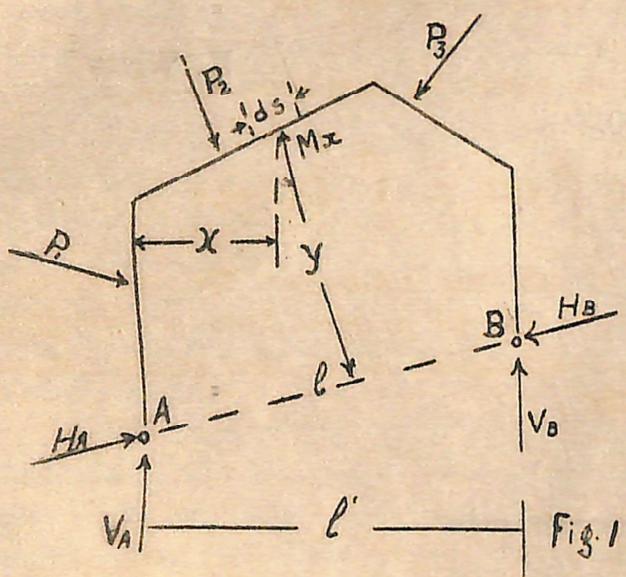


Fig. 1

Supongamos conocidas las verdaderas reacciones de apoyo, y descompongamos el estado de carga total en los dos estados de equilibrio de las figuras 2 y 3. El estado representado en la figura 3 es el mismo que se obtendría suponiendo el apoyo A desplazable horizontalmente, con lo cual se transformaría en una estructura estáticamente determinada (figura isostática fundamental) y sometida a las mismas cargas  $P$ . Todas las magnitudes estáticas

$V_A$ ,  $V_B$ ,  $H_{OB}$ ,  $M_{ox}$ , etc., pueden obtenerse por los procedimientos de la estática elemental. Mediante la superposición de los estados 2 y 3 se obtiene el verdadero estado de solicitud del marco (fig. 1). De manera que se tiene

$$(1) \quad M_x = M_{ox} + M_{x'} = M_{ox} - H_A y$$

A

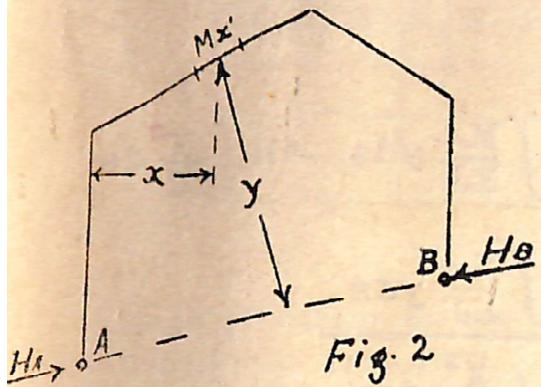


Fig. 2

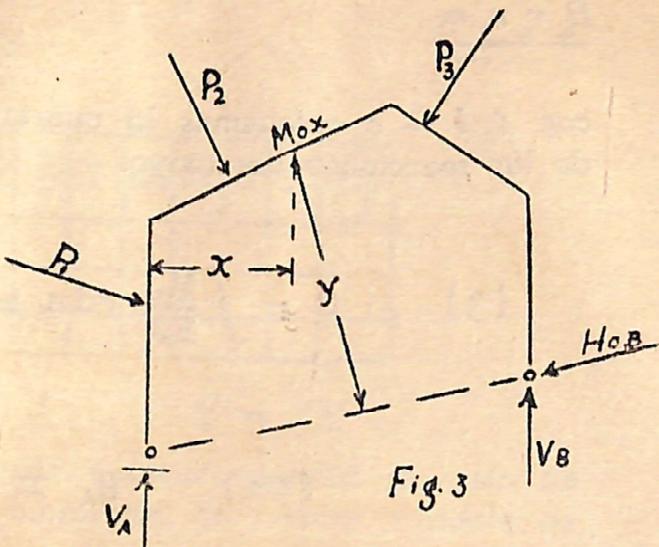


Fig. 3

**M** debe considerarse positivo cuando produce compresión arriba (o afuera) y tensión abajo (o adentro).

Debido a la deformación elástica del elemento  $ds$ , de coordenadas  $x$  y  $y$ , la separación  $l$  de los apoyos se incrementa así:

$$\Delta dl = y dQ = y \frac{M}{EJ} ds$$

y a causa de la deformación de todos los elementos, en

$$(2) \quad \Delta l = \int_0^l y dQ = \int_0^l \frac{M_x}{EJ} y ds$$

La presión normal  $N_x$  y el esfuerzo transversal  $Q_x$ , producen a su vez cambios en la separación de los apoyos. Pero en los pórticos la influencia de  $M_x$  en la deformación, es tal, que puede despreciarse el influjo de  $N_x$  y de  $Q_x$ .

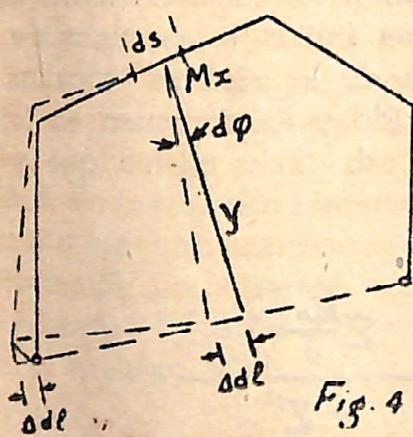


Fig. 4

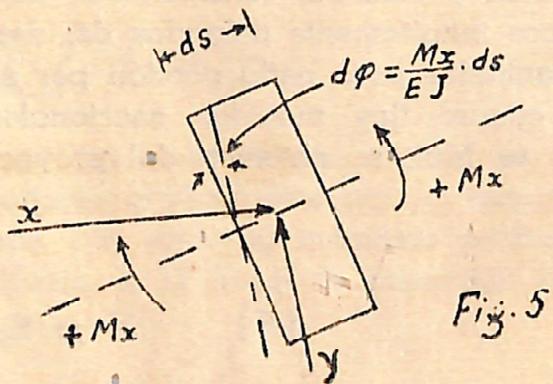


Fig. 5

D y n a

con  $\Delta l = 0$  obtenemos la cuarta ecuación para la determinación de las reacciones de apoyo.

$$(3) \quad 0 = \int \frac{M_{ox}}{EJ} y ds = \int \frac{M_{ox}}{EJ} y ds - H_A \int \frac{y^2}{EJ} ds$$

$$(4a) \quad H_A = \frac{\int \frac{M_{ox}}{EJ} y ds}{\int \frac{y^2}{EJ} ds}$$

$$(4b) \quad H_A = \frac{\int \frac{M_{ox}}{J} y ds}{\int \frac{y^2}{J} ds}$$

$$(4c) \quad H_A = \frac{\int \frac{J_c}{J} M_{ox} y ds}{\int \frac{J_c}{J} y^2 ds}$$

La segunda expresión vale para pórticos homogéneos (**E** constante), la tercera se obtiene multiplicando numerador y denominador con un valor **Jc** convenientemente elegido, que elimina en los cálculos números de muchas cifras.

2( Procedimiento para el cálculo de **HA**

El cálculo de **HA** puede hacerse de manera suficientemente aproximada y sencilla, considerando porciones finitas **s** en lugar de los discos infinitamente delgados **ds**, después de lo cual se calculan las magnitudes para cada porción por separado y se disponen en forma de cuadro (las medidas seccionales **b**, **d**, **J** lo mismo que **y** y **M<sub>o</sub> = M<sub>ox</sub>** se obtienen del proyecto).

$$(5) \quad H = H_A = \frac{\sum \frac{M_o}{J} y s}{\sum \frac{y^2}{J} s}$$

$$\Sigma = \Sigma =$$

Este procedimiento se adapta de manera especial al caso de pórticos de forma irregular y de momentos de inercia variable de las secciones.

Si el pórtico que se investiga está formado por barras rectas con sección constante en las mismas, se puede aplicar el siguiente procedimiento para la obtención rápida del resultado

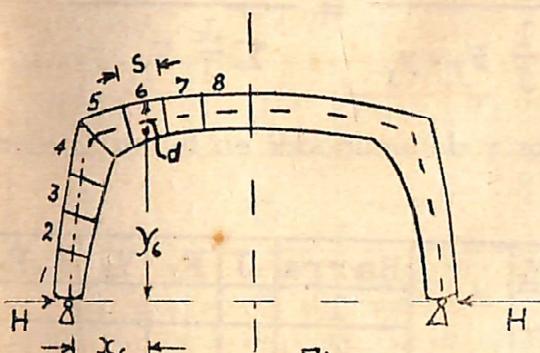


Fig. 6

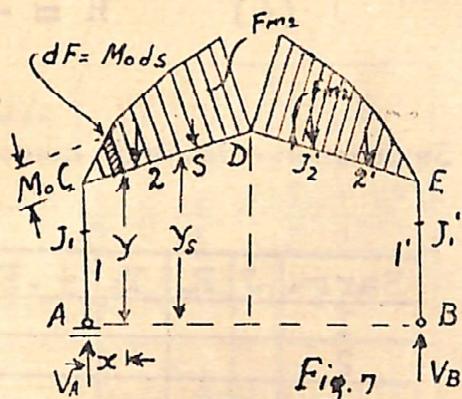


Fig.

En primer lugar, se hacen las integraciones de la ecuación (4) para cada barra por separado, por ejemplo para la barra 2 de la figura 7

$$\int_c^p \frac{M_o}{J} y ds = \frac{1}{J_2} \int_c^p (M_o ds) y$$

( $M_0 d_s$ ) puede considerarse como una masa ficticia situada en el punto  $x, y$  del eje y y puede representarse gráficamente por la faja de superficie  $dF$ . La integral representa por tanto el momento estático de las masas ( $M_0 d_s$ ) con relación a la línea de base  $AB$ . Es igual a la masa total.

$$\int M_o ds = F_m$$

D y n a

multiplicada por la distancia del centro de gravedad  $y_s$ , obtenida por proyección del centro de gravedad de la superficie  $F$ , sobre  $CD$ :

$$\frac{1}{J_2} \int_c^D M_o y ds = \frac{1}{J_2} F_{m_2} y_s$$

De la misma manera puede determinarse la integral del denominador, poniendo (figura 8)

$$\int_c^D \frac{y^2}{J} ds = \frac{1}{J_2} \int_c^D (y ds) y = \frac{1}{J_2} F_{y_2} \cdot Y_{y_2}$$

La magnitud buscada

$$(6) \quad H = \frac{\sum \frac{1}{J} F_m y_s}{\sum \frac{1}{J} F_y \cdot y_y} = \frac{\sum \frac{J_c}{J} F_m y_s}{\sum \frac{J_c}{J} F_y \cdot y_y}$$

Se obtienen calculando numerador y denominador en forma de cuadro.

Barra	J	$F_m$	$y_s$	$\frac{1}{J} \cdot F_m \cdot y_s$	Barra	J	$F_y$	$y_y$	$\frac{1}{J} \cdot F_y \cdot y_y$
1					1				
2					2				
.					.				
.					.				

Numerador:  $\Sigma$

Denominador:  $\Sigma$

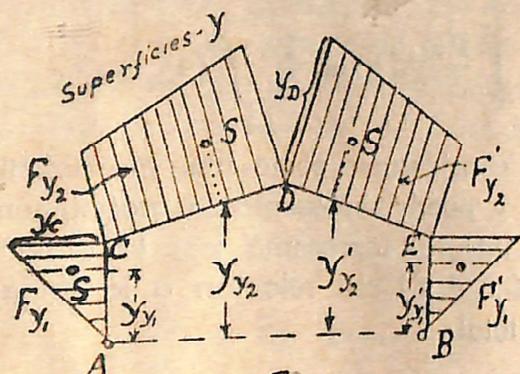


Fig. 8

## D y n a

Para cargas horizontales (viento) o de cualquier dirección, el proceso de cálculo es exactamente el mismo. Las superficies  $M_0$  se determinan con los momeritos producidos por las cargas en la figura isostática fundamental.

Como unidades, son corrientes en la técnica del concreto armado, metros y toneladas.

Para pórticos de formas corrientes y casos de carga muy comunes en la práctica, puede realizarse el cálculo de las magnitudes indeterminadas haciendo uso de fórmulas deducidas de antemano. (Al respecto puede consultarse la excelente obra del Profesor Gleinlogel, "Pórticos simples y marcos", Editorial Labor, Barcelona). En el siguiente ejemplo se indica la deducción de una fórmula para  $H$ , por medio del procedimiento ya explicado.

Barra	$J$	$F_m$	$Y_s$	$\frac{J}{J} F_m Y_s$	$F_y$	$Y_y$	$\frac{J}{J} F_y Y_y$
1	$J_c$	—		—	$\frac{l}{2} \cdot h$	$\frac{2}{3} \cdot h$	$\frac{J_c}{J} : \frac{1}{3} \cdot h^2$
2	$J_2 = J_c$	$\frac{Pab}{2}$	$h$	$\frac{Pab}{2} \cdot h$	$l \cdot h$	$h$	$l \cdot h^2$
1'	$J_c$	—		—	$\frac{l}{2} \cdot h^2$	$\frac{2}{3} \cdot h$	$\frac{J_c}{J} \cdot \frac{1}{3} \cdot h$

$$\sum = \frac{Pab}{2} \cdot h$$

$$\sum \frac{J}{J} F_y Y_y = \frac{J_c}{J} \cdot \frac{2}{3} \cdot h^3 + l h^2$$

$$6a) \quad H = \frac{\frac{P \cdot ab}{2} \cdot h}{\frac{J_c \cdot 2}{J} \cdot h^3 + l h^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Pab}{lh(2K + 3)}$$

D y n a

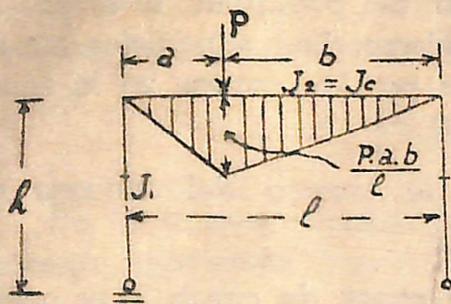


Fig. 9

En que, para abreviar, se ha puesto

$$\frac{J_c \cdot h}{I} = K$$

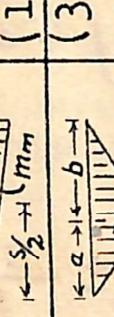
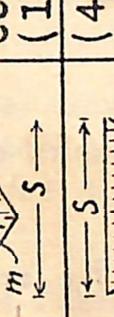
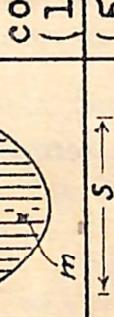
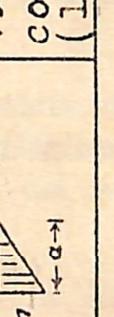
K depende solamente de las dimensiones del marco, no de las cargas.

Para algunos otros casos, se dan fórmulas directas para H, en la página ...

Las superficies Mo y Y tienen formas sencillas para las distintas porciones rectas. De allí que sea fácil calcular las integrales

$$\int M_0 y ds, \int y^2 ds$$

para los casos más corrientes. (Representan volúmenes compuestos por los discos Mo y ds e y.y.ds resp) Las superficies y son trapezios (o triángulos = trapezios con y' = 0); las superficies Mo están formadas por triángulos, trapezios y segmentos de parábola y pueden obtenerse por adición o por substracción, generalmente.

(1)		$y'$	$y''$	(1)	$\int y^2 ds = \frac{s}{3}(y'^2 + y'y'' + y''^2)$
(2)		$m'$	$m''$	(2)	$\int M_o y ds = \frac{s}{6}[y'(2m'+m'') + y''(m'+2m'')]$
		$\frac{s}{2} + m$	$m$	(1)	$= \frac{s}{6}(y'm' + 4y_m m_m + y''m'')$
(3)		$a$	$b$	(3)	$\int M_o y ds = \frac{1}{6}m[s(y' + y'') + y'b + y''a]$
(4)		$s$	$s$	(4)	$\int M_o y ds = \frac{\pi m}{3}(y' + y'') = \frac{\pi}{6}4y_m m$
(5)		$m$	$a$	(5)	$\int M_o y ds = \frac{am}{2}[y' + \frac{a}{3s}(y'' - y')]$

## D y n

Con ayuda de estas fórmulas se pueden desarrollar muchos casos como el de la fig. 9, por ejemplo.

### 3) Consideración de las variaciones de temperatura, retracción y cedimiento de los apoyos.

La influencia de las variaciones térmicas en las estructuras de concreto reforzado varía mucho con las condiciones climáticas y la mayor o menor exposición de la estructura. Puede tomarse como suficiente una oscilación de  $\pm 15^\circ\text{C}$  alrededor de la temperatura media. La retracción se considera en los pórticos como una baja de temperatura de  $t = -15^\circ\text{C}$ . Como coeficiente de dilatación puede tomarse  $\epsilon_t = 0,00001$ . Además  $E = 210.000 \text{ Kg./cm}^2 = 2.100.000 \text{ Kg/m}^2$ . Las deformaciones de apoyo, difíciles de apreciar (aumento de la luz) se desprecian generalmente, aunque sin razón. Es mejor apreciar un posible cedimiento y de allí deducir el aumento de las tensiones.

Un aumento de temperatura de  $t^\circ$ , equivale, en caso de apoyos completamente rígidos, a una disminución de la distancia de apoyos,  $l$ . Así, para  $\pm t^\circ$ :  $\Delta l = \mp \epsilon_t l$ ; para la retracción,  $\Delta l = +\epsilon_t \cdot 15l$ ; para desplazamiento de apoyos: apreciar  $\Delta l$ . Este es positivo para un aumento de  $l$ .

Si actúa únicamente  $\Delta l$ , se tendrá

$$\Delta l = \int \frac{M_x}{EJ} y ds = \int \frac{-H_{de} \cdot y}{EJ} y ds = - \frac{H_{de}}{E} \int \frac{y^2}{J} ds$$

$$(7) \quad H_{de} = - \frac{E \cdot \Delta l}{\int \frac{y^2}{J} ds}$$

y para variación de temperatura de  $-t^\circ$

$$(8) \quad H_t = \pm \frac{E \epsilon_t \cdot t \cdot l}{\int \frac{y^2}{J} ds}$$

El denominador se obtiene según el par. 2.