Ejercicios de estática

EL PORTICO RECTANGULAR CERRADO SOMETIDO A PRESION INTERIOR UNIFORME.

Preséntase esta estructura en el estudio de silos y tanques cuya altura sea considerable en relación a las dimensiones de la planta. Es una vez estáticamente indeterminada. Como magnitud hiperestática conviene considerar el momento de flexión en las cuatro esquinas, igual por razones de simetría, a saber: $Ma = Mb = Mc = Md$. Véase la fig. 1. En la Fig. 2 se indica el diagrama de momentos de flexión.

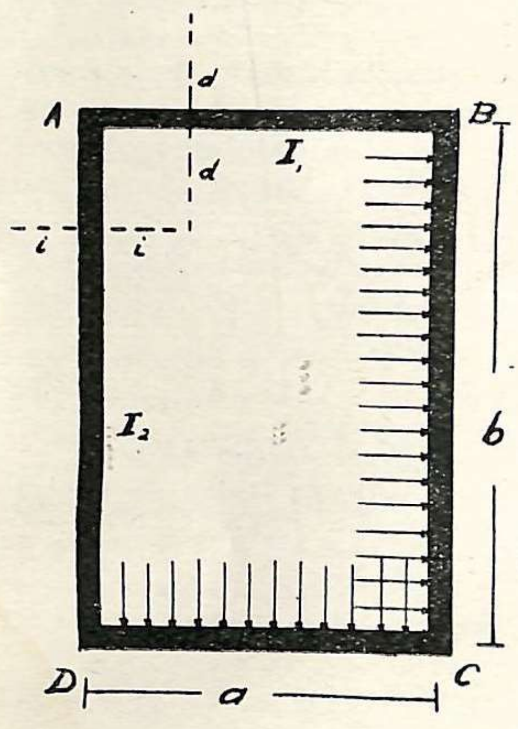

Fig 1

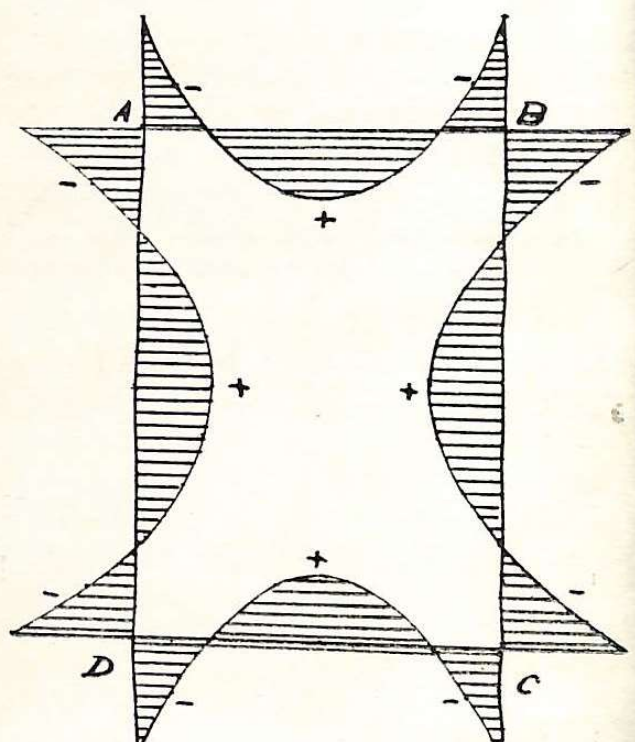

Fig 2

Resolución del pórtico.

PRIMER METODO. — Determinación de *Ma* por las deformaciones angulares.

Se admite como base de cálculo de los pórticos que el ángulo formado por los ejes de las piezas permanece invariable en magnitud. (Gira o se desplaza solamente).

Entonces, si llamamos a y b las luces; I_1 e I_2 los momentos de inercia de las secciones; las deformaciones para la viga A-B tendrán los siguientes valores.

Debido a la carga uniforme $= \dfrac{Pa^3}{24EI_1}$ (1)

Debido al momento desconocido: $\dfrac{M_A . a}{2EI_1}$ (2)

O sea : $\ominus_{Ad} = \dfrac{Pa^3}{24EI_1} + \dfrac{M_A . a}{2EI_1}$

Permutando las letras podemos escribir para la viga de luz b :

$$\ominus_{Ai} = \frac{Pb^3}{24EI_2} + \frac{M_A b}{2EI_2}$$

Ahora bien, por tenerse $\ominus_{Ad} + \ominus_{Ai} = 0$ deberá cumplirse la ecuación

$$\frac{Pa^3}{24EI_1} + \frac{M_A . a}{2EI_1} + \frac{Pb^3}{24EI_2} + \frac{M_A b}{2EI_2} = 0$$

Esta ecuación puede escribirse así:

$$\frac{Pa^2}{12I_1/a} + \frac{Pb^2}{12I_2/b} + \frac{M_A}{I_1/a} + \frac{M_A}{I_2/b} = 0$$

Llamando k el cociente de las relaciones de rigidez I_1/a e I_2/b vale decir

$$K = \frac{I_1 b}{I_2 a}$$

la ecuación quedará así: $\dfrac{Pa^2}{12} + \dfrac{Pb^2K}{12} + M_A(1+K) = 0$

y finalmente $M_A = -\dfrac{P}{12}\,\dfrac{a^2+b^2K}{1+K}$ (3)

Caso en que los lados y los momentos de inercia son iguales.

Basta introducir en la fórmula general (3) el valor $k = 1$, para tener:

$$M_A = -\frac{P}{12} a^2$$

Este es el momento de apoyo de una viga totalmente empotrada.

Momentos en las secciones interiores

Valen:

$$Mx\text{-}x = \frac{Px}{2}(a-x) + M_A$$

$$My\text{-}y = \frac{Py}{2}(b-y) + M_A$$

Caso en que I_1 es igual a I_2

Llamando $t = \frac{b}{a}$ la fórmula (3)

produce:

$$M_A = -\frac{P}{12} \times \frac{a^3+b^3}{a+b} = -\frac{P}{12} \times \frac{1+t^3}{1+t} \cdot a^2$$

Cuadro de coeficientes para el cálculo de momentos de flexión:

$P = \frac{b}{a}$	$\frac{1+t^3}{1+t}$	Le	La
1.000	1.000	12.00	24.00
0.900	0.910	13.20	20.30
0.800	0.840	14.30	18.20
0.700	0.790	15.20	16.90
0.600	0.760	15.80	16.20
0.500	0.750	16.00	16.00

$$Ma = -\frac{Pa^2}{Le} \qquad Ma = -\frac{Pa^2}{La}$$

SEGUNDO METODO.

Podemos obtener la indeterminada aplicando la ecuación:

$$\varnothing_2 - \varnothing_1 = \int \frac{Mds}{EI}$$

entre dos secciones, que no tengan rotación relativa al sufrir la deformación. Tal sucede para las secciones 1-1 y 2-2 correspondientes a los centros de los lados. (Fig. 3)

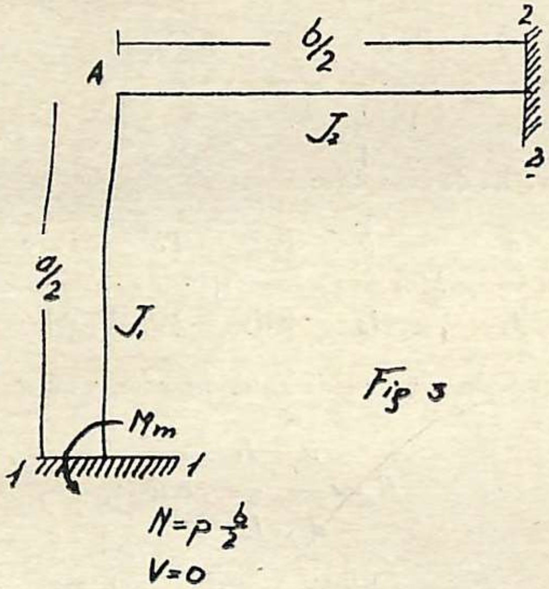

Fig 3

Como aquí es $\varnothing_2 - \varnothing_1 = 0$ tendremos: $\int \frac{Mds}{EI} = 0$

Ahora bien el momento de flexión en la porción comprendida entre 1-1 y A vale

$$Mm + \frac{Py^2}{2}$$

y en la porción entre A y 2-2

$$Mm + \frac{Pa^2}{8} + \frac{Px^2}{2} - \frac{Pbx}{2}$$

Entonces $\quad \frac{1}{I_1} \int_0^{\frac{a}{2}} \left(Mm + \frac{Py^2}{2} \right) dy$

$$+\frac{1}{I_2}\int_0^{\frac{b}{2}}\left(Mm+\frac{Pa^2}{8}+\frac{Px^2}{2}-\frac{Pbx}{2}\right)dx=0$$

La primera integración da:

$$\frac{1}{I_1}\left[Mm\frac{a}{2}+\frac{Pa^3}{48}\right]$$

y la segunda:

$$\frac{1}{I_2}\left[Mm\frac{b}{2}+\frac{Pa^2b}{16}+\frac{Pb^3}{48}-\frac{Pb^3}{16}\right]$$

Por consiguiente ha de cumplirse

$$Mm\frac{a}{I_1}+Mm\frac{b}{I_2}+\frac{Pa^3}{24I_1}+\frac{Pb^3}{24I_2}+\frac{Pa^2b}{8I_2}-\frac{Pb^3}{8I_2}=0$$

Con la simplificación introducida anteriormente, a saber

$$K=\frac{b}{a}\cdot\frac{I_1}{I_2}\text{, resulta}$$

$$Mm\,(1+K)+\frac{Pa^2}{24}+\frac{Pb^2K}{24}+\frac{Pa^2K}{8}-\frac{Pb^2K}{8}=0$$

$$Mm\,(1+K)+\frac{Pa^2}{24}+\frac{Pa^2K}{8}-\frac{Pb^2K}{12}=0$$

$$Mm\,(1+K)+\frac{Pa^2}{24}(1+K)+\frac{1}{12}Pa^2K-\frac{1}{12}Pb^2K=0$$

$$Mm+\frac{Pa^2}{24}+\frac{PK}{12(1+K)}(a^2-b^2)=0$$

$$Mm=-\frac{Pa^2}{24}-\frac{PK}{12(1+K)}(a^2-b^2)=0$$

$$Mm + \frac{Pa^2}{8} = -Ma = -\frac{1}{12} Pa^2 - \frac{PK}{12(1+K)} (a^2 - b^2)$$

$$Ma = -\frac{P\ a^2(1+K) - PK(a^2 - b^2)}{12(1+K)}$$

$$Ma = -\frac{P\ (a^2 + b^2 K)}{12(1+K)}$$

que coincide con la fórmula anterior.

TERCER METODO.

Por la energía de deformación.

La energía de deformación de medio pórtico podemos expresarla así:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{Mx^2 dx}{EI_1} + \frac{1}{2} \int_0^b \frac{My^2 dy}{EI_2} \qquad (1)$$

donde

$$Mx = \frac{Px}{2} (a - x) + Ma$$

$$(2)$$

$$My = \frac{Py}{2} (b - y) + Ma$$

La magnitud indeterminada es tal que hace mínima la energía de deformación. Por consiguiente ha de tenerse:

$$\frac{dA}{dMa} = \int_0^a \frac{Mx}{EI_1} \cdot \frac{dMx}{dMa} dx + \int_0^b \frac{My}{EI_2} \frac{dMy}{dMa} dy = 0 \qquad (3)$$

Pero de (2) se obtiene $\frac{dMx}{dMa} = 1$, $\frac{dMy}{dMa} = 1$

Con lo que la ecuación anterior puede escribirse:

$$\int_0^a \frac{Mx\,dx}{EI_1} + \int_0^b \frac{My}{EI_2}\,dy = 0$$

Multiplicando por EI_1 se tiene:

$$\int_0^a Mx\,dx + \frac{I_1}{I_2} \int_0^b My\,dy = 0$$

Ahora introducimos los valores de Mx y My para tener:

$$\int_0^a \left[\frac{Px}{2}(a-x) + Ma \right] dx + \frac{I_1}{I_2} \int_0^b \left[\frac{Py}{2}(b-y) + Ma \right] dy = 0$$

y efectuando las integraciones

$$Ma \,.\, a + Ma \frac{I_1}{I_2} b + \frac{P}{2} \left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \right) + \frac{P}{2} \frac{I_1}{I_2} \left(\frac{b^3}{2} - \frac{b^3}{3} \right) = 0$$

Con sencilla reducción se tiene

$$Ma \left(1 + \frac{I_1}{I_2} \frac{b}{a} \right) + \frac{Pa^2}{12} + \frac{P}{12} \frac{I_1}{I_2} \frac{b}{a} \times b^2 = 0$$

$$Ma\,(1+K) = -\frac{P}{12}(a^2 + b^2 K) \qquad Ma = -\frac{P}{12} \frac{a^2+b^2K}{1+K}$$

CUARTO METODO.

Por la aplicación del teorema de los tres momentos:

Como no hay desplazamiento vertical relativo podemos aplicar el teorema de los tres momentos como si se tratara de una viga de dos tramos. Se tendrá en este caso, imaginando apoyos en B, A, y D:

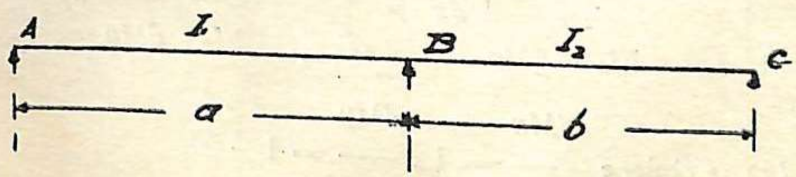

Fig 4

$$M_B \cdot \frac{I_1}{a} + 2\, M_A \left(\frac{I_1}{a} + \frac{I_2}{b} \right)$$

$$+ M_D \frac{I^2}{b} + 6 \cdot \frac{1}{24} Pa^3 \frac{1}{I_1} + 6 \cdot \frac{1}{24} Pb^3 \times \frac{1}{I_2} = 0$$

$$3M_A + 3\, M_D \times K = - \frac{1}{4} Pa^2 - \frac{1}{4} Pb^2\, K$$

$$M_A = - \frac{P}{12} \frac{a^2+b^2K}{1+K}$$

Ingo. **LUIS DE GREIFF BRAVO**
Profesor de la Facultad