RAIZ CUADRADA

La extracción de una raíz cuadrada por el método aritmético es una operación bastante engorrosa, que se olvida facilmente por su escasa ocurrencia y que no se ha podido mecanizar, como lo exige la vida moderna, al menos en las calculadoras corrientes.

De los métodos de cálculo aritmético y logarítmico no trataré en este artículo por ser bastante conocidos de los estudiantes de matemáticas; estudiaré solo dos métodos aplicables a las máquinas calculadoras usuales.

El primero de estos métodos se basa en el estudio de una serie aritmética, según se verá más adelante, y se encuentra en los manuales de instrucciones de algunas marcas de calculadoras. El segundo ha sido desarrollado por el suscrito con base en el binomio $(a+b)^2$ y es el principal objeto del presente artículo pues lo encuentro bastante más cómodo y mecánico que el anterior. No creo que el método sea original en el sentido que ordinariamente se le da a esta palabra; sólo anoto el hecho de que no pude encontrar ninguna publicación al respecto cuando tuve la urgencia de un método práctico y rápido para calcular mecánicamente la fórmula $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ que se ocurre con bastante frecuencia en la medida de lotes de terreno por medio de triángulos, y en la cual se requiere gran precisión. Me mueve a publicarlo la creencia de que su aplicación puede ahorrar mucho trabajo a todos los que tengan a bien utilizarlo.

METODO Nº 1

(Basado en la serie de los números impares)

Sabemos que una serie aritmética es de la forma: $a, a+d, a+2d, a+3d \ldots$ $a+(n-1)d$ y que su suma es $S = \frac{a+l}{2} \times n$, en la cual a es el primer término, l el último y n el número de términos. Reemplazando l en función de a, d (diferencia entre dos términos consecutivos) y n se tiene $l = a + (n-1)d$ y

$$S = \frac{n}{2}\,[2a+(n-1)d].$$

Si suponemos que $a=1$ y $d=+2$ nos queda $S = \frac{n}{2}\,[2+(n-1)d] = n^2$. Ahora bien, la serie aritmética que empieza por 1 y cuya diferencia es $+2$, es la serie de los números impares cuya suma según lo anterior es igual al cuadrado del número de términos.

Teóricamente pues para extraer la raíz cuadrada de un número bastaría restar sucesivamente los números impares hasta que el número se redujera a 0 ó hasta que el minuendo fuera menor que el próximo término a restar: el número de restas sería la raíz buscada. Esta es la base matemática del método pero requiere alguna simplificación, pues tal como se ha expuesto es impracticable ya que el número de sustracciones sería igual a la raíz.

El método práctico lo da la observación del siguiente cuadro que se ha elaborado con un ejemplo numérico, la cantidad 534.480.000 cuya raíz cuadrada aproximada a una unidad por defecto es 23.118. Según lo demostrado anteriormente el número 534.480.000 igual a la suma de los primeros 23.118 números impares, a partir de la unidad, suma aproximada, porque dicha cantidad no es un cuadrado perfecto.

Descomponiendo el número 23118 así: 10.000 + 10.000 + 1.000 + 1.000 + 1.000 + 100 + 10 + 8 podemos formar varias series parciales cuyo número de términos está indicado por cada uno de los sumandos en que hemos descompuesto el número. Cada serie es continuación de la anterior y la primera comienza en la unidad. Los términos en que empieza y termina cada serie parcial lo mismo que la suma de cada una de ellas se han computado con las fórmulas anotadas arriba.

Series parciales	Número de Términos	Suma de cada serie
1 + 3 + 5 + ... + 19.999	10.000	100.000.000
20.001 + 20.003 + ... + 39.999	10.000	300.000.000
40.001 + 40.003 + ... + 41.999	1.000	41.000.000
42.001 + 42.003 + ... + 43.999	1.000	43.000.000
44.001 + 44.003 + ... + 45.999	1.000	45.000.000
46.001 + 46.003 + ... + 46.199	100	4.610.000
46.201 + 46.203 + ... + 46.210	10	462.100
46.221	1	46.221
46.223	1	46.223
46.225	1	46.225
46.227	1	46.227
46.229	1	46.229
46.231	1	46.231
46.233	1	46.233
46.235	1	46.235
TOTAL	TOTAL	TOTAL
1 + 3 + 5 + 7 + ... + 46.235	23.118	534.441.924

La diferencia entre la suma de la serie 1 + 3 + 5 .... + 46.235 = 534.441.924 con el número 534.480.000 es menor que el próximo término 46.237 de la serie de los impares lo que indica que la raíz esta comprendida entre los siguientes límites: $23.118 < \sqrt[2]{534.480.000} < 23119$.

Del estudio del cuadro podemos deducir el método práctico para extraer la raíz, el cual por supuesto no requiere el empleo del análisis anterior, que hemos traído aquí a título de información para mostrar su fundamento matemático.

A primera vista notamos que si del número 534.480.000 vamos restando las sumas de las series parciales, el número de vueltas de la palanca, que va quedando marcado en la correspondiente casilla de la calculadora, nos va dando las diversas cifras de la raíz: en el lugar de las centenas de millón restamos primero 1 y después 3, con lo cual se anota el número 2 en el contador de vueltas. Luégo se observa que el sustraendo siguiente está formado por el número par siguiente al último impar que se ha restado, en este caso 4, acompañado de la unidad a su derecha, con lo cual queda un número impar, 41, el cual se resta corriendo un lugar a la derecha de donde se restaron los impares anteriores. En seguida del impar así formado se restan los impares siguientes (en nuestro ejemplo 41,43 y 45) hasta que, llegado uno que no se puede restar, se pasa a buscar el sustraendo siguiente en la forma indicada (en el ejemplo el último impar restado fue 45, el par siguiente es 46, al cual se le agrega la unidad a su derecha quedando 461, el cual se resta en la casilla siguiente de la derecha a aquella en que se hizo la última resta). El proceso se repite indefinidamente hasta que se obtenga el número de cifras requerido.

El número de sustracciones necesario para obtener una raíz es la suma absoluta de las cifras de esta raíz, lo cual no sería gran inconveniente en una máquina calculadora si no fuera por el hecho de que todos los sumandos son distintos, lo cual hace muy demorada y engorrosa la operación.

Método Nº 2

La ventaja del método que me permito proponer estriba en que la raíz cuadrada se reduce a las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética, las cuales se hacen con bastante facilidad en una máquina calculadora. Requiere además, pero no lo considero ningún obstáculo, el uso de una regla de cálculo que puede ser de bolsillo, la cual se halla siempre al alcance de cualquier ingeniero o estudiante de matemáticas.

Estudiando el binomio en sus formas

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \quad \text{y} \quad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

encontramos que puede convertirse en lo siguiente:

$$(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad \therefore \quad \frac{(a\pm b)^2-a^2}{2a} = \pm b + \frac{b^2}{2a}$$

De la observación de la ecuación anterior se deduce que si a es bastante mayor que b, el término $\frac{b^2}{2a}$ es muy pequeño y por consiguiente podemos despreciarlo. Entonces nos queda una ecuación con una sola incógnita que es b, puesto que la suma $(a\pm b)$ es precisamente el número cuya raíz vamos a obtener.

Para calcular b nos basta pues efectuar cuatro sencillas operaciones: 1)—Obtener a que es una raíz aproximada del número en cuestión, lo cual se hace por medio de una regla de cálculo de bolsillo. 2)—Elevar a al cuadrado. 3)—Restar el cuadrado de a del número cuya raíz debe obtenerse. 4)—Dividir la diferencia anterior por el doble de a. El signo de b depende de que $(a\pm b)^2$ sea mayor que a^2, en cuyo caso es positivo o que $(a\pm b)^2$ sea menor que a^2, y entonces será negativo.

Una vez obtenido b, se suma algébricamente con a con lo cual se obtiene la raíz buscada. La exactitud depende del valor del término $\frac{b^2}{2a}$, que hemos despreciado, pero se puede repetir el proceso tomando como nuevo valor de a' el que se ha obtenido de la suma $(a \pm b)$, con lo cual se obtiene un valor de b' ya más exacto. Este segundo cálculo generalmente no es necesario pues basta modificar la última cifra de la raíz y probar su exactitud elevándola al cuadrado.

Con el objeto de establecer una comparación numérica con el primer método tomemos el mismo número 534.480.000 para extraer la raíz por el segundo procedimiento.

$a = 23.100$ (Regla de cálculo de bolsillo)

$a^2 = 533.610.000$ (Calculadora)

$(a \pm b)^2 - a^2 = 534.480.000 - 533.610.000 = 870.000$ (Calculadora)

$\frac{(a \pm b)^2 - a^2}{2a} = + \frac{870.000}{46.200} = + 18.83$ (Calculadora)

$(a + b) = 23.100 + 18{,}83 = 23.118{,}83$ (Calculadora)

$(a + b)^2 = 23.118{,}83^2 = 534.480.030$ (Calculadora)

Esta última operación es simplemente la comprobación de la raíz, la cual, como se ve, es bastante aproximada, y no hay por consiguiente necesidad de repetir el proceso. Siendo positiva la diferencia $(a \pm b)^2 - a^2$, el valor de b se nos afecta por exceso, ya que hemos despreciado el término $\frac{b^2}{2a}$, por lo cual la raíz encontrada es aproximada por exceso, pero como se puede comprobar fácilmente la diferencia sólo afecta la segunda cifra decimal, es decir la séptima cifra significativa. Se tiene pues que: $23.118{,}82 < \sqrt{534.480.000} < 23.118{,}83$ Esta aproximación es más que suficiente en la mayoría de los casos.

Errores

En el primero de los métodos que hemos considerado, el error que se comete depende del número de sustracciones que se efectúen y puede llevarse la aproximación hasta el grado que se quiera. Es conveniente anotar sin embargo que en este método cada nueva aproximación es más difícil que la anterior ya que, según se explicó antes, los sustraendos van siendo cada vez más y más complicados y a pesar de que el método para encontrarlos es muy sencillo se presta para cometer errores.

En el segundo procedimiento no se puede establecer una fórmula matemática para encontrar el error cometido pues depende del grado de aproximación de a, o sea de la primera raíz aproximada que obtenemos por medio de la regla de cálculo. Sinembargo para tener alguna idea de la exactitud del método podemos calcular el valor del término $\frac{b^2}{2a}$ que hemos despreciado, en el caso concreto de nuestro ejemplo numérico

$$\frac{b^2}{2a} = \frac{18.83^2}{2 \times 23.100} = \frac{354.57}{46.200} = 0.0067$$

Se ve claramente que hemos despreciado un término que afecta nuestra raíz sólo en la tercera cifra decimal o sea en la octava cifra significativa.

El número de cifras decimales de la raíz que se puede obtener es relativo, en éste, como en todos los otros casos, dicho número depende según se sabe de la magnitud del número al cual se le debe extraer la raíz; pero se puede establecer, en general, que obteniendo con la regla de cálculo el valor de a con tres cifras significativas, con aplicar una vez el método segundo, se obtienen cuatro cifras significativas más, de las cuales tres por lo menos son exactas.

No es necesario insistir sobre las ventajas de un método que permite hallar, sin ningún esfuerzo mental y en pocos momentos, una raíz cuadrada con seis cifras significativas exactas.

Como ya se dijo antes, la exactitud de un cálculo no depende del número de cifras decimales, ya que este número es relativo sino del número de cifras significativas. En el caso del método Nº 2 podemos obtener la raíz con seis cifras significativas sea cual fuera la magnitud del número. En caso de que el número no tenga cifras enteras, obtendremos la raíz con seis decimales, tal como ocurre en el siguiente ejemplo $\sqrt{0,4852436240}$, que podemos escribir así:

$$\sqrt{\frac{4852436240}{10.000.000.000}} = \frac{\sqrt{4852436240}}{100.000}$$

con lo cual la operación se reduce a buscar la raíz de un número entero y dividirla por 100.000, con lo cual nos resultan seis cifras decimales.

Resumen

Para terminar, hé aquí un resumen de ambos métodos para que el lector utilice el de su preferencia.

Extracción de raíz cuadrada con máquina calculadora.
Método número 1

1 Se divide el número en períodos de dos cifras a partir de la derecha si es entero, y a partir de la coma hacia la izquierda, si es decimal.

2 Del primer período de la izquierda se van restando sucesivamente los impares a partir de 1. El número de restas aparece en la casilla correspondiente y es la primera cifra de la raíz.

3 Cuando ya no se puede efectuar la resta se busca el nuevo sustraendo que es igual al número par siguiente al último impar restado al cual se le ha agregado la unidad a la derecha. Este nuevo sustraendo se resta corriendo el carro un lugar a la derecha de donde se efectuó la primera serie de sustracciones.

4 Se siguen restando sucesivamente los impares siguientes al impar buscado por el prócedimiento citado en el 3). El número de restas que aparece en la casilla correspondiente es la cifra siguiente de la raíz.

5 Se busca el sustraendo siguiente por el procedimiento indicado en 3).

6 Se eleva al cuadrado la raíz para comprobación.

Extracción de raíz cuadrada con máquina calculadora.

Método número 2.

1 Se obtiene una raíz aproximada por medio de una regla de cálculo de bolsillo.

2 Se eleva al cuadrado la raíz obtenida en (1).

3 Se busca la diferencia entre el número y el cuadrado de la raíz aproximada.

4 Se divide la diferencia encontrada en el (3) por el duplo de la raíz encontrada en (1)

5 El cuociente obtenido en (4) se suma o se resta a la raíz obtenida en (1) según que la diferencia obtenida en (3) sea positiva o negativa. El resultado de esta suma algébrica es la raíz buscada.

6 Se eleva al cuadrado la raíz obtenida en (5) como comprobación.

Ingo. JOHN ARANGO O.
Profesor de la Facultad.

LOS FERROCARRILES Y LAS CARRETERAS DE CHILE

Interesante estudio de los ferrocarriles y carreteras de Chile por el Ingo. Fabio Orozco Tobón.

Los Ferrocarriles de Chile forman una completa red, que surca el país de Sur a Norte, desde Puerto Montt, en la región de los Grandes Lagos del Sur, hasta Pisagua en el Norte. En total son 9.033 kilómetros entre ferrocarriles del Estado y ferrocarriles particulares, los primeros comprenden 6.101 kmts. y los segundos 2.932 kmts.

Los Ferrocarriles del Estado están divididos en 2 grandes zonas, la Red Sur y la Red Norte. La primera constituye la base de la explotación y es la de mayor servicio, en cambio, la segunda, no tiene sino el movimiento relativo a los productos de la minería de las grandes regiones que recorre y por lo tanto su servicio es deficiente.

En cuanto al kilometraje y al ancho de vía se divide así: