

Sección de Matemáticas

Soluciones a algunos Problemas de la Revista anterior

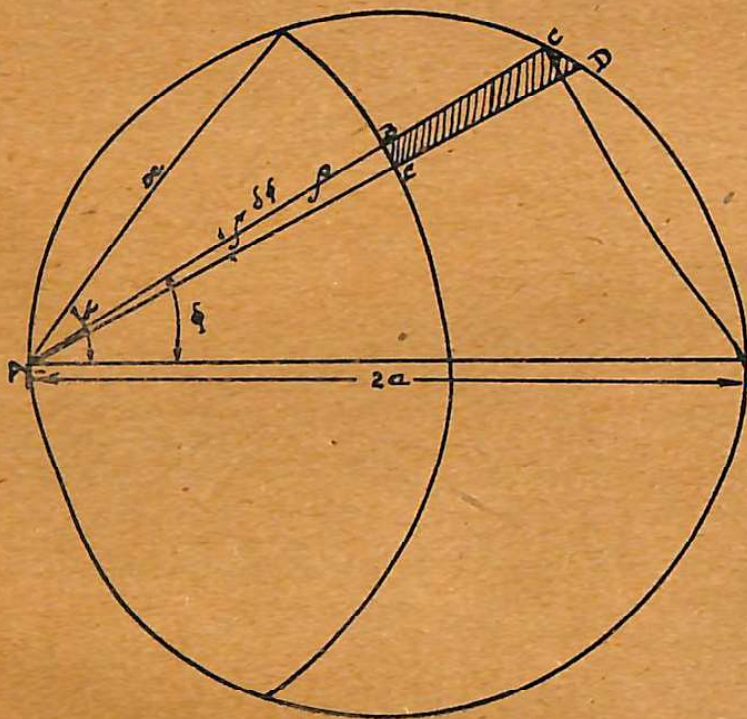
Problema I. — Con centro en una circunferencia trazar un arco que divida a un círculo dado en dos áreas iguales.

Solución del profesor Ingo. Jorge Mejía R.

$$\begin{aligned} p &= 2a \cos \phi \\ x &= 2a \cos \alpha \quad \therefore \alpha \text{ (léase alfa)} \end{aligned}$$

$$BCDE = dA = \frac{1}{2} (p^2 - x^2) d\phi$$

$$A = \frac{\pi a^2}{2} = 2 \int_0^{\alpha} \frac{1}{2} (4a^2 \cos^2 \phi - 4a^2 \cos^2 \alpha) d\phi$$



$$\frac{\pi a^2}{2} = 4a^2 \int_0^\alpha \left(\frac{1 + \cos 2\phi - 1 - \cos 2\alpha}{2} \right) d\phi =$$

$$2a^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha - \alpha \cos 2\alpha \right)$$

$$\frac{\pi a^2}{2} = 2a^2 \cos \alpha \sin \alpha - \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1)$$

$$\frac{\pi a^2}{2} = 2a^2 \cos \alpha \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} - \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1) =$$

$$2a^2 \left[\frac{x}{2a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4a^2}} - \left(\frac{2x^2}{4a^2} - 1 \right) \cos^{-1} \frac{x}{2a} \right]$$

$$\frac{\pi a^2}{2} = \frac{x}{2} \sqrt{4a^2 - x^2} - \frac{2(x^2 - 2a^2)}{2} \cos^{-1} \frac{x}{2a}$$

$$Z = f(x) = x \sqrt{4a^2 - x^2} - 2(x^2 - 2a^2) \cos^{-1} \frac{x}{2a} - \pi a^2 = 0$$

$f(a) < 0$ y $f(2a) > 0$ además es evidente que x se aproxima más a a . Resolviendo por el método de Newton.

$$x_1 = a$$

$$x^2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad f'(x) = -4x \cos^{-1} \frac{x}{2a}$$

$$\therefore x_2 = a + \frac{a^2 \sqrt{3} + 2a^2 \cos^{-1} \frac{1}{2} - \pi a^2}{4a \cos^{-1} \frac{1}{2}}; \cos^{-1} \frac{1}{2} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore x_2 = a + \frac{a(3\sqrt{3} - \pi)}{4\pi} = \frac{3a(\pi + \sqrt{3})}{4\pi} = 1.16 a$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = a \left(1.16 + \frac{1.16 \times 1.629 + 2 \times 0.654 \cos^{-1} 0.58 - \pi}{4 \times 1.16 \cos^{-1} 0.58} \right)$$

$$\cos^{-1} 0.58 = 54^\circ 33' = 0.9520771 \text{ radianes}$$

$$\therefore x_3 = 1.15867a$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = a$$

$$\left[1.15867 + \frac{1.15867 \times 1.63018 + 2 \times 0.65748383 \times \cos^{-1} 0.579335 - \pi}{4 \times 1.15867 \times \cos^{-1} 0.579335} \right]$$

$$\cos^{-1} 0.579335 = 54^{\circ} 33' 15'' = 0.9521498$$

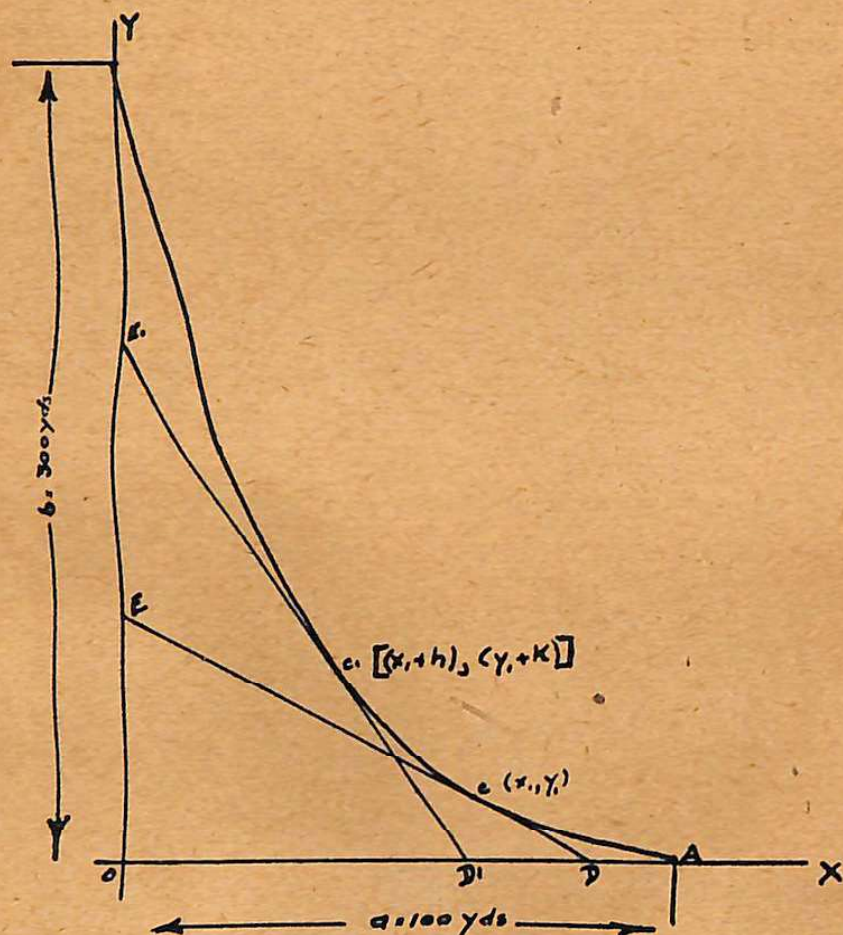
$$\therefore x_4 = 1.15851a$$

De manera análoga se continúa hasta obtener dos valores que difieran entre sí por la aproximación que se desee.

Problema II. — Un perro sale en seguimiento de una zorra desde un punto A que se encuentra a 100 yds. al este del punto de partida de la última. La velocidad de ambos es constante y el perro corre siempre en dirección hacia la zorra la cual huye hacia el norte. Qué longitud de camino hace el perro si le da alcance a su presa cuando ésta ha recorrido 300 yds.

Solución del Profesor Ingo. Jorge Mejía R.

La ecuación de la tangente a la curva recorrida por el perro, en una cualquiera de las posiciones x_1, y_1 ocupadas por el seguidor, es:



$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1) \therefore OE = y_1 - x_1 f'(x_1) \quad (1)$$

análogamente: $OE' = (y_1 + k) - (x_1 + h) f'(x_1 + h) \quad (2)$

(2) y (1) dan $OE' - OE = EE' = [k - h f'(x_1 + h)] - x_1 [f'(x_1 + h) - f'(x_1)]$

pero $k - h f'(x_1 + h) = 0$ y $f'(x_1 + h) - f'(x_1) = -f''(x_1) dx$

luego $\overline{EE'} = x_1 f''(x_1) dx$ además $\widehat{CC'} = ds = \sqrt{1 + [f'(x_1)]^2} dx$

$\overline{EE'}$ velocidad de la zorra $x_1 f''(x_1)$

$$y \frac{\widehat{CC'}}{\overline{EE'}} = \frac{\text{velocidad del perro}}{\text{velocidad de la zorra}} = r = \frac{x_1 f''(x_1)}{\sqrt{1 + [f'(x_1)]^2}} \quad (3)$$

haciendo $f'(x_1) = p$ se tendrá $f''(x_1) = \frac{dp}{dx}$ valores que substituídos en (3) darán:

$$r = \frac{x \frac{dp}{dx}}{\sqrt{1+p^2}} \quad \therefore \quad r \frac{dx}{x} = \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} \quad \text{ecuación diferencial cuya solución}$$

evidentemente es $r \ln x + C = \ln(p + \sqrt{1+p^2})$

$$\text{o } C = \ln \left[\frac{p + \sqrt{1+p^2}}{x''} \right]$$

o pasada a la forma exponencial

$$e^{rx} = Kx^r = p + \sqrt{1+p^2} = \frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dp}{dx}\right)^2}$$

(4) el valor de K puede deducirse observando que para $x = a, \frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore K = \frac{1}{a^r}$ valor que substituído en (4) da:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^r = \frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (5)$$

$$\therefore \int_0^a \left(\frac{x}{a}\right)^r dx = \int_b^0 dy + \int_{-s}^0 ds$$

$$\frac{a}{(r+1)} = -b + s \quad \text{pero} \quad r = -\frac{b}{s}$$

$$\therefore \frac{as}{b+s} = s - b \quad \therefore s^2 - as - b^2 = 0$$

$$s = a + \frac{\sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} \quad (6)$$

El mismo resultado ha podido obtenerse de la siguiente manera de (5) s evidente que

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{-r} = \frac{1}{\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{\frac{dy}{dx} - \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{-1} \quad (7)$$

sumadas (5) y (7) dan: $\left(\frac{x}{a}\right)^r + \left(\frac{x}{a}\right)^{-r} = 2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

$$\therefore \int_0^a \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{a}\right)^r + \left(\frac{x}{a}\right)^{-r} \right] dx = \int_{-s}^0 ds$$

$$\frac{a}{2(r+1)} + \frac{a}{2(1-r)} = s = \frac{a}{(1-r^2)} = \frac{as^2}{(s^2-b^2)} \quad \therefore s^2 - b^2 = as$$

finalmente la ecuación de la curva ha podido resolverse restando la ecuación (7) de la (5).

$$\left(\frac{x}{a}\right)^r - \left(\frac{x}{a}\right)^{-r} = 2 \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \int_0^y dy = \frac{1}{2} \int_a^x \left[\left(\frac{x}{a}\right)^r - \left(\frac{x}{a}\right)^{-r} \right] dx$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} \left[\frac{x^{r+1}}{a^r(r+1)} + \frac{a^r x^{1-r}}{(r-1)} - \frac{2ar}{r^2-1} \right]$$

NOTA: También envió soluciones a los problemas anteriores Guillermo Gaviria Echeverri.