Técnica

284

LAS ECUACIONES DEL ARCO EMPOTRADO REFERIDAS AL CENTRO ELASTICO

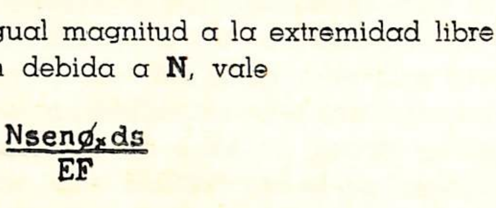
Una vez establecido que las ecuaciones de deformación de un arco empotrado en un extremo y libre en el otro, debidas al momento de flexión **M** en la porción **ds**, son las siguientes:

$$\Delta_1 dx = \frac{Myds}{EI}, \quad \Delta_1 dy = \frac{Mxds}{EI}, \quad \Delta_1 d\phi = \frac{Mds}{EI},$$

en que **E** es el módulo de elasticidad e **I** el momento de inercia, resulta fácil agregar las deformaciones debidas a la compresión normal y a una variación de temperatura o retracción del hormigón, obteniéndose así las ecuaciones de la deformación total.

En efecto, a causa de **N**, la porción del arco se acorta $-\frac{Nds}{EF}$ en la dirección de la tangente. Por tanto, en la línea de los arranques, el acortamiento valdrá

$$\Delta_2 dx = -\frac{N\cos\phi_x\, ds}{EF}$$



acortamiento que se transmite en igual magnitud a la extremidad libre. En sentido vertical, la deformación debida a **N**, vale

$$\Delta_2 dy = \frac{N\operatorname{sen}\phi_x\, ds}{EF}$$

La compresión normal no cambia la curvatura.

Si ω es el coeficiente de dilatación del material de que se compone el arco, **t** el aumento o disminución de temperatura con relación a la de fraguado, el término de deformación por temperatura, correspondiente al primero de los anteriores, valdrá

$$\Delta_3 dx = \omega t ds . \cos\phi_x$$

En el caso de arcos simétricos, el término correspondiente $\Delta_3 dy$ da una suma nula en todo el arco, razón por la cual no se le considera. Además, se desprecian las deformaciones debidas al esfuerzo tangencial, que son muy pequeñas comparadas con las anteriores, de manera que puede escribirse:

$$\text{(a)} \quad \Delta l = \int_0^l \frac{Myds}{EI} - \int_0^l \frac{N\cos\phi_x ds}{EF} + \int_0^l \omega t ds . \cos\phi_x$$

$$\text{(b)} \quad \Delta r = \int_0^l \frac{Mxds}{EI} + \int_0^l \frac{N \operatorname{sen}\phi_x ds}{EF}$$

$$\text{(c)} \quad \Delta\phi = \int_0^l \frac{Mds}{EI}$$

Las ecuaciones anteriores expresan la deformación horizontal, la vertical y la angular, respectivamente. En el arco de apoyos rígidos o completamente empotrado se verifica:

$$\Delta l = 0, \quad \Delta r = 0, \quad \Delta\phi = 0.$$

Por otra parte, **E** se considera constante y si se tiene en cuenta que,

$$\int_0^l \cos\phi_x ds = l$$

se puede escribir:

$$\text{(á)} \quad \int_0^l \frac{Myds}{J} - \int_0^l \frac{N\cos\phi_x ds}{F} + E\omega t l = 0$$

$$\text{(b́)} \quad \int_0^l \frac{Mxds}{J} + \int_0^l \frac{N \operatorname{sen}\phi_x ds}{F} = 0$$

$$\text{(ć)} \quad \int_0^l \frac{Mds}{J} = 0$$

Reducción al centro elástico.

El centro elástico es el centro de gravedad de la línea que constituye la directriz, cargada ficticiamente con pesos iguales a **1/J** o, mejor, iguales a **Jc/J.** Dicho centro tiene por coordenadas,

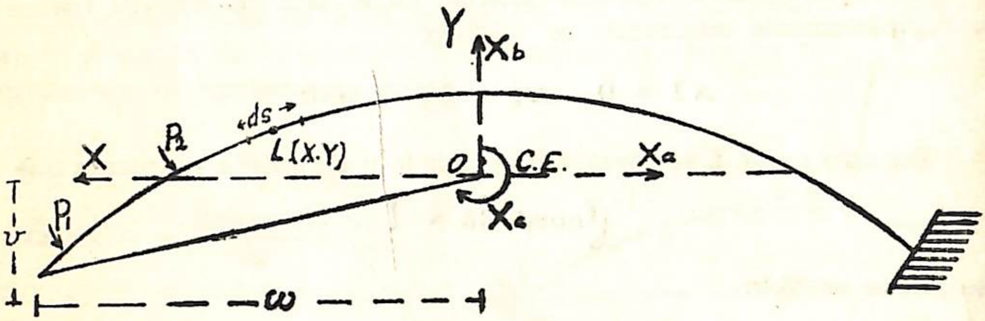
$$X_c = \frac{\int_0^l \frac{x\,ds}{J}}{\int_0^l \frac{ds}{J}}; \qquad Y_c = \frac{\int_0^l \frac{y\,ds}{J}}{\int_0^l \frac{ds}{J}}.$$

Si se trata de ejes principales, debe verificarse:

$$\int_0^l \frac{X\,ds}{J} = 0, \qquad \int_0^l \frac{Y\,ds}{J} = 0, \qquad \int_0^l \frac{XY\,ds}{J} = 0,$$

en que **XY** son coordenadas de cualquier punto de la directriz referido al nuevo sistema.

En vez de colocar las tres magnitudes hiperestáticas en la extremidad libre del arco, se colocan en el centro elástico, que se considera ligado por medio de una barra rígida a aquella extremidad. Es evidente que los valores de dichas magnitudes serán diferentes para los dos puntos existiendo relaciones lineales que las ligan.



Atendiendo a la figura adjunta, podemos escribir, para un punto cualquiera **L**:

$$\text{(d)} \qquad M = M_s - X_aY + X_b(w - X) - X_bW + X_c$$

$$= M_s - X_aY - X_bX + X_c$$

$$N = N_s + X_a\cos\phi_x + X_b\,\mathrm{sen}\,\phi_x$$

M y **N** son el momento de flexión y la compresión normal en la figura isostática fundamental o sea los que dan las cargas exteriores situadas a la izquierda de **L**. Aproximadamente se admite **N=X**, lo que simplifica mucho las ecuaciones. Veamos a qué se reducen las ecuaciones **(a')**, **(b')**, **(c')**, cuando el sistema de cordenadas tiene su origen en el centro elástico y sus ejes son paralelos a los anteriores.

La **(a')** se convierte en

$$\int_0^l \frac{(M_s - X_a Y - X_b X - X_c)(Y - v)ds}{J} - X_a \int_0^l \frac{\cos\phi_x ds}{F} + E\omega t l = 0$$

que se descompone así:

$$\int_0^l \frac{M_s Y ds}{J} - X_a \int_0^l \frac{Y^2 ds}{J} - X_b \int_0^l \frac{XY ds}{J} + X_c \int_0^l \frac{Y ds}{J} - v \int_0^l \frac{M ds}{J} - vX_a \int_0^l \frac{Y ds}{J}$$

$$- vX_b \int_0^l \frac{X ds}{J} + vX_c \int_0^l \frac{ds}{J} - X_a \int_0^l \frac{\cos\phi_x ds}{F} + E\omega t l = 0$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que

$$\int_0^l \frac{X ds}{J} = 0, \quad \int_0^l \frac{Y ds}{J} = 0, \quad \int_0^l \frac{XY ds}{J} = 0,$$

lo anterior se reduce a **(f)**.

$$\int_0^l \frac{M_s Y ds}{J} - X_a \left(\int_0^l \frac{Y^2 ds}{J} + \int_0^l \frac{dx}{F} \right) + E\omega t l + v \int_0^l \frac{M_s ds}{J} + X_c v \int_0^l \frac{ds}{J} = 0$$

De la ecuación **(c')** se deduce

$$\int_0^l \frac{M_s ds}{J} - X_a \int \frac{Y ds}{J} - X_b \int \frac{X ds}{J} + X_c \int \frac{ds}{J} = 0, \text{ de donde}$$

$$\text{(g)} \quad X_c \int \frac{ds}{J} + \int \frac{M_s ds}{J} = 0$$

Por medio de esta última ecuación, la **(f)** se reduce a

$$\int_0^l \frac{M_s Y ds}{J} - X_a \left(\int_0^l \frac{Y^2 ds}{J} + \int_0^l \frac{dx}{J} \right) + E\omega t l = 0$$

que nos da la indeterminada **Xa:**

$$(h) \quad X_a = \frac{\displaystyle\int_0^l \frac{Ms\,Y\,ds}{J} + E\omega t l}{\displaystyle\int_0^l \frac{Y^2 ds}{J} + \int_0^l \frac{dx}{F}}$$

Por transformaciones análogas se obtiene la **Xb**:

$$(i) \quad X_b = \frac{\displaystyle\int_0^l \frac{Ms\,X\,ds}{J}}{\displaystyle\int_0^l \frac{X^2 ds}{J}}$$

Finalmente, de **(g)**, se deduce:

$$(j) \quad X_c = \frac{\displaystyle\int_0^l \frac{Ms\,ds}{J}}{\displaystyle\int_0^l \frac{ds}{J}}$$

Levantada la hiperestaticidad, podrán obtenerse, para cualquier punto del arco el momento flector y la compresión normal. A las fórmulas anteriores se llega también por la aplicación del teorema de Castigliano y por el método del trabajo molecular.

Medellín, septiembre de 1940.

Luis de Greiff Bravo
Profesor de la Facultad

Vuene a pag 74

COMBUSTIBLES

f 279

(Continuación)

Determinación por medio de calorímetros

Los calorímetros están basados en el principio físico, bien conocido, que se puede enunciar como sigue: el calor desprendido por un cuerpo al quemarse es igual al que absorbe otro que se ponga en contacto. Aplicando este principio a los calorímetros vemos que al quemar un cuerpo, las calorías desprendidas por ese cuerpo se uti-