Ejercicios de Estática

Ingo. **Luis de Greiff B.**
Profesor de la Facultad

Pórtico de Escuadra con carga uniforme en la Viga

EMPOTRADO EN A y C COMO EN FIG. (1).

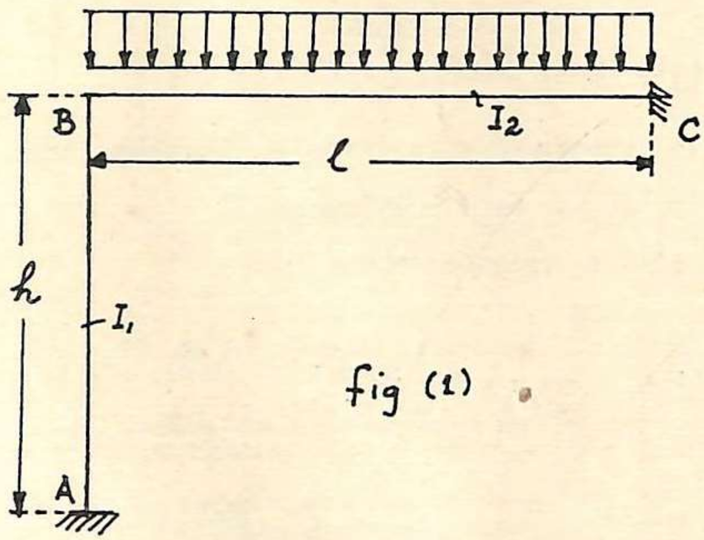


fig (1)

Por no existir desplazamiento lateral del nudo B, podemos aplicar el teorema de los tres momentos. Las 3 ecuaciones son:

(1) $2M_A + M_B = 0$

$$(2) \quad M_A \times \frac{h}{I_1} + 2\,M_B \left(\frac{h}{I_1} + \frac{1}{I_2}\right) + M_C \times \frac{1}{I_2} = -\frac{1}{4}\,\frac{w\,l^3}{I_2}$$

$$(3) \quad M_B + 2\,M_C = -\frac{1}{4}\,wl^2$$

Llevamos los valores de M_A y M_C deducidos de (1) y (3) a (2) y tenemos:

$$-\frac{M_B}{2} \times \frac{h}{I_1} + 2\,M_B \left(\frac{h}{I_1} + \frac{1}{I_2}\right) - \left(\frac{M_B}{2} + \frac{1}{8}\,w\,l^2\right)\frac{1}{I_2}$$

$$= -\frac{1}{4}\,w\,\frac{l^3}{I_2} \therefore$$

$$\frac{3}{2}\,M_B \times \frac{h}{I_1} + \frac{3}{2}\,M_B \times \frac{1}{I_2} = -\frac{1}{8}\,w\,\frac{l^3}{I_2} \quad \therefore \frac{3}{2}\,M_B \left(\frac{h}{I_1} + \frac{1}{I_2}\right) = -\frac{1}{8}\,w\,\frac{l^3}{I_2}$$

Ahora es $K = \frac{I_2 \times h}{I_1 \times l}$ $\therefore$ $\frac{3}{2} M_B (K+1) = -\frac{1}{8} w l^2$ $\therefore$

$$M_B = -\frac{1}{12} \times \frac{w l^2}{K+1}$$

Por el método de las deformaciones angulares.

En este caso es: $\frac{I_1}{h} = K_{BA}$; $\frac{I_2}{l} = K_{BC}$.

$$(4) \quad \begin{cases} M_{BA} = 4 K_{BA} \ominus_B \\ M_{BC} = 4 K_{BC} \ominus_B - \frac{1}{12} w l^2 \end{cases}$$

Sumando y según la condición de equilibrio de B, es:

$M_{BA} + M_{BC} = 0$ $\therefore$

$$4 \ominus_B (K_{BA} + K_{BC}) = \frac{1}{12} wl^2$$

despejando el valor de $4 \ominus_B$ y llevándolo a las ecuaciones (4) se tiene:

$M_{BA} = \frac{K_{BA}}{K_{BA} + K_{BC}} \times \frac{1}{12} w l^2$ y como $\frac{K_{BC}}{K_{BA}} = K.$

queda finalmente:

$$M_{BA} = \frac{1}{1+K} \times \frac{1}{12} w l^2$$

Igualmente:

$$M_{BC} = \frac{K_{BC}}{K_{BA} + K_{BC}} \times \frac{1}{12} w l^2 - \frac{1}{12} w l^2 = -\frac{K_{BA}}{K_{BA} + K_{BC}} \times \frac{1}{12} w l^2$$

Los resultados anteriores están en perfecto acuerdo.

APLICACION NUMERICA

$h = 20'$ $l = 30'$

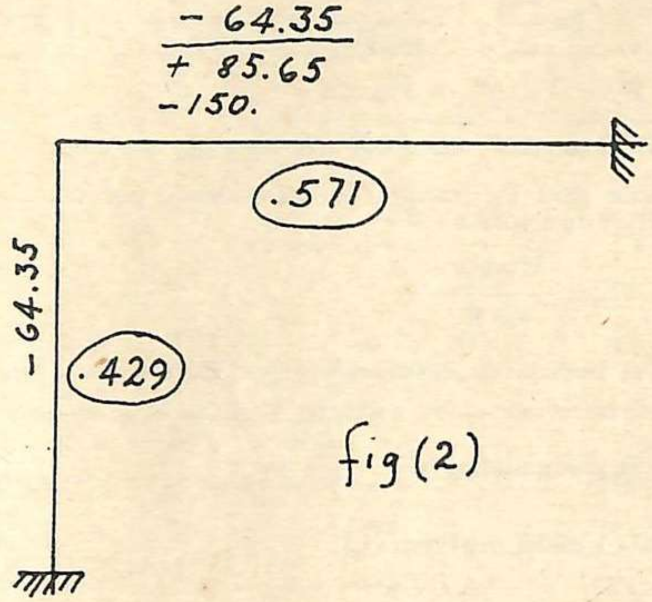
$I_2 = \sim 4$ $I_1 = \sim 2$ $w = 2000$ #/pie.

$$K = \frac{I_2 \times h}{I_1 \times l} = \frac{4 \times 20}{2 \times 30} = \frac{4}{3}$$

$$M_{BC} = -\frac{1}{12} \times \frac{w l^2}{4/3 + 1} = -\frac{3}{7} \times \frac{1}{12} w l^2$$

$$= -\frac{1}{28} w l^2 = -\frac{1}{28} \times 2 \times 30 \times 30$$

$$= -\frac{900}{14} = -\,64.3 \text{ ft} \times \text{Kips.}$$



fig(2)

Para la distribución de Cross calculamos los coeficientes de distribución.

Entonces:

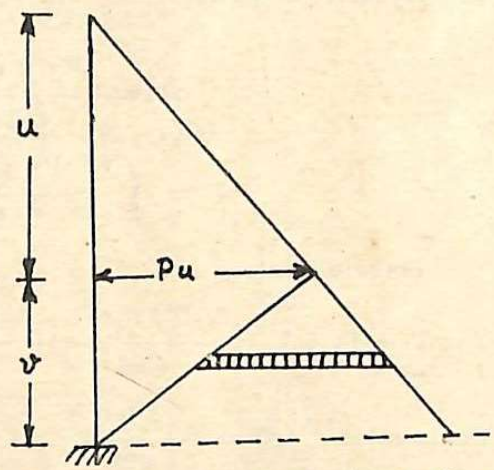
$$-\frac{1}{12} \times 2 \times 900$$

$$= -\,150 \text{ ft} \times \text{Kips.}$$

$$150 \times .571 = 85.65$$

$$150 \times .429 = 64.35$$

Tanques circulares del eje vertical, empotrados en la base



Obtención de una fórmula aproximada para su cálculo.

En el análisis que sigue se parte de las siguientes hipótesis:

a) En los anillos superiores, del tanque, no se manifiesta el efecto del empotramiento y a ellos son aplicables las fórmulas relativas a los tubos delgados o gruesos;

b) La presión que dilata los anillos varía linealmente desde un máximum p u en la profundidad u, hasta cero en la sección de empotramiento;

c) Entre el fondo y la profundidad u la pared actúa como ménsula (cantilever) bajo una presión que varía linealmente desde Υ h hasta cero.

Cálculo del trabajo de deformación.

A la profundidad x un anillo de altura dx y espesor ∂, estará sometido a una tracción:

$$dP = Px.\ r.\ dx$$

y, considerando la unidad de longitud en sentido circunferencial, el trabajo de deformación valdrá

$$\frac{P^2x\ r^2\ (dx)^2}{2\partial\ dx\ E} = \frac{P^2x.\ r^2.\ dx}{2\partial\ E}$$

El trabajo, o mejor, energía de deformación hasta la profundidad u, vale, por consiguiente

$$T_1 = \int_o^u \frac{P^2 x\, r^2\, dx}{2\partial\, E} = \int_o^u \left(Pu \frac{x}{u}\right)^2 \frac{r^2\, dx}{2\partial\, E} = \frac{P^2 u\, r^2}{2\partial\, E\, u^2} \int_o^u x^2\, dx$$

$$T_1 = \frac{P^2 u\, r^2}{2\partial\, E\, u^2} \; \frac{u^3}{3} = \frac{P^2 u\, r^2\, u}{6\partial\, E}$$

Una expresión análoga vale para T_2, trabajo de deformación por tracción correspondiente a la zona inferior de altura v:

$$T_2 = \frac{P^2 u\, r^2\, v}{6\partial\, E}$$

Vamos ahora a calcular el trabajo de deformación por flexión de la viga empotrada.

Carga a la profundidad x' $\quad \dfrac{x' Po}{v}$

Carga total correspondiente a dicha profundidad:

$$\frac{x' Po}{v} \; \frac{x'}{2} = \frac{Po\, x'^2}{2\, v}$$

Momento de flexión: $\quad Mx'\, x' = \dfrac{Po\, x'^2}{2\, v} \; \dfrac{x'}{3} = \dfrac{Po\, x'^3}{6\, v}$

$$dT_3 = \frac{Mx'\, x'\, dx'}{2\, EI} = \frac{Po^2\, x'^6\, dx'}{72\, EI\, v^2}$$

$$T_3 = \int_o^v \frac{P^2 o\, x'^6\, dx'}{72\, EI\, v^2} = \frac{P^2 o\, v^5}{7x72\, EI}$$

Trabajo total:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{P^2 u\, r^2\, u}{6\partial E} + \frac{P^2 u\, r^2\, (h - u)}{6\partial E} + \frac{P^2 o\, v^5}{504\, EI}$$

finalmente: $\quad T = \dfrac{P^2 u\, r^2\, h}{6\partial E} + \dfrac{P^2 o\, (h - u)^5}{504\, EI}$

El trabajo de deformación podrá expresarse también así:

$$T = \frac{\Upsilon^2\, u^2\, r^2\, h}{6\partial E} + \frac{\Upsilon^2\, h^2\, (h - u)^5}{504\, EI}$$

El trabajo de deformación debe ser mínimo, por tanto: $\dfrac{dT}{du} = O$

$\dfrac{\Upsilon^2\, r^2\, h}{6\partial E}\, 2u - \dfrac{5\, \Upsilon^2\, h^2}{504\, EI}\, (h - u)^4 = O \qquad$ y como $\; I = \dfrac{1}{12}\, \partial^3 \;$ resulta:

$$\frac{\Upsilon.^2\, h\, r^2\, u}{3\partial E} - \frac{5}{42}\,\frac{h.^2}{\partial^3 E}\,(h-u)^4 = O$$

$$\frac{r.^2 h}{3}.\,u - \frac{5}{42}.\,\frac{h^2}{\partial^2}.\,(h-u)^4 = O; \qquad \frac{r.^2 u}{3} - \frac{5}{42}\,\frac{h}{\partial^2}.\,(h-u)^4 = O.$$

$r.^2 u - \dfrac{5}{14}\,\dfrac{h}{\partial^2}\,(h-u)^4 = O.$ Se llega, finalmente, a la ecuación:

$$(h-u)^4 = \frac{14}{5}.\,\frac{r.^2\,\partial^2.}{h}.\,u. \qquad \text{ó también:}$$

$$\left(1 - \frac{u}{h}\right)^4 = 2.8\left(\frac{r}{h}\right)^2.\left(\frac{\partial}{h.}\right)^2.\,\frac{u}{h.}$$

ecuación cuya solución práctica se logra mediante tanteos (Ver cuadro de la función $(1 - Z)^4$)

EJEMPLO: $\partial = .25$, $h = 4.50$, $r = 10.00$ (hormigón armado)

$$\left(1 - \frac{u}{h}\right)^4 = 2.8\left(\frac{10.0}{4.5}\right)^2 \times \left(\frac{.25}{4.50}\right)^2. \qquad \frac{u}{h} = \frac{17.5}{(20.25)^2}\,.\,\frac{u}{h.}$$

$$\left(1 - \frac{u}{h}\right)^4 = \frac{1}{23.43}\,x\,\frac{u}{h.}$$

Solución: $\dfrac{u}{h} = .\,60$; $u = .\,60 \times 4.50 = 2{,}70$ mts.

La fórmula de Lührs da para este caso 2,53 mts.

TABLA DE LA FUNCION $(1 - Z)^4$

Z	1 — Z	(1 — Z)⁴
0.00	1.00	1.0000
.05	.95	.8145
.10	.90	.6561
.15	.85	.5220
.20	.80	.4096
.25	.75	.3164
.30	.70	.2401
.35	.65	.1785
.40	.60	.1296
.45	.55	.0625
.50	.50	.0915
.55	.45	.0410
.60	.40	.0256
.65	.35	.0150
.70	.30	.0039
.75	.25	.0016
.80	.20	.0005
.85	.15	.0081
.90	.10	.0001
.95	.05	.0000
1.00	0.00	0.0000

NOTA: Como tema de discusión y no como **METODO**, presentamos al estudio de los ingenieros nacionales, el anterior ensayo. E. A.