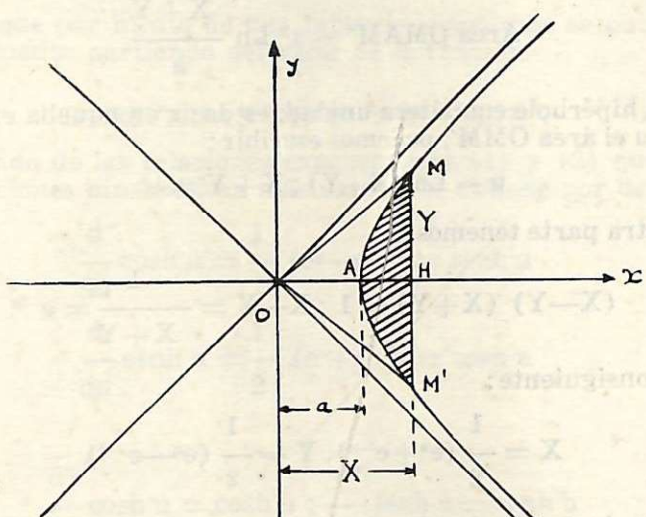
MATEMATICAS

Breves apuntes sobre las funciones hiperbólicas



Para introducirnos al estudio de las funciones hiperbólicas, de tanta importancia en la técnica, empezaremos por considerar la hipérbole equilátera, de semieje real a cuya ecuación es la siguiente:

$$x^2 - y^2 = a^2$$

Por integración puede hallarse el valor del área AMH, así:

$$A = \int_a^x Y . \, dx = \int_a^x \sqrt{x^2 - a^2} \, . \, dx$$

$$= \left(\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \operatorname{Ln} \left(X + \sqrt{x^2 - a^2} \right) \right)_a^x$$

$$A=\frac{X}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\,\mathrm{Ln}\,(X+\sqrt{x^2-a^2})+\frac{a^2}{2}\,\mathrm{Ln}\,a$$

$$=\frac{XY}{2}-\frac{a^2}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{X+Y}{a}$$

Si se tiene en cuenta que el área del triángulo OMH es precisamente $\frac{XY}{2}$, tendremos:

$$\text{Area OAM}=\frac{a^2}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{X+Y}{a}$$

$$\text{Area OMAM}'=a^2\,\mathrm{Ln}\,\frac{X+Y}{a}$$

En la hipérbole equilátera unidad, es decir en aquella en que a=1, llamando u el área OMM', podemos escribir:

$$u=\mathrm{Ln}\,(X+Y)\,;\;X+Y=e^u.$$

pero por otra parte tenemos:

$$(X-Y)\,(X+Y)=1\,;\;X-Y=\frac{1}{X+Y}=e^{-u}$$

Por consiguiente:

$$X=\frac{1}{2}\,(e^u+e^{-u}),\;Y=\frac{1}{2}\,(e^u-e^{-u})$$

Por analogía con las funciones circulares, a las funciones anteriores se les llama cosh y senh; o sea que:

$$(1)\quad X=\cosh\,u=\frac{1}{2}\,(e^u+e^{-u})$$

$$(2)\quad Y=\mathrm{senh}\,u=\frac{1}{2}\,(e^u-e^{-u})$$

Por analogía se define:

$$\mathrm{tangh}\,u=\frac{\cosh\,u}{\cosh\,u}=\frac{e^u-e^{-u}}{e^u+e^{-u}}$$

RELACION ENTRE LAS FUNCIONES SENH u COSH u.

Elevando al cuadrado (1) y (2) y por substracción se tiene:

$$(\cosh u)^2 - (\operatorname{senh} u)^2 = 1$$

y muchas expresiones que guardan relación formal con las funciones circulares.

FUNCIONES HIPERBOLICAS INVERSAS

Las dos principales, son:

$$u = \operatorname{Arg} \cosh X = \cosh^{-1} X$$

$$u = \operatorname{Arg} \operatorname{senh} X = \operatorname{senh}^{-1} X$$

También es importante tener en cuenta que:

$$u = \operatorname{Ln} (X + Y) = \operatorname{Ln} (X + \sqrt{X^2 - 1}) = \operatorname{Arg} \cosh X$$

de manera que por medio de una tabla de logaritmos se puede calcular el argumento partiendo del valor de la función.

DERIVADAS DE 1º Y 2º ORDEN

Partiendo de las relaciones exponenciales (1) y (2) que definen las dos funciones hiperbólicas más usadas, se obtiene por derivación:

$$\frac{d}{du} \cosh u = \frac{1}{2} (e^u - e^{-u}) = \operatorname{senh} u$$

$$\frac{d}{du} \operatorname{senh} u = \frac{1}{2} (e^u + e^{-u}) = \cosh u$$

así mismo:

$$\frac{d^2}{du^2} \cosh u = \cosh u \; ; \; \frac{d^2}{du^2} \operatorname{senh} u = \operatorname{senh} u$$

DESARROLLOS EN SERIE

Se obtiene recordando el valor de la función exponencial, tachando elementos de signo contrario. Son los siguientes:

$$\cosh u = 1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^6}{6!} + \dots\dots\dots$$

$$\operatorname{senh} u = u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \frac{u^7}{7!} + \dots\dots\dots$$

LUIS DE GREIFF B.
Profesor