Sobre la línea central (Directriz) de un arco empotrado

Especial para **DYNA**

Según Kőgler, fue Ligowski el primer investigador que dio la ecuación de la línea central de un arco o bóveda que coincide con la línea de presiones correspondiente a la carga muerta.

Strassner en Alemania y Whitney en los Estados Unidos, basados en la ecuación mensionada, han dado el procedimiento de cálculo directo o de elección racional de un anteproyecto.

Sea un arco simétrico para el cual son:

$L =$ luz o separación entre centros de arranques;

$f =$ flecha o altura de clave (al centro)

$l_1 = L/2$ semiluz.

Sistema de ejes coordenados; el de x, horizontal, dirección positiva hacia la izquierda; el de y vertical, dirigido hacia abajo (figura 1). Origen en la clave.

$n = \frac{y}{f}$, valor de la ordenada reducida o sea dividida por la flecha;

$s = \frac{x}{l_1}$, valor de la abscisa reducida, dividida por la semiluz.

La ecuación cuya obtención vamos a presentar, es la siguiente:

$$y = \frac{f}{m-1} \left(\cosh k \frac{x}{l_1} - 1\right)$$

ó

$$n = \frac{1}{m-1} (\cosh k s - 1)$$

en que $m = \cosh k$.

La significación de m se ve en seguida. Es:

$Qo =$ carga en la clave;

$Qa =$ carga en el arranque;

$$m = \frac{Qa}{Qo} = \text{razón de dichas cargas.}$$

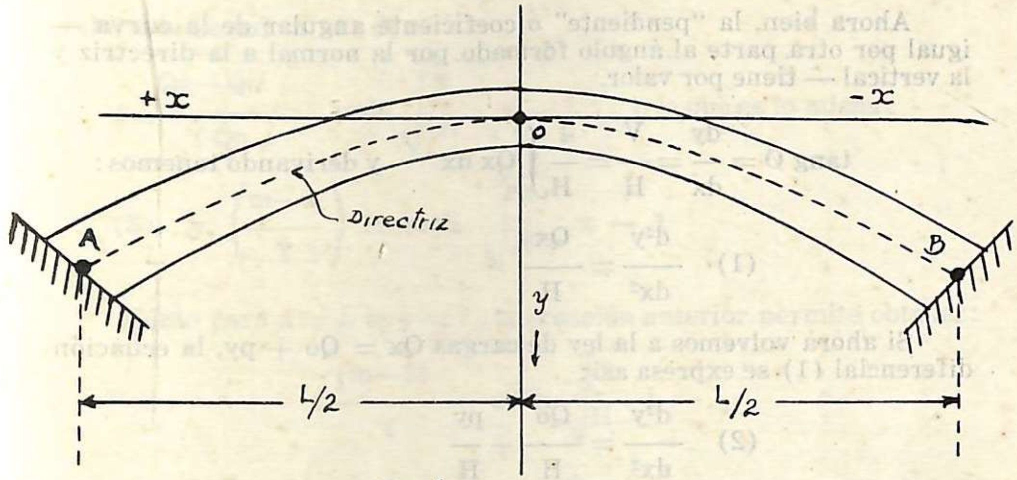

Fig 1

Atendiendo a la figura 2, vemos que si se desprecia una magnitud pequeña proveniente del mayor peso específico del material —fábrica— de la bóveda sobre el peso específico del material de relleno o terraplén, la ley aproximada de carga es la siguiente:

$$Qx = Qo + py$$

en que: p = peso específico del terraplén.

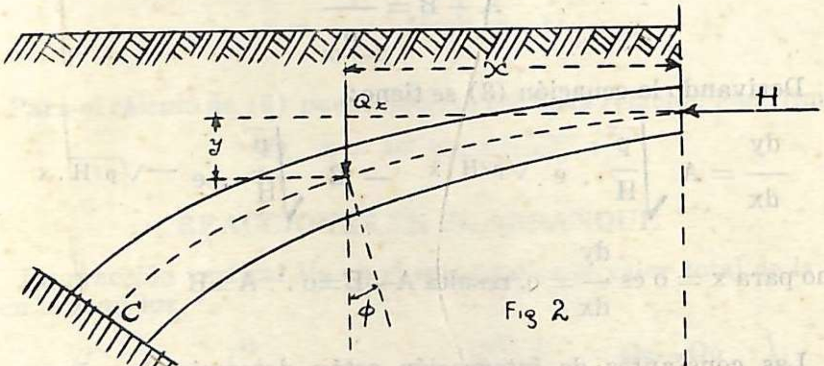

Fig 2

Busquemos, ahora, la ecuación diferencial de la directriz. Sea CE la línea de presiones que hemos de tomar como directriz del arco. Sea Qx la carga continua que corresponde al punto de coordenadas x, y. H = empuje en la clave = componente horizontal del empuje en E. La componente vertical del empuje en E, vale:

$$V = \int_{o}^{x} Qx\,dx$$

Ahora bien, la "pendiente" o coeficiente angular de la curva — igual por otra parte al ángulo formado por la normal a la directriz y la vertical — tiene por valor.

$$\operatorname{tang} \emptyset = \frac{dy}{dx} = \frac{V}{H} = \frac{1}{H}\int_{o}^{x} Qx\,dx \qquad \text{y derivando tenemos:}$$

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Qx}{H}$$

Si ahora volvemos a la ley de cargas $Qx = Qo + py$, la ecuación diferencial (1) se expresa así:

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Qo}{H} + \frac{py}{H}$$

La solución de esta ecuación diferencial es la siguiente:

$$(3) \qquad y = Ae^{\sqrt{p/H}\,.\,x} + Be^{\sqrt{p/H}\,.\,x} - \frac{Qo}{p}$$

por tenerse $y = o$ para $x = o$, obtenemos:

$$A + B = \frac{Qo}{p}$$

Derivando la ecuación (3) se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = A\sqrt{\frac{p}{H}}\,.\,e^{\sqrt{p/H}\,.\,x} - B\sqrt{\frac{p}{H}}\,.\,e^{-\sqrt{p/H}\,.\,x}$$

como para $x = o$ es $\frac{dy}{dx} = o$, resulta $A - B = o \therefore A = B$

Las constantes de integración están determinadas. Luego podemos escribir:

$$(4) \qquad y = \frac{Qo}{2p}\left(e^{\sqrt{p/H}\,.\,x} + e^{-\sqrt{p/H}\,.\,x}\right) - \frac{Qo}{p}$$

De la relación de cargas obtenemos: $Qa = Qo + pf \therefore p = \frac{Qa - Qo}{f}$

valor que llevado a (4) da:

$$y . \frac{Qa - Qo}{f\,Qo} = \cosh \sqrt{\frac{p}{H}} . x - 1 \qquad \text{o lo que es lo mismo,}$$

$$(5) \quad y . \left(\frac{m-1}{f}\right) = \cosh \sqrt{\frac{p}{H}} . x - 1$$

Como para $x = l_1$ es $y = f$, la ecuación anterior permite obtener:

$$f \frac{(m-1)}{f} = \cosh \sqrt{\frac{p}{H}} . l_1 - 1$$

si escribimos $\sqrt{\frac{p}{H}} . l_1 = k$, llegamos a

(6) $m = \cosh k$, por una parte, y por otra según (5)

$$y = \frac{f}{m-1}\left(\cosh \frac{k}{l_1} . x - 1\right) \qquad \text{ó también}$$

$$n = \frac{1}{m-1} (\cosh ks - 1)$$

Para el cálculo de (6) puede hacerse uso de la relación logarítmica:

$$(7) \quad k = \operatorname{Ln} (m + \sqrt{m^2 - 1})$$

REACCIONES EN EL ARRANQUE

La reacción vertical Va en el arranque es el valor total de la carga en la semi-luz.

$$Va = \int_0^{l_1} Qx\,dx = \int_0^{l_1} (Qo + py)\,dx = \int_0^{l_1} \left(Qo + \frac{Qa - Qo}{f} y\right) dx$$

$$Va = Qo \int_0^{l_1} \left(1 + \frac{m-1}{f} . y\right) dx = Qo\,l_1 + Qo \frac{(m-1)}{f} \int_0^{l_1} y\,dx$$

$$= Qo\, l_1 + Qo \frac{f}{(m-1)} \cdot \frac{m-1}{f} \int_0^{l_1} \left(\cosh \frac{kx}{l_1} - 1 \right) dx$$

$$= Qo\, l_1 + Qo \frac{l_1}{k} \left(\operatorname{senh} \frac{kx}{l_1} \right)_0^{l_1} - Qo\, l_1$$

$$Va = Qo \frac{l_1}{k} \operatorname{senh} k = Qo \frac{l_1}{k} \sqrt{m^2-1}$$

VALOR DE TANGENTE Ø EN EL ARRANQUE

$$\operatorname{tang} \varnothing = \frac{dy}{dx} = \frac{f}{m-1} \cdot \frac{k}{l_1} \operatorname{senh} \frac{k}{l_1} \cdot x,$$ que para $x = l_1$ nos da

$$(\operatorname{tang} \varnothing)^{l_1} = \frac{kf}{l_1\,(m-1)} \cdot \operatorname{senh} k = \frac{kf \sqrt{m^2-1}}{l_1\,(m-1)}$$

VALOR DE H

$$H = \frac{V}{\operatorname{tang} \varnothing} = \frac{Qo\, l_1 \sqrt{m^2-1}}{k^2 f \sqrt{m^2-1}}\; l_1\,(m-1)$$

$$= \frac{Qo\,(m-1)\, l_1^2}{K^2 f}$$

Por el Profesor LUIS DE GREIFF B.