

SECCION DE MATEMATICAS

Sobre algunas cuestiones relativas a la Elipse

Por el Ingo. Luis de Greiff B.
Profesor de la Facultad.

Débese a Poncelet la demostración del siguiente teorema, válido para todas las cónicas focales:

Si desde un punto M , exterior a la elipse, se trazan las dos tangentes MT_1 , MT_2 , los dos ángulos T_1FM , T_2FM que tienen el vértice en el foco, son iguales. (Fig. 1). En otras palabras, la recta que une el foco al punto M es bisectriz del ángulo formado por los rayos focales que van a los puntos de contacto de las tangentes.

La demostración dada por Poncelet, apoyándose en la circunferencia *principal*, es elegante y sencilla, a pesar de lo cual —a título de simple ejercicio— damos la siguiente demostración analítica:

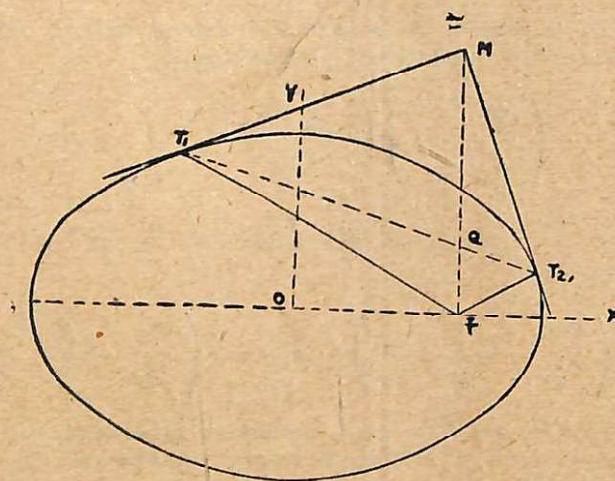


Fig. 1

Se considera el sistema de ejes coordenados que tiene su origen en el centro de la curva, cuyos ejes de X e Y siguen la dirección de los ejes principales. En dicho sistema sean:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) & \text{ las coordenadas de } T_1 \\ (x_2, y_2) & \text{ las coordenadas de } T_2\end{aligned}$$

Las del foco F son $(ae, 0)$.

La distancia del foco a un punto (x_1, y_1) de la curva se expresa linealmente por medio de la abscisa, como sigue:

$$|FT_1| = \sqrt{(x_1 - ae)^2 + y_1^2}$$

y teniendo en cuenta el valor de la ordenada

$$|FT_1| = \sqrt{(x_1 - ae)^2 + b^2/a^2 (a^2 - x_1^2)}$$

$$|FT_1| = \sqrt{e^2 x_1^2 - 2ae x_1 + a^2 e^2 + b^2}$$

Más, por ser $a^2 e^2 + b^2 = a^2 - b^2 + b^2 = a^2$, el valor del rayo focal se reduce así: $|FT_1| = a - ex_1$ en que hemos tomado el valor positivo de la raíz.

Las ecuaciones de las tangentes a los puntos T_1, T_2 son respectivamente:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1, \quad \frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} = 1$$

Las rectas que pasan por M tienen por ecuación:

$$(1) \quad \left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 \right) + \lambda \left(\frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} - 1 \right) = 0$$

Para obtener la ecuación de la recta FM , determinemos λ por la condición que las coordenadas de F satisfagan (1). Será entonces,

$$\left(\frac{ex_1}{a} - 1 \right) + \lambda \left(\frac{ex_2}{a} - 1 \right) = 0$$

$\therefore \lambda = -\frac{a - ex_1}{a - ex_2}$, de manera que la ecuación de FM vale

$$(2) \quad (a - ex_2) \left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 \right) - (a - ex_1) \left(\frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} - 1 \right) = 0$$

Trácese ahora la recta $T_1 T_2$, sea Q el punto de intersección con la recta FM ; vamos a demostrar que $T_1 T_2$ está dividida proporcionalmente a las longitudes de los rayos vectores FT_1, FT_2 .

En efecto: la razón de QT_1 a QT_2 es la misma que la razón de distancias perpendiculares a la recta FM , cuyo valor vamos a expresar, partiendo de la ecuación (2):

$$\frac{\overline{QT_1}}{\overline{QT_2}} = \frac{\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 \right) (a - ex_2) - \left(\frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2} - 1 \right) (a - ex_1)}{\left(\frac{x_2x_1}{a^2} + \frac{y_2y_1}{b^2} - 1 \right) (a - ex_2) - \left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} - 1 \right) (a - ex_1)}$$

por ser iguales a cero dos de los paréntesis, la expresión anterior se simplifica así:

$$\frac{\overline{QT_1}}{\overline{QT_2}} = - \frac{a - ex_1}{a - ex_2}$$

y teniendo en cuenta la expresión dada anteriormente para el valor de los rayos vectores

$$\frac{\overline{QT_1}}{\overline{QT_2}} = - \frac{\overline{FT_1}}{\overline{FT_2}}$$

lo que demuestra que MF es bisectriz del ángulo T_1FT_2 .

A P L I C A C I O N

El teorema de Poncelet permite obtener una relación entre los argumentos del rayo focal de la elipse y el rayo correspondiente del círculo principal.

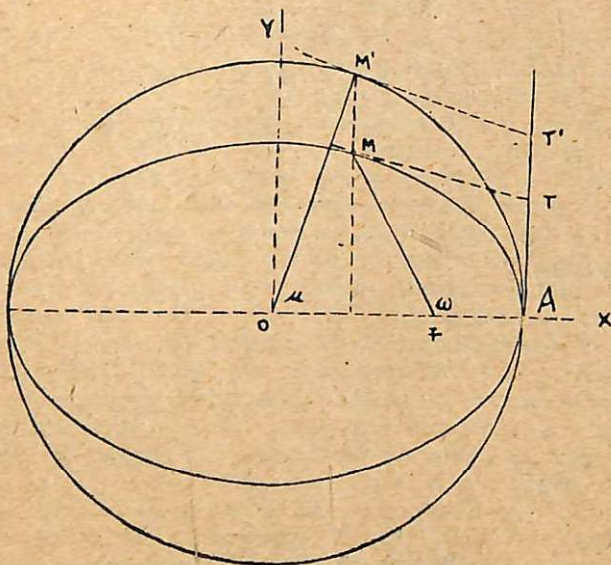


Fig. 2

Sean M y M' dos puntos correspondientes de la elipse y el círculo principal, o sea situados en la misma normal al eje mayor. (Fig. 2).

Si ω es el ángulo xFM y μ el ángulo central xOM' se puede establecer:

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{\mu}{2}$$

Para demostrar esta relación trácense las tangentes en M , M' y A . Se tendrá entonces:

$$AFT = \frac{\omega}{2} \quad AOT' = \frac{\mu}{2}$$

Las ecuaciones de las tangentes a la elipse y al círculo son respectivamente:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1, \quad \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_2}{a^2} = 1$$

Para $x = a$ tenemos

$$AT = \frac{b^2}{-ay_1} (a - x_1)$$

$$AT' = \frac{a}{y_2} (a - x_1); \quad \text{como } y_2 = \frac{a}{b} y_1,$$

$$\text{es} \quad AT' = \frac{b}{y_1} (a - x_1)$$

Ahora bien

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{AT}{AF} = \frac{b^2 (a - x_1)}{a^2 y_1 (1 - e)}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = \frac{AT'}{a} = \frac{b}{ay_1} (a - x_1)$$

Por división se obtiene

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\mu}{2}} = \frac{b}{a} \times \frac{1}{1-e} = \sqrt{1-e^2} \times \frac{1}{1-e}$$

$$\therefore \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{\mu}{2}$$

c. s. q. d.