

SECCION DE MATEMATICAS



El Profesor Luis de Greiff B.

Una de las figuras más sobresalientes en el profesorado de la Facultad es, sin duda alguna, el doctor Luis de Greiff B.

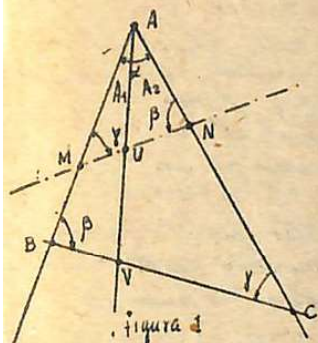
Sus innumerables y valiosos y originales trabajos en el campo de las matemáticas y de la Ingeniería, no sólo le han servido para conquistarse un nombre nacional, sino que han sido suficientes para que su nombre haya traspasado los límites patrios, y hoy, se confunda con los de las más eminentes personalidades de la Matemática del Continente Americano. Dígalo si no, el reciente honor que se le hizo:

En días pasados, THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA, con sede en la Universidad de Buffalo (E. U. A.), tuvo a bien elegirlo miembro suyo, y así se lo comunicaron en nota firmada por el profesor Gehman, secretario de la misma asociación.

DYNA hace llegar al profesor De Greiff los sentimientos de su distinguida consideración y admiración por este nuevo reconocimiento a sus méritos como fiel e incansable cultor de las Matemáticas; a la vez que le deseamos un completo éxito en las labores que desempeñe como miembro de dicha Asociación, ya que tal éxito no tendría otro significado, que el triunfo mismo de la Facultad.

A continuación publicamos un aparte de un extenso estudio sobre la geometría del triángulo, cuyo autor es el mismo *Doctor Luis de Greiff*. Los teoremas marcados con el asterisco tienen el carácter de originales y fueron hallados por el mismo doctor De Greiff.

*Pequeña Memoria
sobre el
Círculo de nueve puntos*



1) Sea un triángulo ABC , cuyos ángulos valen, respectivamente, α, β, γ (figura 1). La recta MN que forma ángulos γ, β , respectivamente con AB, AC , es, por definición, antiparalela de BC . Es evidente que los triángulos AMN, ABC , son semejantes. Ahora, bájese del vértice A una recta arbitraria AUV .

Teorema. Entre los segmentos UM, UN, VB, VC , es válida la siguiente relación

$$(1) \quad \frac{UM}{UN} \cdot \frac{VB}{VC} = \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \gamma}$$

Demostración. - Refiriéndose a los triángulos AMU, AUN de la figura 1, se puede escribir:

$$\frac{UM}{UA} = \frac{\sin A_1}{\sin \gamma} ; \quad \frac{UN}{UA} = \frac{\sin A_2}{\sin \beta}$$

y por división de las relaciones anteriores,

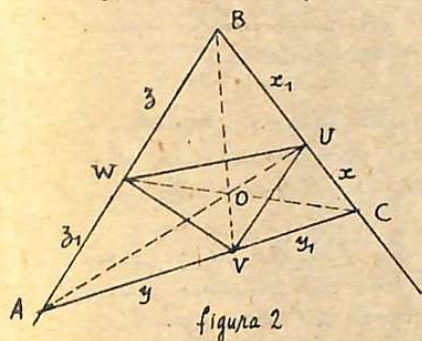
$$(2) \quad \frac{UM}{UN} = \frac{\sin A_1}{\sin A_2} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

dividiendo (2) por (3) queda, finalmente,

$$\frac{UM}{UN} \cdot \frac{VB}{VC} = \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \gamma}$$

Teorema de Ceva. - En todo triángulo, las rectas que unen los vértices a un mismo punto O , determinan sobre los lados opuestos tres puntos U, V, W . Los segmentos producidos en los lados cumplen la relación siguiente (en la que puede exceptuarse para lo que sigue la consideración de los signos)

$$\frac{VA}{VC} \cdot \frac{UC}{UB} \cdot \frac{WB}{WA} = 1$$



(Llámanse cevianas a rectas tales como AU, BV, CW , en honor de Juan de Ceva, geómetra milanés que les introdujo, en la segunda mitad del siglo XVII.

Demostración. - Indicanse los segmentos determinados sobre los lados, por x, x_1, y, y_1, z, z_1 para mayor simplicidad. Los triángulos AOB, AOC tienen la misma base AO , luego sus áreas están entre sí como sus alturas o como los segmentos x, x_1 , etc. Por consiguiente, podemos escribir,

$$\frac{\Delta AOC}{\Delta AOB} = \frac{x_1}{x}, \quad \frac{\Delta AOB}{\Delta BOC} = \frac{y}{y_1}, \quad \frac{\Delta BOC}{\Delta AOC} = \frac{z}{z_1} \quad \text{Multiplicando}$$

ordenadamente las relaciones escritas y suprimiendo factores comunes, se obtiene

$$(5) \frac{x \cdot y \cdot z}{x_1 \cdot y_1 \cdot z_1} = 1, \text{ o tambien, } x \cdot y \cdot z = x_1 \cdot y_1 \cdot z_1$$

Recíproco. Si sobre los lados de un triángulo, o sus prolongaciones, se tienen tres puntos U, V, W para los que se cumple que el producto de tres segmentos no consecutivos VA, UC, WB es igual al producto de los otros tres VC, UB, WA, las rectas AU, BV, CW pasan por un mismo punto.

Para establecer este teorema se puede proceder por el absurdo. Trácese las rectas AU, BV determinando así el punto O. Si la CW no pasa por O podremos trazar la CO determinando así el punto W₁.

Entonces se cumple, por hipótesis, la relación,

$$\frac{VA}{VC} \cdot \frac{UC}{UB} \cdot \frac{WB}{WA} = 1 \quad \text{y, en virtud del teorema directo, } \frac{VA}{VC} \cdot \frac{UC}{UB} \cdot \frac{W'B}{W'A} = 1$$

Por división de las dos, se deduce $\frac{W'B}{W'A} = \frac{WB}{WA}$ que sólo puede cumplirse

cuando W' coincide con W.

Teorema (de Carnot). - Si los lados de un triángulo son cor-

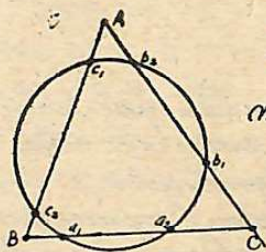


figura 3

tados por un círculo en los puntos $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ se cumple la relación siguiente:

$$(VI) \frac{a_2B}{a_1C} \times \frac{a_2C}{a_1B} \times \frac{b_2C}{b_1A} \times \frac{b_2A}{b_1C} \times \frac{c_2A}{c_1B} \times \frac{c_2B}{c_1A} = 1$$

Para establecer este teorema, válido para polígonos cualesquiera, escribiremos las siguientes igualdades entre productos de segmentos

$$Ba_1 \times Ba_2 = Bc_2 \times Bc_1, \quad Cb_1 \times Cb_2 = Ca_2 \times Ca_1, \quad Aa_1 \times Aa_2 = Ab_2 \times Ab_1$$

Multiplicando ordenadamente estas relaciones y disponiendo los factores del segundo miembro como divisores, se obtiene la relación (6) que se quería demostrar.

Teorema. - Si en un triángulo ABC, las rectas Aa_1, Bb_1, Cc_1 son cerianas, o sea, pasan por un mismo punto O_1 , el círculo circunscrito al triángulo $a_1b_1c_1$, determina sobre los lados del primero otros puntos a_2, b_2, c_2 , de tal manera dispuestos, que las rectas Aa_2, Bb_2, Cc_2 pasan también por un mismo punto O_2 (son a su vez, cerianas). (Figura 4)

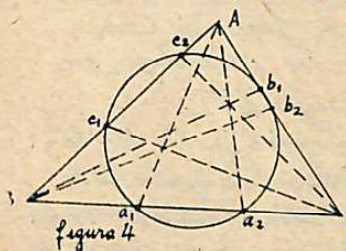


figura 4

Para demostrar este teorema tendremos en cuenta la relación (6), escrita, así:

$$\frac{aB}{a_1C} \times \frac{b_1C}{b_1A} \times \frac{c_1A}{c_1B} \times \frac{a_2B}{a_2C} \times \frac{b_2C}{b_2A} \times \frac{c_2A}{c_2B} = 1$$

Según el teorema de Ceva los tres primeros factores equivalen a la unidad, luego quedan solamente

$$\frac{a_2B}{a_2C} \times \frac{b_2C}{b_2A} \times \frac{c_2A}{c_2B} = 1$$

que demuestra que también Aa_2, Bb_2, Cc_2 han de pasar por un mismo punto, O_2 .

El círculo de nueve puntos

Basados en los teoremas anteriores, vamos a demostrar nuevamente el siguiente teorema debido a Leonardo Euler y estudiado muy detenidamente por Feuerbach*.

Teorema. En todo triángulo, los pies de las alturas, los puntos medios de los lados y los puntos medios de los segmentos de altura comprendidos entre el vértice y el ortocentro, están dispuestos sobre una misma circunferencia.

Demostración. Sea el triángulo ABC y sean los puntos medios de los lados que designamos a_1, b_1, c_1 (figura 5). Construyamos el círculo circums-

* Feuerbach (Karl Wilhelm) - alemán, hermano del filósofo Ludwig Feuerbach, nació en 1800 en Jena y murió en 1834 siendo profesor de matemáticas en el Gimnasio de Erlangen.

cripto al triángulo $a_1b_1c_1$; vamos a demostrar que si son a_2, b_2, c_2 los segundos puntos de intersección del círculo anterior con los lados del triángulo ABC , las rectas Aa_2, Bb_2, Cc_2 son alturas del triángulo fundamental, o, dicho en otras palabras, el triángulo $a_2b_2c_2$ es el triángulo órtico correspondiente al ABC .

En primer lugar, las rectas Aa_2, Bb_2, Cc_2 , han de cortarse en un mismo punto, según demuestra el teorema.

Llámanse x, y, z , los puntos de intersección de los lados del triángulo $a_2b_2c_2$ con las alturas del triángulo ABC ; es decir, que x es la intersección de b_2c_2 con Aa_2 , etc.

Podemos escribir las siguientes relaciones de semejanza,

$$\begin{aligned} \triangle Bc_2a_2 &\sim \triangle Bc_1a_1 \sim \triangle ABC, \\ \triangle Ab_2c_2 &\sim \triangle Ab_1c_1 \sim \triangle ABC, \\ \triangle Ca_2b_2 &\sim \triangle Ca_1b_1 \sim \triangle ABC; \end{aligned}$$

o sea que los triángulos $Ab_2c_2, Bc_2a_2, Ca_2b_2$ son semejantes entre sí por serlo al triángulo fundamental. Entonces, b_2c_2 es antiparalela de BC , a_2b_2 lo es de BA , y, por último, a_2c_2 de AC .

Para cada uno de los vértices podemos escribir,

$$(7) \quad \frac{x b_2}{x c_2} \div \frac{a_2 C}{a_2 B} = \frac{\sin^2 C}{\sin^2 B}; \text{ por otra parte, es } \frac{a_2 C}{a_2 b_2} = \frac{\sin B}{\sin C}, \frac{a_2 B}{a_2 c_2} = \frac{\sin C}{\sin B}$$

