Resolución numérica de Ecuaciones Algébricas y Trascendentales

"METODO GRAEFFE"

El presente estudio es la primera parte del que se propone entregar su autor. — Especial para DYNA.

1ª PARTE RAICES REALES Y DESIGUALES.

NOTA: Sirvieron como obras de consulta: las notas del curso de "Extensión Matemática" por el Dr. Luis de Greiff B. y el libro de Ernest Julius Berg "Heaviside's Operational Calculus".

El método que expongo a continuación, conocido como "método Graeffe" (Carl Heinrich Graeffe 1837), es de gran uso, especialmente en el caso de ecuaciones que poseen raíces complejas. La determinación preliminar de la posición aproximada de las raíces es innecesaria, y para ecuaciones algébricas todas las raíces se encuentran a un mismo tiempo.

La base del método es obtener una ecuación cuyas raíces sean de una potencia alta, digamos, la doscientos cincuenta y seis de las raíces de la ecuación dada. La ley de formación de las nuevas ecuaciones basadas en la ecuación original es muy sencilla. Si x_1, x_2, $x_3 \ldots$ son las raíces de la ecuación dada, x_1^{256}, x_2^{256}, $x_3^{256} \ldots$ serán las raíces de la ecuación buscada.

Las últimas raíces están muy separadas, porque, suponiendo x_1 dos veces x_2, se tendrá que x_1^{256} será 2^{256} veces x_2^{256}, y una ecuación cuyas raíces estén ampliamente distanciadas puede resolverse de una vez numéricamente.

Supongamos que se quiere resolver la ecuación:

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + a_4x^{n-4} + \ldots + a_n = 0 \qquad (1)$$

Asumamos, para el caso presente, que las raíces son reales y diferentes y que son $-a$, $-b$, $-c$, $-d$, $\ldots$; además, que se tenga $|a|>|b|>|c|>|d| \ldots$

Los valores a, b, c, d, $\ldots$, que son las raíces de la ecuación pero de signo contrario, serán llamadas raíces Encke (Juan Francisco Encke, astrónomo alemán).

Supongamos $[a]=a+b+c+\ldots$, la suma de las raíces Encke y $[ab]=ab+ac+bc+\ldots$, la suma de los productos de las raíces Encke tomadas de dos en dos, etc. También:

$$[a^m] = a^m + b^m + c^m + \ldots$$

$$[a^mb^m] = a^mb^m + a^mc^m + b^mc^m + \ldots$$

Y la ecuación (I) la podemos escribir

$$x^n + [a]x^{n-1} + [ab]x^{n-2} + [abc]x^{n-3} + \ldots + [abcd\ldots] = 0 \qquad (2)$$

y la ecuación cuyas raíces son la potencia m, de las raíces de la ecuación dada, será, siempre que m sea par,

$$x^n + [a^m]x^{n-1} + [a^mb^m]x^{n-2} + [a^mb^mc^m]x^{n-3} + \ldots = 0 \qquad (3)$$

Es necesario formar la ecuación (3) cuando se conoce la ecuación (2) y m es un número determinado.

En la práctica, m en la ecuación (3) es un número grande, pero esta ecuación no puede construírse de un solo paso; para ello, primero tomamos $m=2$ y formanos una ecuación cuyas raíces Encke, sean los cuadrados de las raíces Encke de la ecuación original; después, habiendo hecho esto, se repite el proceso, formando una ecuación cuyas raíces Encke sean los cuadrados de las raíces Encke de la última ecuación obtenida, esto es, la cuarta potencia de las raíces Encke de la ecuación dada, y así sucesivamente.

Así, nuestro problema es construír la ecuación (3), cuando la ecuación (2) se conoce y m vale 2. Esto se hace como sigue: Se reagrupa la ecuación (1) para que los términos que contienen potencias pares de x estén a un lado y los que contienen potencias impares al otro; asumiendo n par:

$$(x^n + a_2x^{n-2} + a_4x^{n-4} \dots) = (-a_1x^{n-1} - a_3x^{n-3} - a_5x^{n-5} - \dots)$$

elevando al cuadrado:

$$(x^n + a_2x^{n-2} + a_4x^{n-4}\dots))^2 = (a_1x^{n-1} + a_3x^{n-3} + a_5x^{n-5} \dots)^2$$

Expandiendo:

$$\begin{aligned} &x^{2n} + a_2x^{2n-2} + a_4x^{2n-4} + a_2x^{2n-2} + a_2{}^2x^{2n-4} + a_2a_4x^{2n-6} \\ &+ a_4x^{2n-4} + a_2a_4x^{2n-6} + a_4{}^2x^{2n-8} + \dots \\ &= a_1{}^2x^{2n-2} + a_1a_3x^{2n-4} + a_1a_5x^{2n-6} + a_1a_3x^{2n-4} \\ &+ a_3{}^2x^{2n-6} + a_3a_5x^{2n-8} + \dots \end{aligned}$$

Ahora, si tomamos $-y = x^2$

$$\begin{aligned} &(-y)^n + a_2(-y)^{n-1} + a_4(-y)^{n-2} + a_2(-y)^{n-1} + a_2{}^2(-y)^{n-2} \\ &+ a_2a_4(-y)^{n-3} + a_4(-y)^{n-2} + a_2a_4(-y)^{n-3} + \dots \\ &= a_1{}^2(-y)^{n-1} + a_1a_3(-y)^{n-2} + a_1a_5(-y)^{n-3} + a_1a_3(-y)^{n-2} \\ &+ a_3{}^2(-y)^{n-3} + a_5a_3(-y)^{n-4} + \dots \end{aligned}$$

y, puesto que n es par, se reduce a:

$$\begin{aligned} &y^n - a_2y^{n-1} + a_4y^{n-2} - a_2y^{n-1} + a_2{}^2y^{n-2} - a_2a_4y^{n-3} \\ &+ a_4y^{n-2} - a_2a_4y^{n-3} + \dots \\ &= -a_1{}^2y^{n-1} + a_1a_3y^{n-2} - a_1a_5y^{n-3} + a_1a_3y^{n-2} \\ &- a_3{}^2y^{n-3} + a_5a_3y^{n-4} + \dots \end{aligned}$$

reagrupando, se tiene:

$$y^n + (a_1{}^2-2a_2)y^{n-1} + (a_2{}^2-2a_1a_3+2a_4)y^{n-2} + \dots = 0 \qquad (4)$$

puesto que las raíces de la ecuación (1) son $-a$, $-b$, $-c$, ... las de la ecuación (4) serán $-a^2$ $-b^2$ $-c^2$ ....

Entonces, escribiendo x en lugar de y, la ecuación cuyas raíces Encke son los cuadrados de las raíces Encke de (1), es

$$x^n + \left.\begin{matrix} a_1{}^2 \\ -2a_2 \end{matrix}\right\} x^{n-1} + \left.\begin{matrix} a_2{}^2 \\ -2a_1a_3 \\ +2a_4 \end{matrix}\right\} x^{n-2} + \left.\begin{matrix} a_3{}^2 \\ -2a_2a_4 \\ +2a_1a_5 \\ -2a_6 \end{matrix}\right\} x^{n-3} + \left.\begin{matrix} a_4{}^2 \\ -2a_3a_5 \\ +2a_2a_6 \\ -2a_1a_7 \\ +2a_8 \end{matrix}\right\} x^{n-4} + \dots = 0 \qquad (5)$$

Estableciendo la ecuación (5) en palabras, se llega a la ley de formación. "El coeficiente de cualquier potencia de x se forma agregando al cuadrado del coeficiente correspondiente de la ecuación original, el doble producto de todo par de coeficientes que equidisten igualmente de éste a cada lado, y alternando estos dobles productos con los signos menos y más".

Si se repite el mismo proceso con la ecuación (5) se obtiene una ecuación cuyas raíces Encke son de una potencia cuatro veces mayor que las de la ecuación (1). El peso siguiente da una ecuación cuyas raíces Encke son de una potencia ocho veces mayor que las de (1), y así sucesivamente.

Supongamos $m = 64$ ó $= 128$ ó 256; puesto que $a>b$, a^m será enormemente mayor que b^m ó c^m ó d^m, y entonces la suma $[a^m]$ es prácticamente igual a a^m. Similarmente, $[a^m b^m] \cong a^m b^m$, ó, más exactamente, puesto que $a>b>c>d$

$[a^m]/a^m = (1+\epsilon)$ cuando en realidad $[a^m] = a^m + b^m + c^m \ldots$ y ϵ es muy pequeño.

$$log[a^m] = m\ log\ |a| + log\ (1+\epsilon)$$

$$\therefore log\ |a| = 1/m\ log\ [a^m] - 1/m\ log\ (1+\epsilon)$$

$[a^m]$ puede calcularse despreciando $1/m\ log\ (1+\epsilon)$

NOTA. m se hace lo más grande posible. Así se determina $|a|$, y a continuación:

$$[a^m b^m] = a^m b^m\ (1+r)$$

$$log\ (a^m b^m) + log\ (1+r) = log\ [a^m b^m]$$

$$log\ (a\ b) = 1/m\ log\ [a^m b^m] - 1/m\ log\ (1+r)$$

$$log\ |b| = 1/m\ log\ [a^m b^m] - 1/m\ log\ [a^m]$$

obtenido el valor de $|b|$, se continúa con las demás raíces. Para conocer el signo de las raíces es necesario substituírlas en la ecuación original; este es el principal inconveniente del método.

Una cuestión muy importante es saber hasta cuando es necesario doblar a m. El tiempo de suspender la operación se tiene cuando al doblar a m, los coeficientes $[a^{2m}]$, $[a^{2m}b^{2m}]$ de la nueva ecuación resulten ser los cuadrados de los coeficientes $[a^m]$, $[a^m b^m]$ de la ecuación ya obtenida.

Un ejemplo numérico aclarará este punto.

Si, por ejemplo, se desea resolver la ecuación $S^3 + 11\ S^2 - 113\ S + 136 = 0$, es muy útil la tabulación siguiente:

	S^3	$+ 11\ S^2$	$-113\ S$	$+ 136 = 0$
	S^3	S^2	S	C
p	1	11	-113	136
cuadrados de los coeficientes	1	121	12769	18476
dobles productos		226	-2992	
p^2	1	347	9777	18476
	1	$12{,}040 \times 10^4$	$95{,}59 \times 10^6$	
		$-1{,}955 \times 10^4$	$-12{,}84 \times 10^6$	$34{,}21 \times 10^7$
p^4	1	$10{,}085 \times 10^4$	$82{,}75 \times 10^6$	$34{,}21 \times 10^7$
	1	10.172×10^9	$68{,}47 \times 10^{14}$	$11{,}70 \times 10^{16}$
		$-0{,}165 \times 10^9$	$-0{,}69 \times 10^{14}$	

p^8	1	$10{,}007 \times 10^{9}$	$67{,}78 \times 10^{14}$	$11{,}70 \times 10^{16}$
	1	100.140×10^{18} $-0{,}010 \times 10^{18}$	$45{,}94 \times 10^{30}$	$13{,}60 \times 10^{33}$
p^{16}	1	$100{,}130 \times 10^{18}$	$45{,}94 \times 10^{30}$	$13{,}60 \times 10^{33}$

p designa la ecuación original.

p^2 es la ecuación cuyas raíces Encke, son los cuadrados de las raíces Encke de p.

p^4 es la ecuación cuyas raíces Encke, son los cuadrados de las raíces Encke de p^2, etc.

Se puede ver en el ejemplo que los coeficientes de p^{16} son prácticamente los cuadrados de los coeficientes de p^8. En caso de que se deseen resultados muy exactos debe continuarse el proceso hasta donde se juzgue conveniente; para el ejemplo que estamos resolviendo se obtiene suficiente exactitud si tomamos m igual a ocho.

Tomando $m = 8$, se tendrá la ecuación:

$$S^3 + 10{,}007 \times 10^9 S^2 + 67{,}78 \times 10^{14} S + 11{,}70 \times 10^6 = 0$$

que nos da:

$$a^8 = [a^8] = 10{,}007 \times 10^9$$
$$log\ |a| = 1/8 \times 10{,}007 \times 10^9$$
$$lag\ |a| = 1/8 \times 10{,}00030390 = 1{,}25003799$$
$$\therefore a = \pm 17{,}7843$$
$$[a^8 b^8] = 67{,}78 \times 10^{14} = (ab)^8$$
$$log\ |ab| = 1/8 \times log\ 67{,}78 \times 10^{14}$$
$$log\ |b| = 1/8 \times 15{,}8311016 - 1{,}2500380$$
$$= 1{,}9788877 - 1{,}2500380 = 0{,}7288497$$
$$\therefore b = \pm 5{,}3561$$
$$[a^8 b^8 c^8] = (abc)^8 = 11{,}70 \times 10^{16}$$
$$log\ (a\bar{b}c) = 1/8\ log\ 11{,}70 \times 10^{16}$$
$$log\ |c| = 1/8 \times 17{,}0681859 - 0{,}7288497 - 1{,}2500380$$
$$= 2{,}1335232 - 0{,}7288497 - 1{,}2500380$$
$$= 0{,}1546355$$
$$\therefore c = \pm 1{,}4277$$

Reemplazando en la ecuación original se obtienen los verdaderos signos de las raíces:

$$a = -17{,}7843; \quad b = 5{,}3561; \quad c = 1{,}4277$$

(CONTINUARA)

JUAN SANTAMARIA A.
Estudiante de Ingeniería Civil