ECUACIONES DIFERENCIALES

Por el

Dr. Jorge Mejía Ramírez I. C.
Profesor de la Facultad Nacional de Minas

487
viene No. 40
pag. 100, 1954

(CONTINUACION)

27. DETERMINACION DE LA INTEGRAL PARTICULAR. Veremos a continuación dos métodos generales para determinar la integral particular de la ecuación lineal completa,

$$\phi(D)y = f(x)$$

El método que desarrollaremos a continuación es el llamado de *repetición* o de *integraciones sucesivas.*

Sea pues la ecuación,

$$(D^n + A_1D^{n-1} + A_2D^{n-2} + \ldots\ldots + A_{n-1}D + A_n)y = f(x)$$

Vimos que los operadores lineales con coeficientes constantes obedecen a las leyes del álgebra pudiendo por consiguiente tratarse como polinomios.

Supongamos pues, que a $\phi(D)$ podemos factorizarlo en la forma,

$$(D-a_1)\ (D-a_2)\ \ldots\ldots\ (D-a_n)y = f(x)$$

si operamos sobre ambos lados de la expresión anterior con

$$1/(D-a_n)$$

nos toma la forma,

$$(D-a_1)\ (D-a_2)\ \ldots\ldots\ (D-a_{n-1})y = [1/(D-a_n)]f(x) \qquad (1)$$

según el teorema II,

$$[1/(D-a_n)]\ f(x) = e^{kx}\ [1/(D-a_n+k)]\ f(x)\ e^{-kx}$$

más si tomamos $-a_n + k = 0$, (1) se nos transforma a,

$$(D-a_1)\ (D-a_2)\ \ldots\ldots (D-a_{n-1})y = e^{a_nx}\ [1/D]\ f(x)\ e^{-a_nx}$$
$$= e^{a_nx} \int f(x)\ e^{-a_nx}dx \qquad (2)$$

operando sobre ambos lados de (2) con $1/(D-a_{n-1})$ y aplicando nuevamente el teorema II, se tiene:

$$(D-a_1)\ \ldots\ldots\ (D-a_{n-2})y = [1/(D-a_{n-1})]\ e^{a_nx}\int f(x)\ e^{-a_nx}dx$$
$$= e^{cx}\ [1/(D-a_{n-1}+c)]\ e^{-cx}e^{a_nx}\int f(x)\ e^{-a_nx}dx$$

haciendo $c-a_{n-1} = 0$, la ecuación anterior se reduce a,

$$= e^{a_{n-1}x}\ 1/D\ e^{-a_{n-1}x}\ e^{a_nx}\int f(x)\ e^{-a_nx}dx$$
$$= e^{a_{n-1}x}\int [e^{(a_n-a_{n-1})x}\int f(x)\ e^{-a_nx}\,dx]dx$$

Operando sucesivamente con,

$$[1/(D-a_{n-3})],\ \ldots\ldots\ [1/(D-a_2)]\ \text{ y }\ [1/(D-a_1)]$$

se tendrá finalmente como primitiva de la ecuación $\phi(D)y = f(x)$ en su parte correspondiente a la integral particular,

$$y = e^{a_1x}\int e^{(a_2-a_1)x}\int \ldots\ldots \int e^{(a_n-a_{n-1})x}\int f(x)\ e^{-a_nx}(dx)^n$$

Desarrollamos a continuación el segundo método general para la determinación de la integral particular, el cual se conoce con el nombre de las fracciones parciales.

Representando simbólicamente la solución de la ecuación

$$(D^n + A_1 D^{n-1} + A_2 D^{n-2} + \ldots\ldots + A_{n-1} D + A_n) y = f(x)$$

con la forma,

$$y = \frac{1}{D^n + A_1 D^{n-1} + \ldots\ldots + A_{n-1} D + A_n} f(x)$$

y considerando el denominador del operador anterior como un polinomio en D de grado n, podremos descomponerlo en sus fracciones parciales,

$$1/\phi(D) = R_1/D-a_1 + R_2/D-a_2 - \ldots\ldots + R_n/D-a_n$$

y por consiguiente,

$$y = 1/\phi(D) f(x) = [R_1/D-a_1] f(x) + \ldots\ldots + [R_n/D-a_n] f(x)$$

expresión en la cual R_1, R_2, ... y R_n son simples números.

Aplicando a cada término de la igualdad anterior el segundo teorema general,

$$y = R_1 e^{k_1 x} [1/D-a_1+k_1] f(x)\ e^{-k_1 x} + R_2 e^{k_2 x} [1/D-a_2+k_2] f(x)\ e^{k_2 x} + \ldots\ldots\ldots\ldots + R_n e^{k_n x} [1/D-a_n+k_n f(x)]\ e^{-k_n x}$$

y eligiendo a k_1, k_2, ... k_n de tal manera que, $k_1-a_1=0$, $k_2-a_2=0$, ... $k_n-a_n=0$, se obtiene finalmente,

$$y = R_1 e^{a_1 x} \int f(x)\ e^{-a_1 x} dx + R_2 e^{a_2 x} \int f(x)\ e^{-a_2 x} dx + \ldots\ldots \ldots\ldots + R_n e^{a_n x} \int f(x) e^{-a_n x} dx$$

Nota importante: Cuando $\phi(D)$ tenga raíces repetidas, el método anterior sólo es aplicable para la parte correspondiente a las raíces diferentes.

Supongamos que $a_1=a_2=a_3$, entonces,

$$\phi(D) y = [(D-a_1)\ (D-a_1)] [(D-a_1)(D-a_4)\ldots(D-a_n) y] = f(x)$$

$$(D-a_1)\ (D-a_1) y = [1/(D-a_1)\ (D-a_4)\ \ldots\ldots\ (D-a_n)] f(x)$$

$$= [R_3/D-a_1] f(x) + [R_4/D-a_4] f(x) + \ldots\ldots + [R_n/D-a^n] f(x)$$

$$= R_3 e^{a_1 x} \int f(x) e^{-a_1 x} dx + R_4 e^{a_4 x} \int f(x) e^{-a_4 x} dx \ldots\ldots\ldots + R_n e^{a_n x} \int f(x)\ e^{-a_n x} dx$$

Ejemplo 1º Método de la repetición.

$$(D^2-5D+6) = e^{4x}$$

$$(D-3)\ (D-2) y = e^{4x}$$

$$(D-2) y = [1/D-3] e^{4x} = e^{kx} [1/D-3+k]\ e^{4x} e^{-kx}$$

$$k-3 = 0 \quad \therefore \quad k = 3$$

$$(D-2) y = e^{3x}\ 1/D\ e^{(4-3)} = e^{3x} \int e^x dx = e^{4x}$$

$$y = [1/D-2]\ e^{4x} = e^{kx}\ [1/D-2+k]\ e^{4x}.\ e^{-kx}$$

$$= e^{2x}\ 1/D\ e^{2x} = e^{2x} \int e^{2x} dx = e^{4x}/2$$

Como la función complementaria de la ecuación propuesta es, evidentemente,

$$C_1e^{3x} + C_2e^{2x}$$

la primitiva o solución general será,

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + e^{4x}/2$$

Método de las fracciones parciales.

$$(D^2 - 5D + 6)\ y = e^{4x}$$

$$y = \frac{1}{D^2 - 5D + 6}\,e^{4x} = \left[\frac{R_1}{D-3} + \frac{R_2}{D-2}\right] e^{4x}$$

$$R_1 + R_2 = 0,\ -2R_1 - 3R_2 = 1,\ \therefore -R_1 = R_2 = -1$$

$$y = \frac{1}{D-3}\,e^{4x} - \frac{1}{D-2}\,e^{4x}$$

$$y = e^{kx}\frac{1}{D-3+K}\,e^{4x}.\,e^{-kx} - e^{k'x}\frac{1}{D-2+K'}\,e^{4x}.\,e^{-k'x}$$

$$\therefore K = 3\ y\ K' = 2$$

$$y = e^{3x} \int e^{4x}.\,e^{-3x}dx - e^{2x}\int e^{4x}.\,e^{-2x}dx = e^{4x}/2$$

Ejemplo 2. Método de la repetición.

$$(D^3 - D^2 - 8D + 12)\,y = x^2 + 5$$

$$(D-2)^2(D+3)\,y = x^2 + 5$$

la función complementaria valdrá, $(C_1 + C_2x)\ e^{2x} + C_3e^{-3x}$ y la integral particular,

$$(D-2)^2y = \frac{1}{D+3}\,(x^2+5) = e^{-3x}\int (x^2+5)\ e^{3x}\,dx$$

$$= \frac{9x^2 - 6x + 47}{27}$$

$$(D-2)\,y = \frac{1}{D-2}\,\left(\frac{9x^2 - 6x + 47}{27}\right)$$

$$= \left[\ e^{2x}/27\right]\int (9x^2 - 6x + 47)\ e^{-2x}\,dx$$

$$= \frac{-18x^2 - 6x - 97}{108}$$

$$y = -\left[e^{2x}/108\right]\int (18x^2 + 6x + 97)\, e^{-2x}\, dx$$

$$y = \frac{18x^2 + 24x + 109}{216}$$

Método de las fracciones parciales. Recordando que este método sólo sirve para la parte correspondiente a las raíces diferentes, se tiene;

$$(D - 2)\ (D - 2)\ (D + 3)\, y = x^2 + 5$$

Operando a ambos lados con $\dfrac{1}{(D-2)\ (D+3)}$ obtenemos:

$$(D - 2)\, y = \frac{1}{(D-2)\ (D+3)}\,(x^2 + 5)$$

$$= \left[\frac{R_1}{D-2} + \frac{R_2}{D+3}\right](x^2 + 5)$$

$$R_1 = -R_2 = 1/5$$

$$(D - 2)\, y = \frac{1}{5}\,\frac{1}{D-2}\,(x^2 + 5) - \frac{1}{5}\,\frac{1}{D+3}\,(x^2 + 5)$$

$$= [e^{2x}/5] \int (x^2 + 5)\, e^{-2x}\, dx - [e^{-3x}/5] \int (x^2 + 5)\, e^{3x}\, dx$$

$$= -\frac{2x^2 + 2x + 11}{20} - \frac{9x^2 - 6x + 47}{135}$$

$$= -\frac{18x^2 + 6x + 97}{108}$$

resultado que es igual a (1) obtenido por el otro método.

Finalmente,

$$y = -\frac{1}{D-2}\left(\frac{18x^2 + 6x + 97}{108}\right) = \frac{18x^2 + 24x + 109}{216}$$

EJERCICIOS

1. $(D^2 - 2D + 1)\, y = x$
2. $(D^3 - 2D + 2)\, y = 2\ sen\ x - 4\ cos\ x$
3. $(D^2 - 2D + 1)\, y = x\ e^{4x}$
4. $(D^3 - 2D^2 - D + 2)\, y = 1 - 2x$
5. $(D^4 - 1)\, y = e^x\ cos\ x$

6. $(D^2 + D - 2)y = e^x + e^{2x}$
7. $(D^2 - 4D + 5)y = e^{2x} + 4 \; sen \; x$
8. $(D^4 - 2D^2 + 1)y = 5 \; sen \; 2x$
9. $(D^2 + 2D - 3)y = x^2 + 2x - 7$
10. $(D^3 + 2D^2 - 3D)y = x^2 + 9$

28. Metodos especiales para hallar la Integral Particular.

En algunos casos la forma de la función hace posible la determinación de la integral particular por métodos no generales, como los ya estudiados, pero sí más simples. Damos a continuación algunos de los métodos que con más frecuencia ocurren.

Caso I. Cuando en la ecuación diferencial $\phi(D)y = f(x)$, $f(x)$ sea un polinomio entero de grado n.

Sea la ecuación,

$$(D^n + A_1 D^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + A_{n-1}D + A_n)y = f(x)$$

cuya solución simbólica es,

$$y = \frac{1}{D^n + A_1 D^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + A_{n-1}D + A_n} = f(x)$$

$$= 1/\phi(D)\, f(x) = [\phi(D)]^{-1} f(x)$$

Para hallar la integral particular, $[\phi(D)]^{-1}$ debe desarrollarse en potencias ascendentes de D, suspendiéndose el desarrollo en el término que contenga la enésima potencia de D, ya que, siendo $f(x)$ un polinomio en x, de grado n, al operar con D^{n+1} u otro operador cualquiera de orden mayor, sobre la función $f(x)$, se obtendría por resultado cero, ya que es evidente que,

$$D^n\,[f(x)] = n(n-1)\;(n-2)\;\ldots\ldots\ldots 3.2.1 = n\,! = k$$

y por lo tanto,

$$D^{n+1}\,[f(x)] = Dk = 0$$

Cuando la menor potencia de D en $\phi(D)$ sea D^k, es decir, cuando,

$$\phi(D) = D^n + A_1 D^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + A_{n-k}D^k$$

el desarrollo de $[\phi(D)]^{-1}$ deberá empezar con el término D^{-k} y suspenderse en el término D^{-k+n}.

Ejemplo 1.

$$(D^2 - 4D + 4)y = x^2$$

$$(D-2)^2 y = (2-D)^2 y = x^2$$

$$y = \frac{1}{(2-D)^2} x^2 = (2-D)^{-2}\, x^2$$

$$y = \left[\frac{1}{2^2} + (-2)\frac{1}{2^3}(-D) + (-2)(-3)\frac{1}{2^4}\frac{(-D)^2}{\underline{|2}} + \cdots\cdots \right] x^2$$

$$y = \frac{1}{4}\left[1 + D + \frac{3D^2}{4} \right] x^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}$$

valor que será la integral particular. Como la función complementaria vale $e^{2x}(C_1 + C_2x)$, la primitiva de la ecuación propuesta valdrá entonces,

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2x) + (2x^2 + 4x + 3)/8$$

Ejemplo 2.

$$(D^4 - a^4)y = x^3$$

$$y = \frac{1}{D^4 - a^4}x^3 = -\frac{1}{a^4 - D^4}x^3 = -(a^4 - D^4)^{-1}x^3$$

$$= -[1/a^4 + (-1)(1/a^8)(-D^4) + \ldots\ldots]\,x^3 = -x^3/a^4$$

ya que $(D^4/a^8)\,x^3 = 0$

Resolviendo $(D^4 - a^4)y = (D - a)(D + a)(D - ai)(D + ai)y = 0$ obtendremos como función complementaria,

$$y = C_1e^{ax} + C_2e^{-ax} + A\ cos\ ax + B\ sen\ ax$$

o,

$$y = C_1e^{ax} + C^2e^{-ax} + C\ cos\ (ax + \alpha)$$

resultado que combinado con la integral particular nos da como primitiva,

$$y = C_1e^{ax} + C_2e^{-ax} + C\ cos\ (ax + \alpha) - x^3/a^4$$

Ejemplo 3.

$$(D^4 - 2D^3 + D^2)y = x^3 + 5x + 3$$

en este caso $K = 2$, $n = 3$, $y.- K + n = 1$

$$y = \frac{1}{D^2(D-1)^2}(x^3 + 5x + 3) = \frac{1}{D^2(1-D)^2}(x^3 + 5x + 3)$$

$$= \frac{(1-D)^{-2}}{D^2}(x^3 + 5x + 3)$$

$$y = [1/D^2]\,(1 + 2D + 3D^2 + 4D^3 + 5D^4 + 6D^5 + \ldots\ldots)\,(x^3 + 5x + 3)$$

A las expresiones $(1 + 2D + 3D^2 + 4D^3 + \ldots.)$ y D^{-2} podemos considerarlas como operadores separados. Operando con el primero de ellos se obtiene.

$$(1 + 2D + 3D^2 + 4D^3 + \ldots .) \ (x^3 + 5x + 3)$$
$$= x^3 + 6x^2 + 23x + 37$$

y operando con D^{-2} sobre este último resultado se obtendrá como integral particular de la ecuación propuesta,

$$y = D^{-2}(x^3+6x^2+23x+37) = x^5/20 + x^4/2 + 23x^3/6 + 37x^2/2$$

Si se hubiera operado primero con D^{-2} sobre $x^3 + 5x + 3$ y luego con $(1 + 2D + \ldots . + 6D^5)$ sobre el resultado de la operación anterior, o si con D^{-2} se hubiera operado distributivamente sobre el segundo operador, el valor que en este caso se obtendría para la integral particular sería,

$$y = (D^{-2} + 2D^{-1} + 3 + 4D + 5D^2 + 6D^3) \ (x^3 + 5x + 3)$$
$$y = x^5/20 + x^4/2 + 23x^3/6 + 37x^2/2 + (51x + 65)$$

Los términos que aparecen sobrando al operar de la segunda manera son superfluos pues se reducirían con los términos semejantes de la ecuación complementaria, la cual según vimos anteriormente era,

$$y = e^x \ (C_1 + C_2x) + C_3 + C_4x$$

La solución completa, cualquiera que sea el método que sigamos, es pues,

$$y = x^5/20 + x^4/2 + 23x^3/6 + 37x^2/2 + C_4x + C_3 + e^x (C_1 + C_2x)$$

NOTAS:

A) Del ejemplo 2 puede concluirse que si $f(x)$ es una constante, la solución de

$$(D^n + A_1D^{n-1} + \ldots . + A_{n-1}D + A_n) y = C$$

es,
$$y = C/A_n$$

B) Del ejemplo 3 puede concluirse que no solamente puede prescindirse en $\phi(D)$ de los términos de orden mayor que D^n sino que en la expansión de $[\phi(D)]^{-1}$, pueden suprimirse todas las potencias de D de orden mayorque D^{n-k}, cualquiera que sea la magnitud de k.

Caso II. Si $f(x)$ es un polinomio entero de grado n, o sea de una de las formas, $f(x) = C \ k^x$ o $f(x) = C sen kx + C_1 cos \ kx$, puede emplearse el método que se expone a continuación, llamado *método de los coeficientes indeterminados.*

Sea como antes,

$$(D^n + A_1D^{n-1} + \ldots . + A_{n-1}D + A_n) y = f(x)$$

en la cual $f(x)$ es un polinomio en x de grado n, y sea $F(x)$ la solución que buscamos, la cual, como es obvio, debe de ser también un polinomio en x.

Operando con $\phi(D)$ sobre $F(x)$, deberemos tener la identidad,

$$D^nF(x) + A_1D^{n-1}F(x) + \ldots . + A_{n-1}F(x) + A_nF(x) = f(x) \quad (1)$$

Es evidente que $D^nF(x)$ es un polinomio en x de un grado menor en uno que $A_1D^{n-1}F(x)$ y de un grado menor en dos que $A^2D^{n-2}F(x)$, etc., raciocinio que nos lleva a concluir que el término de mayor grado en x, en el lado izquierdo de (1), lo da el término $A_nF(x)$ y por consiguiente, siendo A_n una cantidad constante, $F(x)$ será del mismo grado que $f(x)$.

Haciendo entonces,

$$F(x) = B_0x^n + B_1x^{n-1} + \ldots\ldots + B_{n-1}x + B_n$$

Efectuando las operaciones indicadas por el lado izquierdo de la ecuación (1) e igualando los coeficientes de las potencias iguales de x, en ambos lados de (1), se hallarán los valores de los coeficientes B_0, B_1, ... y B_n.

Para que pueda compararse este método con el anterior, resolveremos a continuación los mismos tres ejemplos que acabamos de resolver con relación al caso I.

Ejemplo 1.

$$(D^2 - 4D + 4)y = x^2$$
$$F(x) = Ax^2 + Bx + C$$
$$(D^2 - 4D + 4)\ (Ax^2 + Bx + C) = x^2$$
$$4Ax^2 + x(4B - 8A) + (2A - 4B + 4C) = 0$$
$$\therefore \quad A = 1/4,\ B = 1/2,\ C = 3/8$$
$$F(x) = x^2/4 + x/2 + 3/8$$

Ejemplo 2.

$$(D^4 - a^4)y = x^3$$
$$F(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$
$$(D^4 - a^4)\ (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = x^3$$
$$- a^4(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 0$$
$$\therefore \quad A = - x^3/a^4,\ B = C = D = 0$$
$$y = F(x) = - x^3/a^4$$

Ejemplo 3.

$$(D^4 - 2D^3 + D^2)y = x^3 + 5x + 3$$
$$y = F(x) = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$$

ya que el término de mayor grado en x en el lado izquierdo de la ecuación lo da el operador $D^2F(x)$.

$$(D^4 - 2D^3 + D^2)\ (Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F)$$
$$= 20Ax^3 + x^2(12B - 120A)$$
$$+x(6C-48B+120A) + (2D-12C+24B) = x^3+5x+3$$
$$\therefore \quad A=1/20,\ B=1/2,\ C=23/6,\ D=37/2,\ E=F=0$$
$$y = x^5/20 + x^2/2 + 23x^3/6 + 37x^2/2$$

El método es aplicable también en el caso en que $f(x)$ sea de la forma,

$$Ck^{x}$$

en la cual C y k son constantes, ya que todas las derivadas de la expresión anterior son múltiplos de ella. Finalmente, cuando

$$f(x) = C \; sen \; kx + C' \; cos \; kx \qquad (1)$$

se hace,

$$F(x) = A \; sen \; kx + B \; cos \; kx \qquad (2)$$

ya que las derivadas sucesivas de la ecuación (2) son todas ellas de la forma de la ecuación (1).

Ejemplo 4.

$$(D^3 + D^2)y = 3 \; e^{5x} \qquad (1)$$
$$y = F(x) = A \; e^{5x}$$
$$(D^3 + D^2) \; (A \; e^{5x}) = 150 \; Ae^{5x}$$
$$\therefore \quad A = 1/50, \; F(x) = e^{5x}/50$$

la primitiva de (1) será entonces,

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + e^{5x}/50$$

Ejemplo 5.

$$(D^3 - 1)y = sen \; 2x$$
$$F(x) = A \; sen \; 2x + B \; cos \; 2x$$
$$(D^3 - 1) \; (A \; sen \; 2x + B \; cos \; 2x)$$
$$= (8B - A) \; sen \; 2x - (8A + B) \; cos \; 2x$$
$$\therefore \quad A = -1/65, \; B = 8/65$$
$$F(x) = -1/65 \; sen \; 2x + 8/65 \; cos \; 2x$$

La primitiva de la ecuación propuesta será por lo tanto,

$$y = C_1e^{x} + e^{-x/2} \; (C_2sen \sqrt{3}x/2 + C_3cos \sqrt{3}x/2)$$
$$+ 8/65 \; cos \; 2x - 1/65 \; sen \; 2x$$

Ejemplo 6.

$$(D^2 + 4D + 3)y = e^{x} + 4 \; cos \; x + x^2 + 3x + 2$$
$$F(x) = A \; e^{x} + B \; cos \; x + C \; sen \; x + Dx^2 + Ex + F$$
$$\phi(D) \; F(x) = 8Ae^{x} + (2B + 4C) \; cos \; x + (2C - 4B) \; sen \; x$$
$$+ 3Dx^2 + (3E + 8D)x + (3F + 4E + 2D = x^2 + 3x + 2$$
$$\therefore \quad A = 1/8, \; B = 2/5, \; C = 4/5, \; D = 1/3, \; E = 1/9, \; F = 8/27$$
$$F(x) = e^{x}/8 + 2/5 \; cos \; x + 4/5 \; sen \; x + x^2/3 + x/9 + 8/27$$

la cual es la integral particular. La primitiva será

$$y = e^{x}/8 + 2/5 \; cos \; x + 4/5 \; sen \; x + x^2/3 + x/9 + 8/27 + C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$$

Caso III. Cuando en la función $\phi(D) = f(x)$, $f(x)$ es una función exponencial o contiene un factor exponencial.

Cualquiera que sea el caso podemos suponer que $f(x) = Xe^{ax}$ en la cual X es o una constante o una función no exponencial de x.

Aplicando por lo tanto el segundo teorema general, se tiene:

$$y = \frac{1}{\phi(D)} f(x) = \frac{1}{\phi(D)} e^{ax} X = e^{ax} \frac{1}{\phi(D + a)} X$$

expresión a la cual, sea X una constante o una función de x, puede aplicarse el método desarrollado en el caso I. La cantidad (a) puede ser o no una de las raíces del polinomio $\phi(D) = 0$, considerando a D como una variable. Supongamos que (a) sea una raíz que ocurra r veces, de manera que para una raíz no repetida $r = 1$, para una raíz doble $r = 2$, etc., y cuando (a) no sea una raíz de la ecuación $r = 0$.

Desarrollando en serie a $\phi(D + a)$ tendremos:

$$\phi(D + a) = \frac{D^r}{\underline{|r}} f^r(a) + \frac{D^{r+1}}{\underline{|r+1}} f^{r+1}(a) + \ldots\ldots.$$

en la cual $f^r(a)$ significa el r^o coeficiente diferencial de $\phi(D)$ con respecto a D, cuando se substituye a D con a. El integral particular, atendiendo a las notas del caso I, para cuando $X = C$, será entonces;

$$y = e^{ax} \frac{1}{\dfrac{f^r(a) D^r}{\underline{|r}}} C = \frac{e^{ax} \underline{|r}}{f^r(a)} \cdot \frac{1}{D^r} C = \frac{e^{xa} \underline{|r} C x^r}{f^r(a) \underline{|r}} = \frac{e^{ax} x^r}{f^r(a)}$$

cuando $r = 0$ $$y = \frac{C e^{ax}}{f(a)}$$

Ejemplo 1.

$$(D^2 + D + 1) y = e^{2x} \tag{1}$$

2 no es raíz de la ecuación $\phi(D) = 0$ y por consiguiente el integral particular de (1) será,

$$y = e^{2x}/\phi(D) = e^{2x}/7$$

resolviendo la ecuación $\phi(D) = 0$, obtenemos $D = (-1 + i\sqrt{3})/2$ con lo cual obtenemos para la función complementaria,

$y = e^{-x/2} (A \cos \sqrt{3}x/2 + B \operatorname{sen} \sqrt{3}x/2) = e^{-x/2} C \operatorname{sen} (\sqrt{3}x/2 + \alpha)$

combinando los dos resultados tendremos como primitiva de (1)

$$y = e^{2x}/7 + C e^{-x/2} \operatorname{sen} (\sqrt{3}x/2 + \alpha)$$

Ejemplo 2.

$$(D^2 - 4D + 3) y = 2 e^{3x}$$

$$y = \frac{1}{D^2 - 4D + 3} 2 e^{3x} = \frac{1}{(D-1)(D-3)} 2 e^{3x}$$

en este caso 3 es una raíz de $\phi(D) = 0$

$$y = e^{3x}\frac{1}{(D-1+3)\ (D-3+3)}2 = e^{3x}\frac{1}{D(D+2)}2$$

$$= e^{3x}\frac{(D+2)^{-1}}{D}2 = e^{3x}\left[\frac{1}{2D} + (-1)\left(\frac{1}{2}\right)^2 D + \ldots\right]2$$

$$y = x\ e^{3x}$$

la primitiva será por lo tanto,

$$y = C_1e^x + C_2e^{3x} + x\ e^{3x}$$

Ejemplo 3.

$$(D^2 - 2D + 1)y = x^2.\ e^{3x}$$

$$y = \frac{1}{(D-1)^2}x^2.\ e^{3x} = e^{3x}\frac{1}{(D+2)^2}x^2 = e^{3x}(2+D)^{-2}.x^2$$

$$y = e^{3x}(1/4 - D/4 + 3D^2/16\ \ldots.)\ x^2$$

$$y = \frac{e^{3x}(2x^2 - 4x + 3)}{8}$$

Ejemplo 4.

$$(D-2)^3\,y = e^{2x}(x^2+1)$$

$$y = \frac{1}{(D-2)^2}e^{2x}(x^2+1) = e^{2x}\frac{1}{(D-2+2)^3}(x^2+1)$$

$$= e^{2x}\frac{1}{D^3}(x^2+1) = e^{2x}\int\!\!\int\!\!\int(x^2+1)\ (dx)^3$$

$\therefore\quad y = e^{x2}(x^5/60 + x^3/6)$ es el integral particular en tanto que la primitiva será,

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2x + C_3x^2) + e^{2x}(x^5/60 + x^3/6)$$

EJERCICIOS

1. - Aplíquense estos métodos especiales a la solución de los ejercicios correspondientes al párrafo 27.

PROBLEMAS

1. - Un condensador de $C = 4$ microfaradios está cargado de manera que la diferencia de potencial entre sus placas sea de $V = 100$

voltios. El condensador se descarga a través de una bobina de $R = 500$ ohmios de resistencia y de $L = 0.5$ henrios de inductancia, Hállese el potencial entre las placas del condensador en un instante cualquiera t. Demuéstrese que la ecuación diferencial es para este caso,

$$L\frac{d^2v}{dt^2} + R\frac{dv}{dt} + \frac{V}{C} = 0$$

2. - Se tiene en serie una fuerza electromotriz E, una resistencia R, una bobina de inductancia L y un condensador de capacidad C. Hállese la carga en el condensador en el instante t comprobando previamente que la ecuación diferencial es en este caso,

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{Q}{c} = E$$

3. - Se imprime una fuerza electromotriz $E_0 sen\ wt$ en un circuito igual al anterior. Hállese la diferencia de potencial entre las placas en el instante t.

4. - La ecuación diferencial de la curva elástica de una columna de gran longitud cuando está sometida a una carga axial P es;

$$\frac{d^2y/dx^2}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}} = \frac{M}{EI}$$

en la cual $M = - Py$. Tómense como ejes de coordenadas la horizontal por la base de la columna como eje de las Y, y la vertical por el mismo punto como eje de las X. Hállese la ecuación de la curva elástica.

5. - La ecuación diferencial para la deflexión de un eje en rotación es,

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = k\ w^2y$$

ecuación en la cual k es la masa por unidad de longitud del eje, w la velocidad angular y x la distancia a uno de los apoyos del punto en donde la deflexión es y. Hállese la deflexión en el centro del eje si la longitud de éste es L.

6. - La ecuación,

$$d^2y/dt^2 = - w^2y$$

nos define el movimiento armónico simple. Hállese la solución general de la ecuación y determínense las constantes de integración para el caso en que $w = 10$ radianes por segundo y si además en el instante $t = 0$, $y = 10$ y $dy/dt = 50$.

13. - *Ecuaciones que contienen solamente a la variable independiente y a la derivada de enésimo orden* 50

$$d^ny/dx^n = F(x)$$

Solución.

$$y = C_n + C_{n-1} + C_{n-2}\ x^2/\underline{|2} + \ldots + C_1\ x^n/\underline{|n} + \int\int\int \ldots\ldots \int F(x)\ (dx)^n$$

14. - *Ecuaciones carentes de ambas variables* 51

$$d^2y/dx^2 = F(dy/dx)$$

Solución. Eliminando a p entre las ecuaciones,

$$x = C_1 + \int dp/F(p)$$
$$y = C_2 + \int p\ dp/F(p)$$

PAG.

15. - *Ecuaciones con derivadas de primer y segundo orden pero carentes de una de las variables* 54

Primer caso. $d^2y/dx^2 = F(x,\ dy/dx)$

Segundo caso. $d^2y/dx^2 = F(y,\ dy/dx)$

Solución. Se hace $dy/dx = p$ y al derivar con respecto a x se obtiene una ecuación de primer orden.

ECUACION LINEAL DE ORDEN N CON COEFICIENTES CONSTANTES

16. - *Ecuación Lineal incompleta.* (Lado derecho de la ecuación igual a cero) 68

Caso 1. La ecuación auxiliar $\phi(a) = 0$ tiene n raíces diferentes. $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$

Solución.

$$y = C_1e^{a_1x} + C_2e^{a_2x} + \ldots\ldots + C_ne^{a_nx}$$

17. - *Caso* 2. *La ecuación auxiliar tiene m raíces repetidas* .. 69

Sean $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_m \neq a_{m+1} \neq \ldots \neq a_n$

Solución.

$$y = (C_1 + C_2x + \ldots + C_mx^{m-1})\ e^{a_1x} + C_{m+1}\ e^{a_{m+1}x} + \ldots + C_{n-1}e^{a_{n-1}x} + C_ne^{a_nx}$$

PAG.

18. - *Caso* 3. *La ecuación auxiliar tiene dos o más raíces imaginarias* 72

Sean las dos raíces $(a + bi)$ y $(a - bi)$

Solución.

$$y = e^{ax}(C_1\cos bx + C_2\operatorname{sen} bx) + C_3e^{a_3x} + \ldots\ldots + C_ne^{a_nx}$$

Si además $(a + bi)$ y $(a - bi)$ son raíces dobles.

Solución.

$$y = e^{ax}[(C + C_1x) \cos bx + (C_2 + C_3x) \text{ sen } bx] + C_5e^{a_5x} + \ldots\ldots + C_ne^{a_nx}$$

19.- *Ecuación Lineal completa.* (El lado derecho es o una constante o una función de x) 75

Solución. La solución consta de dos partes; la primera llamada *la función complementaria* es la solución de la ecuación incompleta.

Llamando f(x) el lado derecho de la ecuación, la segunda parte de la solución llamada el *integral particular* está dado por,

$$y = e^{a_1x} \int e^{(a_2-a_1)x} \int \ldots \int e^{(a_n-a_{n-1})x} \int f(x)\, e^{-a_nx}\, dx$$

Solución B. Cuando las n raíces de la ecuación auxiliar son diferentes, el integral particular viene dado también por,

$$y = R_1e^{a_1x} \int f(x)\, e^{-a_1x}dx + R_2e^{a_2x} \int f(x)\, e^{-a_2x}dx + \ldots\ldots \ldots\ldots + R_ne^{a_nx} \int F(x)\, e^{-a_nx}dx$$

en la cual $R_1, R_2, \ldots\ldots, R_n$ son los coeficientes de las fracciones parciales de la fracción

$$1/\phi(a)$$