

## ALGUNAS APLICACIONES DEL CALCULO DE MATRICES EN EL ANALISIS DE ESTRUCTURAS

Dr. Alfonso Ramírez Rivera  
Ingeniero Civil

### Introducción

En el análisis de estructuras indeterminadas por el método de la energía elástica, se sigue básicamente el siguiente orden de operaciones:

a) Una vez definido el grado de indeterminación, se escogen convenientemente las fuerzas o momentos que se van a considerar como redundancias, en número igual al grado de indeterminación.

b) Por medio de las ecuaciones de equilibrio estático, se expresan las demás fuerzas y momentos en la estructura en función de las redundancias y de las cargas externas. En este punto, la energía elástica se puede conocer en función de dichas fuerzas y momentos y de las constantes físicas y geométricas de los miembros.

c) Además de las condiciones de equilibrio, también es necesario satisfacer las de continuidad geométrica o sea la compatibilidad de las deformaciones. Las deformaciones se calculan haciendo uso de los teoremas de Castigliano y de Maxwell (Reciprocidad), y la expresión de las condiciones de compatibilidad toma la forma de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales cuya solución es el valor de las redundancias.

Conociendo las características de los miembros de la estructura y el valor de las fuerzas y momentos en cualquier sección, es posible especificar el estado de esfuerzos y deformaciones, que es la finalidad inmediata del problema.

El empleo de métodos exactos en la solución de muchos problemas de ingeniería ha estado limitado por el número de ecuaciones que es posible resolver en la práctica.

Los métodos de aproximaciones sucesivas usados en la solución del sistema de ecuaciones, o directamente en la del problema, están limitados por el número de magnitudes a las cuales hay que aplicar pequeñas variaciones hasta obtener una aproximación razonable, y además por la velocidad de convergencia de tales procesos.

El uso cada vez más extenso de computadores electrónicos ha permitido el estudio de problemas cuya solución estaba antes fuera de toda consideración por la cantidad de trabajo requerido. Hoy en día, por ejemplo, el análisis exacto de una estructura con 100 redundancias, una vez construídas las ecuaciones y programadas para la máquina, tomaría sólo unas pocas horas y con el advenimiento de máquinas más rápidas el tiempo necesario se reducirá mucho más.

Por lo anterior se ve la gran importancia que han tomado los métodos exactos, pues en el futuro la limitación será la cantidad de labor para la formulación de las ecuaciones y su traducción al lenguaje de la máquina, y no la solución de ellas.

En lo que sigue se considerará en algún detalle el proceso de formación del sistema de ecuaciones en el análisis de estructuras indeterminadas y el empleo de matrices en casos en los cuales hay necesidad de estudiar el efecto de diferentes sistemas de carga sobre una misma estructura.

Se supone que el lector tiene conocimiento de los elementos del cálculo de matrices, para lo cual se hace referencia al artículo del Dr. de Greiff, "Teoría de Matrices, Exposición Elemental", "DYNA", N° 73, Nov. 1957.

### Energía Elástica

En el estudio de estructuras es necesario hacer ciertas idealizaciones con respecto a su forma geométrica para hacer practicable su análisis. Las estructuras que permiten tales idealizaciones forman dos grandes grupos:

- a) Estructuras de superficie, como placas y conchas;
- b) Estructuras reticuladas, planas y espaciales, que se pueden representar por líneas y puntos.

En estas notas se consideran únicamente estructuras retículas, pero es de notar que el empleo de matrices es también muy importante en el estudio de las del primer grupo, baste mencionar el método de distribuciones sucesivas en el análisis de bóvedas cilíndricas.

En una sección típica de un miembro de una estructura reticulada se consideran en general dos clases de acciones (o reacciones), una fuerza y un momento; en un sistema de coordenadas cartesianas se tienen por consiguiente tres fuerzas y tres momentos, (Fig. 1)

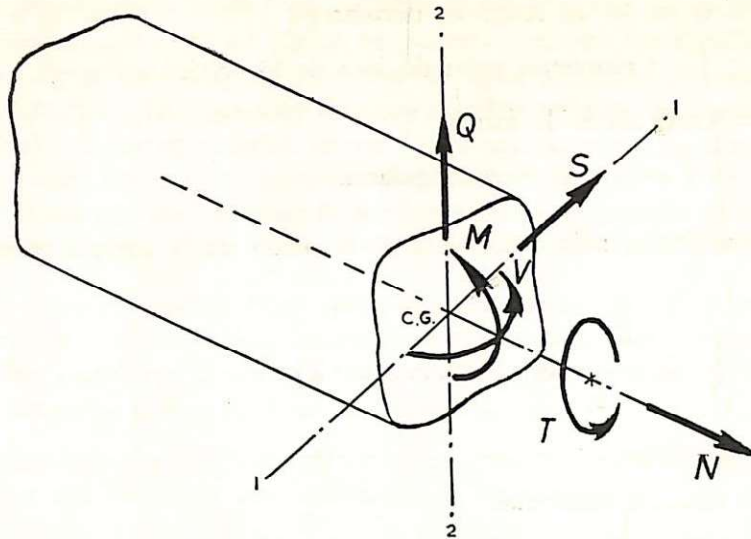


Figura 1

- N = Fuerza axial
- S, Q = Fuerzas de cizalladura
- T = Momento torsional
- M, V = Momentos flectores

La energía elástica U en su forma más general está expresada por la siguiente ecuación:

$$U = \int \left( \frac{N^2}{2EA} + \frac{M^2}{2EI'} + \frac{V^2}{2EI''} + \frac{T^2}{2GC} + k' \frac{S^2}{2GA} + k'' \frac{Q^2}{2GA} \right) ds \dots (1)$$

El integral comprende todos los miembros de la estructura.

E = módulo de Young.

A = área de la sección.

I', I'' = segundos momentos de área con respecto a los ejes centroidales 1-1 y 2-2.

G = módulo de torsión       $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$

$\mu$  = relación de Poisson.

C = constante de torsión       $C = \psi J$

$\psi$  = factor de Saint-Venant

$\psi = 1$  en secciones circulares

$J =$  momento polar de área de la sección.

$k', k'' =$  coeficientes de forma.

$k' = k'' = \frac{1}{6}$  en secciones rectangulares.

En una forma más condensada, la ecuación de la energía puede escribirse:

$$U = \int k \frac{D^2}{2B} ds \quad \dots \dots (2)$$

$k =$  constante

$D =$  esfuerzo resultante.

$B =$  rigidez de la sección.

Afortunadamente, en problemas ordinarios no hay necesidad de considerar todos los términos de la ecuación (1). En efecto, la influencia de la energía de cizalladura sólo vale la pena tenerse en cuenta en problemas muy especiales, tales como vigas de profundidad (vigas con la dimensión paralela a las cargas, muy grande en comparación con la otra dimensión de la sección). Además, en muchos casos la influencia de la torsión es también muy pequeña (por ejemplo en vigas de acero en I); la cuestión sin embargo debe estudiarse en cada caso particular, pues a veces es posible obtener diseños más económicos si se tiene en cuenta tal influencia.

Las formas de energía elástica más importantes en la práctica son pues las de fuerza axial y de momento flector. Por otra parte, en general tales formas ocurren separadamente, esto es, con un marcado predominio de una de ellas sobre la otra; así, en pórticos ordinarios sólo es importante la energía de flexión, y en estructuras conectadas con pines, la de fuerza axial.

### Establecimiento de las ecuaciones

Introduciendo grados de libertad en la dirección de las redundancias y considerando éstas como fuerzas exteriores, resulta una estructura estáticamente determinada que se llama "estructura primaria".

Es claro que para un problema dado hay varias posibles estructuras primarias según las diferentes maneras de escogencia de las redundancias, y sería posible desarrollar métodos que permitan conocer la mejor de tales estructuras, o sea la que conduce a la solución más simple. Esto es importante, pues una mala escogencia de las redundancias pueda dar resultado a un sistema de ecuaciones de difícil solución, (sistemas mal condicionados).

Siempre es posible hallar una distribución de esfuerzos en la estructura primaria en equilibrio con las cargas exteriores y con una combinación cualquiera de valores finitos de las redundancias, pues el problema es estáticamente determinado. En cada uno de tales posibles sistemas en equilibrio se puede calcular el correspondiente grupo de deformaciones en la dirección de las redundancias, esto es, las deformaciones correspondientes a los grados de libertad introducidos para obtener la estructura primaria a partir de la estructura real.

En el caso de soportes sobre bases fijas, las condiciones de continuidad exigen deformaciones nulas en la dirección de las redundancias. Cuando se tienen bases móviles, es conveniente considerar redundancias en la dirección de tales movimientos, que serían conocidos.

El valor correcto de las incógnitas es el correspondiente al grupo de deformaciones que satisfacen las condiciones de continuidad, esto es, deformaciones nulas en la dirección de todas las redundancias menos las que se refieren a movimientos de las bases en cuyos casos las deformaciones son iguales a la cedencia de dichas bases o apoyos.

Según Castigliano, la deformación en la dirección de la redundancia  $p_i$  está dada por la ecuación:

$$d_i = \frac{\partial U}{\partial p_i} \dots\dots (3)$$

El sistema de ecuaciones es por consiguiente:

$$d_i = \Delta_i \dots\dots (4)$$

$\Delta_i$  es 0 ó el valor de la cedencia del apoyo correspondiente a la dirección  $p_i$ .

Por otra parte se tiene:

$$d_i = d_{i1}p_1 + d_{i2}p_2 + \dots + d_{ij}p_j + \dots + d_{in}p_n + d_{iP} \dots (5)$$

que expresa simplemente el hecho de que a la deformación  $d_i$  contribuyen en general todas las  $n$  redundancias  $p_j$  y además las cargas externas  $P$ .

$d_{ij}$  es por lo tanto la deformación en la dirección de  $p_i$  debida a la acción de  $p_j = 1$ , y

$d_{iP}$  es la deformación en la dirección de  $p_i$  producida por las cargas exteriores  $P$ .

Combinando las ecuaciones (2) y (3) resulta:

$$d_i = \frac{\partial}{\partial p_i} \int k \frac{D^2}{2 B} ds = \int \frac{k}{B} D \frac{\partial D}{\partial p_i} ds \dots\dots (6)$$

Los esfuerzos resultantes finales en una sección de cualquier miembro de la estructura, indicados por el símbolo  $D$  en la ecuación (2), son en general funciones de las redundancias  $p_i$  y de las cargas externas  $P$ , esto es, son expresiones de la forma:

$$D = D_1 p_1 + D_2 p_2 + \dots + D_i p_i + \dots + D_n p_n + DP \quad \dots (7)$$

$D_i$  es el valor de  $D$  debido solamente a la acción de  $p_i = 1$ , esto es, considerando nulas las demás redundancias y las cargas externas ( $P = 0$ ;  $p_j = 0, i \neq j$ ). Por ejemplo, si  $p_i$  es una fuerza y se está considerando el momento flector  $M$ , entones  $D_i = M_i$ , momento flector en cualquier sección producido por la fuerza  $p_i = 1$  considerada como una acción exterior en la estructura primaria.

$DP$  es el valor de  $D$  producido por la acción separada de las cargas externas  $P$  sobre la estructura primaria.

La distribución tanto de  $D_i$  como de  $DP$  se representa por los correspondientes diagramas de momento o de fuerza, definiendo previamente una conveniente convención de signos.

$$\frac{\partial D}{\partial p_i} = D_1 \frac{\partial p_1}{\partial p_i} + D_2 \frac{\partial p_2}{\partial p_i} + \dots + D_i + \dots + D_n \frac{\partial p_n}{\partial p_i} \quad \dots (8)$$

Como las redundancias son independientes entre sí,

$$\frac{\partial p_j}{\partial p_i} = 0 \quad (i \neq j) \quad \dots (9)$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial D}{\partial p_i} = D_i \quad \dots (10)$$

La ecuación (6) toma entonces la forma:

$$d_i = \int_B^k (D_1 p_1 + D_2 p_2 + \dots + D_i p_i + \dots + D_n p_n + DP) D_i \cdot ds \quad \dots (11)$$

Si la estructura está compuesta de  $m$  miembros prismáticos homogéneos de longitudes  $L_r$ ,  $\frac{k}{B}$  es constante para cada uno de ellos y se designará por  $K_r$ .

En tal caso la ecuación (11) puede escribirse,

$$\begin{aligned}
 d_i &= \sum_{r=1}^m \int_0^{L_r} K_r (D_1 p_1 + D_2 p_2 + \dots + D_j p_j + \dots + D_n p_n + D_p) D_1 \cdot ds \\
 &= p_1 \sum_1^m K_r \int_0^{L_r} D_1 D_1 ds + \dots + p_j \sum_1^m K_r \int_0^{L_r} d_i D_j ds + \dots \\
 &\dots + p_n \sum_1^m K_r \int_0^{L_r} D_1 D_n ds + \sum_1^m K_r \int_0^{L_r} D_1 D_p ds \dots \dots (12)
 \end{aligned}$$

Igualando coeficientes entre las ecuaciones (5) y (12), se concluye:

$$d_{ij} = \sum_1^m K_r \int_0^{L_r} D_i D_j ds \dots \dots (13)$$

$$d_{iP} = \sum_1^m K_r \int_0^{L_r} D_i D_P ds \dots \dots (14)$$

En la práctica se preparan tablas con los valores más comunes de los integrales, por ejemplo como se muestra en otra parte de éste artículo.

En la evaluación de los integrales son muy útiles las fórmulas que se indican a continuación:

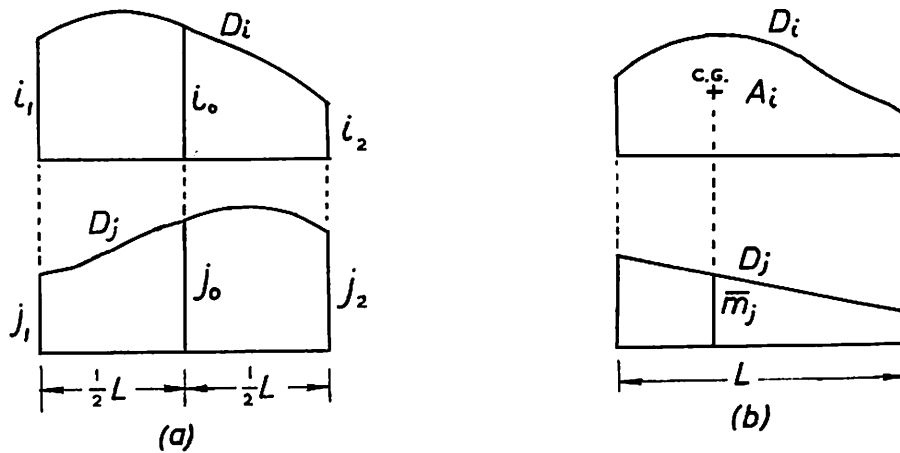


Figura 2





$$Fp + u = \Delta \dots\dots\dots (17)$$

La matriz  $F$ , formada por los elementos  $d_{ij}$ , es simétrica ( $d_{ij} = d_{ji}$ , por el teorema de la reciprocidad) y depende de la manera de escoger las redundancias pero no de las cargas externas. Los elementos  $d_{ij}$  son llamados coeficientes de influencia y la matriz  $F$  es la matriz de flexibilidad.

$p$ ,  $u$ ,  $\Delta$  son los vectores de elementos  $P_i$ ,  $d_iP$ , y  $\Delta_i$  respectivamente.

La solución de ecuación matricial (17) es:

$$\begin{aligned} p &= F^{-1} (\Delta - u) \\ &= R (\Delta - u) \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$R$ , la matriz inversa de  $F$ , es también simétrica y se le conoce como matriz de rigidez.

El proceso de inversión de una matriz simétrica  $n \times n$ , es ciertamente más laborioso que la solución de uno de los correspondientes sistemas de  $n$  ecuaciones simultáneas; es claro por lo tanto que cuando sólo es necesario estudiar el efecto de un sistema de carga lo más indicado es la solución directa de las ecuaciones. Sin embargo, cuando se quiere conocer el efecto de varios casos de carga en la misma estructura, es en general más ventajoso evaluar la matriz  $R$ , pues las soluciones se reducen a multiplicaciones de  $R$  por los vectores  $(\Delta - u)$  correspondientes a los distintos casos de carga, lo cual es una operación sencilla; además, la posibilidad de equivocaciones es mucho menor y más ordenada la presentación del problema.

Es de advertir sin embargo que la cantidad de trabajo para la inversión de una matriz, aún si ésta es simétrica, crece rápidamente con el tamaño y si sólo se dispone de calculadoras de escritorio, la inversión de una matriz de quinto o sexto orden sería impracticable. Puede decirse que, aproximadamente, el número de operaciones envuelto en la solución de  $n$  ecuaciones simultáneas aumenta como  $n^2$ , en tanto que en la inversión de una matriz  $n \times n$ , tal número de operaciones aumenta como  $n^3$ .

#### Inversión de una matriz simétrica

Fundamentalmente cualquier solución de una estructura para un caso particular de carga podría servir de base para la obtención de la matriz de rigidez. El procedimiento que se indica a continuación, desarrollado originalmente por Choleski y luego mejorado por Fox, tiene la ventaja de permitir el control de las operaciones numéricas paso a paso.

Teoría: Se denomina matriz triangular una en la cual todos los elementos de un lado de la diagonal principal son nulos; hay por lo tanto dos tipos de matrices triangulares, inferior y superior, según sea superior o inferior la posición de los elementos nulos.

Se puede demostrar que si  $A$  es una matriz simétrica con cofactores principales no singulares, se puede factorizar como el producto de una matriz triangular inferior  $L$  por su transpuesta  $L'$ , que es una matriz triangular superior, esto es:

$$A = LL' \quad \dots\dots (19)$$

El elemento  $a_{ij}$  de  $A$ , en la intersección de la fila  $i$  con la columna  $j$ , se obtiene como el producto escalar de la fila  $i$  de  $L$  por la columna  $j$  de  $L'$ ; pero la fila  $i$  de  $L$  es igual a la columna  $i$  de  $L'$  (definición de matriz transpuesta), y por lo tanto el elemento  $a_{ij}$  puede también expresarse como el producto de las columnas  $i$  y  $j$  de  $L'$ .

$$A = L'L' \quad (\text{Columna} \times \text{Columna}) \quad \dots\dots (20)$$

Premultiplicando la ecuación (19) por  $L^{-1}$  y postmultiplicándola por  $A^{-1}$ , resulta:

$$L^{-1} A A^{-1} = L^{-1} L L' A^{-1}$$

Teniendo en cuenta que  $AA^{-1} = LL^{-1} = I$ , matriz identidad, lo anterior se reduce a

$$L^{-1} = L'A^{-1} \quad \dots\dots (21)$$

$L^{-1}$ , la matriz inversa de  $L$ , es también una matriz triangular inferior, y los elementos de su diagonal principal son los inversos de los correspondientes elementos diagonales de  $L$ .

Mediante la ecuación (20) se puede construir la matriz  $L'$  a partir de los elementos de  $A$ ; luego se forma  $A^{-1}$  según la ecuación (21) para lo cual sólo es necesario utilizar los elementos de la diagonal de  $L^{-1}$  que, como se dijo, son simplemente los inversos de los correspondientes de  $L$  (ó de  $L'$ ).

Para facilitar los cálculos, la ecuación (21) se transforma a una multiplicación fila por fila, usando la transpuesta de  $A^{-1}$ , así:

$$L^{-1} = L' (A^{-1})' \quad (\text{Fila} \times \text{Fila})$$

Pero,  $A^{-1} = (A^{-1})'$ , propiedad de las matrices simétricas, y por lo tanto la ecuación (21) se pueden considerar directamente:

$$L^{-1} = L'A^{-1} \quad (\text{Fila} \times \text{Fila}) \quad \dots\dots (22)$$

A continuación se indica la distribución del trabajo para el caso de una matriz  $3 \times 3$ , pero claramente la misma distribución se puede utilizar para la inversión de matrices de mayor tamaño. Los números entre paréntesis indican el orden de las operaciones.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} S_1 \\ (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

$$L' = \begin{bmatrix} (4) & (5) & (6) \\ 0 & (8) & (9) \\ 0 & 0 & (11) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} S_2 \\ (7) \\ (10) \\ (12) \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{(Col. x Col)} \end{array}$$

$$1/1_{rr} \quad \begin{array}{l} (13) \\ (14) \\ (15) \end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} (21) & (20) & (18) \\ (20) & (19) & (17) \\ (18) & (17) & (16) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \text{(Fila x Fila)} \\ \end{array}$$

Las columnas  $S_1$  y  $S_2$ , correspondientes a las operaciones 1, 2, 3 y 7, 10, 12, son respectivamente las sumas de las filas de  $A$  y de  $L'$ . La operación (1) es por lo tanto la suma  $a + b + c$  de la primera fila de  $A$ , etc.

En la construcción de  $L'$ , operaciones 4, 5, 6, 8, 9, 11, se hace uso de la ecuación (20). Así, la primera columna de  $L'$  por sí misma es igual al primer elemento de  $A$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} (4) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} (4) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = a \quad (4) = \sqrt{a}$$

Similarmente,

$$\left\{ \begin{array}{l} (4) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} (5) \\ (8) \\ 0 \end{array} \right\} = b \quad \begin{array}{l} (4) \times (5) = b \\ \sqrt{a} \times (5) = b \\ (5) = b/\sqrt{a}, \text{ etc.} \end{array}$$

A medida que se completan las columnas de  $L'$ , se comprueban multiplicándolas por la columna  $S_2$ ; cada uno de estos productos debe ser igual al elemento del mismo orden de la columna  $S_1$ . Ejemplo, segunda columna de  $L'$  por columna  $S_2$  igual al segundo elemento de  $S_1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} (5) \\ (8) \\ 0 \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} (7) \\ (10) \\ (12) \end{array} \right\} = (2)$$

A continuación, en los espacios 13, 14, 15, se escriben los inversos de los elementos de la diagonal principal de  $L'$ ,  $1/1_{rr}$ ; esto es, (13) =  $1/(4)$ , etc.

Finalmente se construye  $A^{-1}$  por medio de la ecuación (22), en la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & (11) \\ (18) & (17) & (16) \end{array} = (15) \quad \begin{array}{ccc} 0 & 0 & (11) \\ (20) & (19) & (17) \end{array} = 0$$

Tercera fila de  $L'$  por tercera fila de  $A^{-1}$  = elemento 3-3 de  $L^{-1}$ , esto es, elemento en la posición (15); similarmente para productos de filas del mismo orden.

Tercera fila de  $L'$  por segunda fila de  $A^{-1}$  = elemento 3-2 de  $L^{-1}$ , que es cero por ser  $L^{-1}$  una matriz triangular inferior; similarmente para productos de filas de distinto orden.

A medida que se construyen las columnas de  $A^{-1}$ , se comprueban multiplicándolas por la columna  $S_1$ , que por facilidad se copia de nuevo al frente de  $A^{-1}$ ; los resultados de tales productos deben ser iguales a la unidad, así:

$$\begin{Bmatrix} (18) \\ (17) \\ (16) \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{Bmatrix} = 1 \quad \text{etc.}$$

La prueba final es la verificación del producto  $AA^{-1} = I$ , matriz identidad.

Con el siguiente ejemplo numérico quedarán claras las ideas anteriores.

Problema.—Hallar la distribución del momento flector en un pórtico de bases fijas y miembros de rigidez constante  $EI$ , bajo la acción de los dos tipos de carga mostrados en la figura 3.

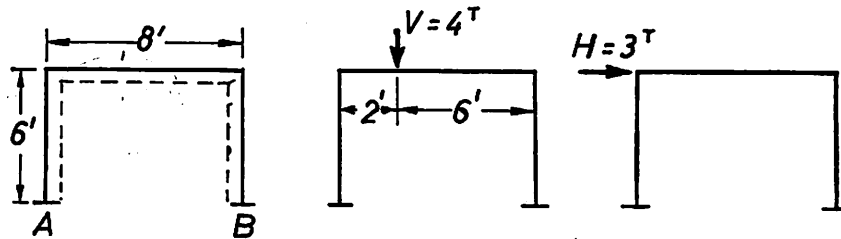


Figura 3

El problema es indeterminado de tercer grado; las redundancias escogidas son las reacciones en el apoyo B (Fig. 4).

- $p_1$  = momento flector
- $p_2$  = fuerza horizontal
- $p_3$  = fuerza vertical

Se seguirá la siguiente convención de signos: momentos flectores positivos producen tracción en el lado interior del pórtico, esto es, en el lado de las líneas punteadas en la figura 3.

En primer lugar se dibujan los diagramas de momento flector en la estructura primaria para las cargas  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 1$ ,  $p_3 = 1$ ;  $H = 3t$ ,  $V = 4t$ . (Figura 4).

*Momentos flectores*

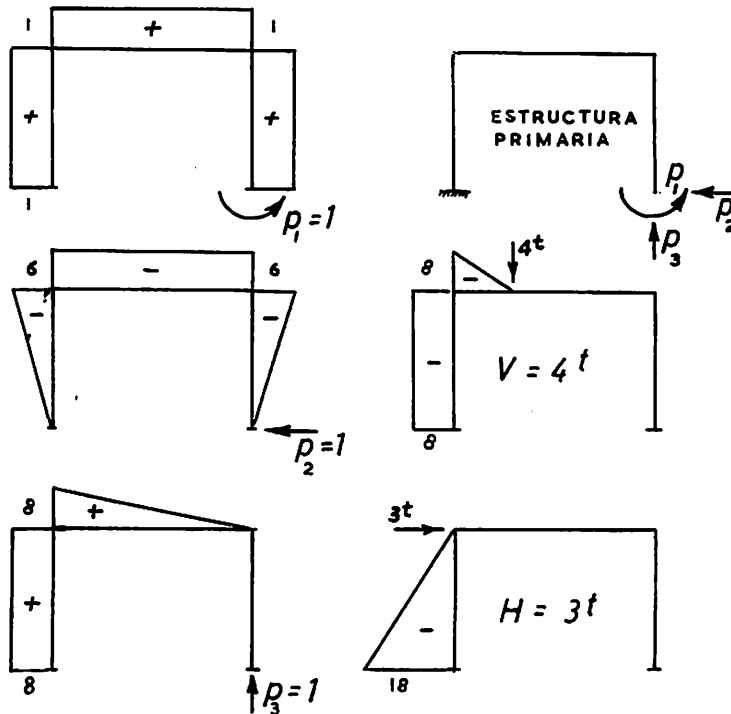


Figura 4

Una vez construídos los diagramas de momento flector, se calculan los coeficientes  $d_{ij}$  y  $d_{iP}$  utilizando la tabla o las fórmulas (15) y (16).

Por ejemplo, el coeficiente  $d_{11}$  se obtiene multiplicando el diagrama de  $p_1 = 1$  por sí mismo, para lo cual se aplica la fórmula 1 de la tabla:

$$d_{11} = \frac{1}{EI} \left[ 2 \times 6 \times 1 \times 1 + 8 \times 1 \times 1 \right] = \frac{1}{EI} \times 20$$

$d_{12} = d_{21}$  se obtiene multiplicando los diagramas de  $p_1 = 1$  y  $p_2 = 1$ ; para esto se usan las fórmulas 1 y 2 de la tabla:

$$d_{12} = \frac{1}{EI} \left[ -2 \times 6 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 6 - 8 \times 1 \times 6 \right] = \frac{1}{EI} (-84)$$

En esta forma se calculan todos los demás elementos de la matriz  $F$  y además los vectores  $u$  para las cargas externas  $H$  y  $V$ .

Así se han obtenido:

$$F = \begin{bmatrix} 20 & -84 & 80 \\ -84 & 432 & -336 \\ 80 & -336 & 558.6 \end{bmatrix}$$

$$U_V = \begin{bmatrix} -56 \\ 192 \\ -442.6 \end{bmatrix} \quad U_H = \begin{bmatrix} -54 \\ 108 \\ -432 \end{bmatrix}$$

A continuación se copian los detalles de la inversión de F siguiendo el procedimiento indicado:

$$F = \begin{bmatrix} 20 & -84 & 80 \\ -84 & 432 & -336 \\ 80 & -336 & 554.6 \end{bmatrix} \begin{matrix} S_1 \\ 16 \\ 12 \\ 298.6 \end{matrix}$$

$$L' = \begin{bmatrix} 4.47214 & -18.78295 & 17.88353 \\ 0 & 8.89948 & 0 \\ 0 & 0 & 15.31885 \end{bmatrix} \begin{matrix} S_2 \\ 3.57772 \\ 8.89948 \\ 15.31885 \end{matrix}$$

Comprobación:  $4.47214 \times 3.57772 = 16$ , etc.

$1/1_{rr} \quad 0.223607 \quad 0.112366 \quad 0.065279$

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 0.340897 & 0.053029 & -0.017044 \\ 0.053029 & 0.012626 & 0 \\ -0.017044 & 0 & 0.004261 \end{bmatrix} \begin{matrix} 16 \\ 12 \\ 298.6 \end{matrix}$$

Comprobación:  $-0.017044 \times 16 + 0.004261 \times 298.6 = 1$ , etc.

Por no haber movimiento de los soportes, la ecuación (18) toma la forma  $p = F^{-1} u$ . Efectuando las operaciones, los valores de las redundancias se han encontrado que son:

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.364 \\ 0.545 \\ 0.932 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} H \\ 5.318 \\ 1.499 \\ 0.920 \end{bmatrix}$$

En la figura 5 se muestran los diagramas finales de momento flector.

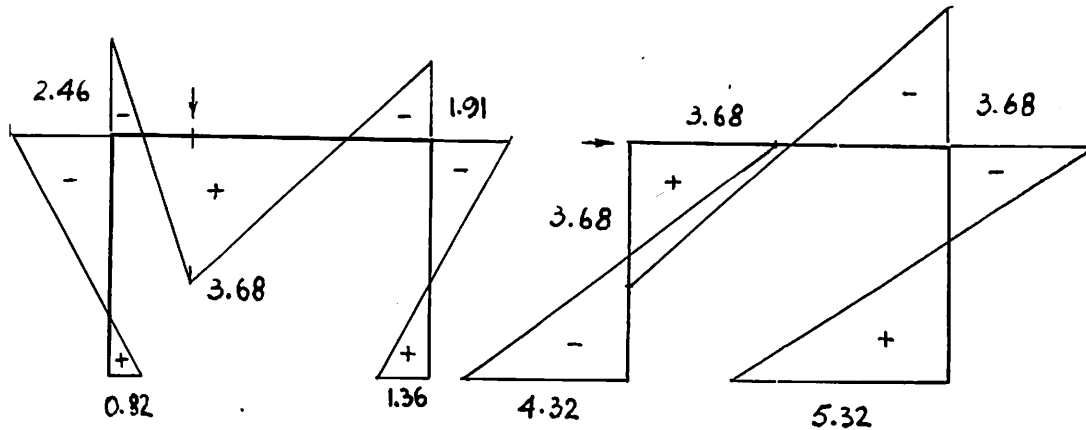


Figura 5

#### Referencias

- Makowski, Z. S., "Interconnected Systems, two —and three— dimensional grids". The Guilds Engineer, Londres, 1955.
- "Stahlbau, Ein Handbuch für Studium und Praxis" Vol. 1, Stahlbau Verlags GMBH, Colonia, 1956.
- Morice, P.B., "Linear Structural Analysis", Thames and Hudson, Londres, 1959.
- Hartree, D. R. "Numerical Analysis" Oxford University Press, 1958.
- Torroja, E. "Philosophy of Structures" University of California Press, 1958.
- Neiss, F. "Determinanten und Matrizen" Springer Verlag, 1955.

## ARCILA, WILLS, CORDOBA & CIA. LTDA.

DEPTO. INGENIERIA	ARQUITECTOS - INGOS. Medellín - Colombia	DEPTO. DE ARQUIT.
JULIO O. CORDOBA E.	Eificio Pestrada 804 a 807 Cables y Tgmas. "ARWICO"	HUMBERTO WILLS I.
GUSTAVO WILLS I.	TELEFONOS: OFICINAS: 188-64 - 172-90 DEPOSITO: 613-18	CESAR ARCILA R.