Resolución Numérica de Ecuaciones Algebraicas

572 para pag. 33 No

por: *Luis de Greiff Bravo*

Aclaraciones al lector:

Diversas dificultades y no pocas ocupaciones provenientes de la diaria faena docente, me hicieron postergar hasta la fecha la publicación del presente trabajo, elaborado durante los años 1950, 1952.

El cálculo de las funciones simétricas de las raíces de ecuaciones algebraicas enteras, aparece ya, -según lo afirman historiadores de la Matemática-, en la obra de Sir Isaac Newton, quien, entre sus méritos de científico universal, posee, honor que comparte con Leibniz, el de haber sido descubridor del Cálculo Infinitesimal.

Leonardo Euler, quien lleva adelante la estructuración del Análisis, y deja la huella de su genio en casi todos los campos de la Matemática teórica, y de la aplicación de ésta a la Mecánica, la construcción, etc., se ocupa a fondo del problema. Mas fueron algunos matemáticos que llevan el apellido ilustre de Bernoulli, -mencionan algunos a Juan, sin especificar, puesto que se sabe que en esa dinastía del humano ingenio existieron Juan I, Juan II y Juan III Bernoulli; mencionan otros a Daniel-, quienes tuvieron la idea de utilizar las sumas de potencias de las raíces para estimar el valor de la raíz de más alto módulo, o, como decimos hoy, para determinar una sucesión numérica que converja a la *raíz dominante.*

Se sabe además que, a mediados del siglo XVIII, Clairaut utilizó series para hacer la determinación de las raíces, y que Lagrange, a fines de dicho siglo, hizo trabajos decisivos sobre teoría de ecuaciones, con utilización de funciones simétricas.

En las postrimerías del siglo XVIII hay un súbito cambio de orientación, cuando C. F. Gauss, (1799), da por primera vez la demostración rigurosa del *teorema fundamental del Algebra,* según el cual, todo polinomio de coeficientes complejos, posee un *cero* en el dominio complejo. El cómputo de raíces mediante funciones simétricas de aquéllas, parece perder desde entonces toda importancia.

Y es así como, a comienzos del siglo XIX, diferentes matemáticos continúan en la búsqueda de soluciones *por radicales,* para ecuaciones de grado mayor que 4, esfuerzo que fué suspendido con el descubrimiento de Abel, quien hizo ver que no existen soluciones de aquél tipo para ecuaciones cuyo grado es igual o mayor que 5.

Que los trabajos de Bernoulli cayeron en el olvido resulta evidente. En efecto, a través del siglo XIX, los tratadistas no hacen aplicación alguna de las sumas potenciales para la determinación numérica de las raíces. Prefieren aquéllos los métodos de aproximación de Newton y de Horner -que, como hemos demostrado en otro trabajo, no difieren en esencia,- el método de *regula falsis* o interpolación lineal, etc. El método de Graeffe aparece posteriormente (*) y es acogido como el único procedimiento práctico que aprovecha las funciones simétricas.

Se explica que los trabajos de Bernoulli no hayan sido tenidos en cuenta en tiempos posteriores, pues es manifiesto que su aplicación eficiente exige valerse de medios mecánicos, -o electrónicos-, para computación, y las relaciones a que el método da lugar son poco adecuadas al cálculo logrítmico, único recurso de que se disponía usualmente para efectuar operaciones en amplia escala, antes de la producción comercial de calculadoras mecánicas, a comienzos del presente siglo.

Hasta la fecha en que escribo las presentes líneas aclaratorias, -noviembre de 1962-, no me ha sido dado llevar a efecto una consulta directa de la obra de los grandes clásicos de la Matemática a que he hecho referencia, de manera que no me es posible conocer el grado en que las técnicas aquí presentadas constituyen una novedad, y cual haya sido, objetivamente, el alcance de mi contribución.

He partido del conocimiento que el cociente $f'(x)/f(x)$ da lugar a una serie de potencias en $(1/x)$, cuyos coeficientes son las sumas de las potencias enteras de las raíces. Este algoritmo se encuentra explicado en diversos tratados, entre los cuales cabe mencionar el excelente *Cours d' Algébre Supérieure* por J. A . Serret (*). A partir de esta base trabajé de manera autónoma sin inda-

(*) Graeffe, Carl H., suizo, (1799-1873).
(*). Ed. Gauthier Villars et Cie., Paris.

gar lo que otros investigadores hayan logrado hacer a partir del mencionado principio, resultados que por lo demás no aparecen, no veo en los numerosos libros que, día a día, se publican sobre cálculo numérico. Para un trabajador matemático, que labora en un medio donde se carece de los grandes archivos que conservan la obra de los antiguos investigadores, la labor habría sido imposible, si su preocupación fundamental hubiere sido indagar cuándo y dónde alguna idea matemática fué explorada ya en sus posibilidades científicas.

Una circunstancia me lleva de manera decisiva a hacer la presente publicación: es la extensión del método de sumas potenciales a la determinación de ceros en los polimonios del dominio complejo y, en particular, la idea que he tenido de utilizar la *representación conforme* para lograr un acercamiento consecutivo a la raíz.

La extensión del Análisis Infinitesimal al dominio complejo es conquista del siglo XIX. Se debe en lo esencial, a Riemann y a Cauchy, creadores de la teoría de las funciones regulares, analíticas u holomorfas, que poseen la propiedad de representación conforme, según la cual, *una figura infinitésima del plano de las z, es transformada por una función analítica f(z), en una figura infinitésima semejante, en el plano de la función.* Es en la aplicación de esta propiedad a la teoría de la aproximación, donde creo haber hecho una aportación de innegable interés al cálculo numérico.

Para cerrar estas líneas aclaratorias deseo responder a un reparo que se hace con frecuencia a quienes se ocupan en la investigación de temas que, al decir de los críticos, son *elementales, agotados*. Tal es la opinión de ellos sobre la teoría de las ecuaciones.

Respondo que en la Matemática no existe teoría o técnica de trabajo alguna, que esté definitivamente elaborada. En cuanto al carácter de *elemental*, es obvio que este calificativo no es fácil de precisar, pues, a ejemplo, la idea muy elemental de *número primo* o la idea de *conjunto* -intuitiva-, han sido base de las más altas teorías de la Matemática.

Que se perdone esta digresión necesaria a justificar la presencia tipográfica de este trabajo.

DEFINICIONES E INTRODUCCION

Conviene explicar algunos términos utilizados a lo largo de este trabajo. Nos ocuparemos en él exclusivamente de ecuaciones polinómicas enteras. Aclaremos primero el concepto de,

Raíz dominante.- Las n raíces de una ecuación de grado n pueden ser ordenadas en sucesión monótona decreciente, según los módulos. En tal disposición, el primer elemento o sea, la raíz cuyo módulo es mayor que el de todas las demás, recibe el nombre de *raíz dominante*.

Sumas potenciales.- Designamos de esta manera las sumas de potencias, índice k, de las raíces de una ecuación. k representa los números no negativos. 0, 1, 2, 3,. .

Parte considerable de este trabajo estará destinada a presentar técnicas para efectuar el cómputo de dichas sumas.

El trabajo lleva el siguiente orden en la resolución de ecuaciones:

Primer caso: Ecuaciones con coeficientes reales, cuya raíz dominante es real.

Segundo caso: Ecuaciones con coeficientes reales cuya raíz dominante es compleja.

Tercer caso: Ecuaciones con coeficientes complejos, cuyas raíces, como es bien conocido, pertenecen al dominio complejo. (Las raíces reales son teóricamente posibles aunque poco frecuentes).

El trabajo se presenta en el mismo orden en que fué llevada a cabo la investigación.

Se observa que el procedimiento de aproximación a la raíz compleja, en las ecuaciones del dominio complejo, -tercer caso-, que, como hemos explicado ya, se basa en la propiedad de representación conforme, implica cómputos semejantes a los que se hacen con el objeto de calcular la posición de un punto en el caso de un levantamiento topográfico.

Nota.- A propósito del primer caso, el autor publicó un estudio titulado "Resolución numérica de ecuaciones algébricas", (Tip. Bedout, Medellín, Colombia, 1949). En dicho estudio, reproducido posteriormente en la Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, se establece una comparación entre el método aquí tratado y el método de Graeffe.

PRIMER CASO

Coeficientes reales; raíz dominante real

Una vez obtenidas las sumas potenciales resulta muy fácil determinar la naturaleza de la raíz dominante. En efecto, si las mencionadas sumas son positivas, será también positiva la raíz dominante. Si, al sobrepasar un cierto valor del índice de potencia, las sumas potenciales pares resultan positivas y se mantienen negativas las sumas potenciales impares, esto significa que la raíz dominante es negativa. Si, por último, aparecen sumas potenciales de grado par con signo negativo, la raíz dominante tendrá que ser compleja.

Sea la siguiente ecuación de cuarto grado con coeficientes reales,

$$(1) \qquad f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = 0$$

$$(2) \qquad f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 14$$

Al proceder, según esquemas de cálculo numérico que serán explicados posteriormente, se obtiene para la ecuación (1):

$$b_1 = 6, \quad b_2 = 12, \quad b_3 = 42, \quad b_4 = 180,$$
$$b_5 = 726, \quad b_6 = 2.748 \quad b_7 = 10.170, \quad b_8 = 37.668,$$
$$b_9 = 140.262, \quad b_{10} = 523.692, \quad b_{11} = 1'955.850, \ldots$$

donde se designa mediante b_s la suma de potencias, índice s, de las raíces de la ecuación. Dado que esta sucesión numérica es siempre positiva, la raíz dominante de la ecuación (1) tendrá que ser real.

Se establecen ahora las relaciones de aproximación:

$$(3) \qquad b_{s+1} \doteq a^{s+1}, \qquad b_s \doteq a^s$$

en las cuales se designa con $\underline{a}$ la raíz dominante. Se tiene,

$$(4) \qquad \frac{b_{s+1}}{b_s} \doteq \frac{a^{s+1}}{a^s} = a$$

Así, con los valores numéricos previamente anotados, se obtiene la siguiente sucesión de cocientes que aproximan a la raíz dominante:

$$a_6 = \frac{10.170}{2.748} = 3{,}701; \qquad a_7 = \frac{37.668}{10.170} = 3{,}704;$$

$$a_8 = 3{,}724; \qquad a_9 = 3{,}733; \qquad a_{10} = 3{,}734; \; \ldots .$$

El subíndice que ha sido provisto a la letra a, corresponde al índice de potencia del denominador en la razón (4).

Aportaremos ahora la *corrección de Newton,* computada con base en el valor 3,73. Se tiene,

$$f(3{,}73) = -0{,}0672. \qquad f'(3{,}73) = 32{,}67;$$

valores que han sido obtenidos mediante la división sintética de $f(x)$, $f'(x)$, por $(x - 3{,}73)$, respectivamente. Se deduce:

$$(5) \qquad h = -\frac{f(3{,}73)}{f'(3{,}73)} = 0{,}00205,$$

de manera que la raíz dominante, aportada la corrección (5), resulta ser:

$$a = 3{,}73205$$

valor correcto en las cinco cifras decimales escritas.

Conviene explicar ahora porqué todo el objetivo de este trabajo se dirige a la obtención de la raíz dominante.

Nos referiremos a una ecuación dada, $f(x) = 0$, con el nombre de *ecuación original.* Llamaremos entonces *ecuación cociental* de primer orden, a la que resulta de igualar a cero el cociente $f(x)/(x - a)$, donde a designa la raíz dominante de la ecuación original. La raíz dominante de la ecuación cociental de primer orden, viene a ser la segunda raíz de la original en orden decreciente de módulos, y así sucesivamente.

En otras palabras:

la sucesión de raíces dominantes de las ecuaciones cocientales en el orden en que se obtienen, expresa la sucesión de raíces de la ecuación original según el orden decreciente de los módulos.

PRIMER CASO

Coeficientes reales; raíz dominante real

Una vez obtenidas las sumas potenciales resulta muy fácil determinar la naturaleza de la raíz dominante. En efecto, si las mencionadas sumas son positivas, será también positiva la raíz dominante. Si, al sobrepasar un cierto valor del índice de potencia, las sumas potenciales pares resultan positivas y se mantienen negativas las sumas potenciales impares, esto significa que la raíz dominante es negativa. Si, por último, aparecen sumas potenciales de grado par con signo negativo, la raíz dominante tendrá que ser compleja.

Sea la siguiente ecuación de cuarto grado con coeficientes reales,

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = 0 \tag{1}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 14 \tag{2}$$

Al proceder, según esquemas de cálculo numérico que serán explicados posteriormente, se obtiene para la ecuación (1):

$$b_1 = 6, \quad b_2 = 12, \quad b_3 = 42, \quad b_4 = 180,$$
$$b_5 = 726, \quad b_6 = 2.748 \quad b_7 = 10.170, \quad b_8 = 37.668,$$
$$b_9 = 140.262, \quad b_{10} = 523.692, \quad b_{11} = 1'955.850, \ \ldots$$

donde se designa mediante b_s la suma de potencias, índice s, de las raíces de la ecuación. Dado que esta sucesión numérica es siempre positiva, la raíz dominante de la ecuación (1) tendrá que ser real.

Se establecen ahora las relaciones de aproximación:

$$b_{s+1} \doteq a^{s+1}, \qquad b_s \doteq a^s \tag{3}$$

en las cuales se designa con $\underline{a}$ la raíz dominante. Se tiene,

$$\frac{b_{s+1}}{b_s} \doteq \frac{a^{s+1}}{a^s} = a \tag{4}$$

Así, con los valores numéricos previamente anotados, se obtiene la siguiente sucesión de cocientes que aproximan a la raíz dominante:

$$a_6 = \frac{10.170}{2.748} = 3{,}701; \qquad a_7 = \frac{37.668}{10.170} = 3{,}704;$$

$$a_8 = 3{,}724; \qquad a_9 = 3{,}733; \qquad a_{10} = 3{,}734; \; \ldots .$$

El subíndice que ha sido provisto a la letra a, corresponde al índice de potencia del denominador en la razón (4).

Aportaremos ahora la *corrección de Newton,* computada con base en el valor 3,73. Se tiene,

$$f(3{,}73) = -0{,}0672. \qquad f'(3{,}73) = 32{,}67;$$

valores que han sido obtenidos mediante la división sintética de $f(x)$, $f'(x)$, por $(x - 3{,}73)$, respectivamente. Se deduce:

$$h = -\frac{f(3{,}73)}{f'(3{,}73)} = 0{,}00205, \tag{5}$$

de manera que la raíz dominante, aportada la corrección (5), resulta ser:

$$a = 3{,}73205$$

valor correcto en las cinco cifras decimales escritas.

Conviene explicar ahora porqué todo el objetivo de este trabajo se dirige a la obtención de la raíz dominante.

Nos referiremos a una ecuación dada, $f(x) = 0$, con el nombre de *ecuación original.* Llamaremos entonces *ecuación cociental* de primer orden, a la que resulta de igualar a cero el cociente $f(x)/(x - a)$, donde a designa la raíz dominante de la ecuación original. La raíz dominante de la ecuación cociental de primer orden, viene a ser la segunda raíz de la original en orden decreciente de módulos, y así sucesivamente.

En otras palabras:

la sucesión de raíces dominantes de las ecuaciones cocientales en el orden en que se obtienen, expresa la sucesión de raíces de la ecuación original según el orden decreciente de los módulos.

SEGUNDO CASO

Coeficientes reales; raíz dominante compleja

1.-Determinación de la raíz dominante.- Sea la ecuación algebraica entera con coeficientes p_u reales:

$$\Sigma p_u x^{n-u} = 0 \qquad (u = 0, 1, \ldots, n) \tag{1-1}$$

Supongamos que la ecuación (1-1) tenga h raíces reales y f raíces complejas, $(h + f = n)$. Entonces la suma de potencias de grado s de las raíces, podrá expresarse como sigue:

$$b_s = \sum_{i=1}^{h} x_i^s + \sum_{j=1}^{f} z_j^s \tag{1-2}$$

Puesto que, por cada raíz compleja z_j, aparece la conjugada $\overline{z_j}$, la suma b_s podrá descomponerse como sigue:

$$b_s = \sum_{i=1}^{h} x_i^s + \sum_{j=1}^{f/2} z_j^s + \sum_{j=1}^{f/2} \overline{z_j}^s \tag{1-3}$$

Ahora bien, se tiene:

$$\begin{aligned} z_j &= r_j\ (\cos \lambda_j + i \operatorname{sen} \lambda_j) \\ \overline{z_j} &= r_j\ (\cos \lambda_j - i \operatorname{sen} \lambda_j) \end{aligned} \tag{1-4}$$

y, como según la fórmula de De Moivre, es,

$$\begin{aligned} z_j^s &= r_j^s\ (\cos s\ \lambda_j + i \operatorname{sen} s\ \lambda_j) \\ \overline{z_j^s} &= r_j^s\ (\cos s\ \lambda_j - i \operatorname{sen} s\ \lambda_j) \end{aligned} \tag{1-5}$$

resulta como suma de las (1-5):

$$z_j^s + \overline{z_j^s} = 2\, r_j^s \cos\ s\, \lambda_j \tag{1-6}$$

Con lo anterior, la relación (1-3), queda finalmente, así:

$$b_s = \sum_{i=1}^{h} x_i^s + 2 \sum_{j=1}^{f/2} r_j^s \cos s\ \lambda_j \tag{1-7}$$

En el análisis de esta relación se tendrán en cuenta dos circunstancias, a saber:

a) La ecuación tiene raíz dominante real. Ocurrirá entonces que, al crecer s indefinidamente, la razón del segundo sumando al primero, en el segundo miembro de (1-7), tiende a cero. En consecuencia, para valores altos de s, se puede escribir:

$$(1\text{-}8) \qquad b_s \doteq \sum_{i=1}^{h} x_i^s$$

y, si la raíz dominante se designa con x_y, la (1-8) da:

$$(1\text{-}8') \qquad b_s \doteq x_y^s$$

Esta última relación permite construir una sucesión de valores que aproximen a x_y. En realidad, estas consideraciones corresponden al primer caso estudiado ya que la única condición que hemos exigido a la ecuación original es que tenga raíz dominante real. Otras raíces podrán ser complejas.

b) La raíz dominante es compleja. En este caso se presentan en realidad dos raíces dominantes, complejas conjugadas.

Ahora, en el segundo miembro de la relación (1-7) tendrá predominio el segundo sumando, al crecer s. En otras palabras, la razón del primero al segundo sumandos en (1-7) tiende a cero, lo que permite escribir:

$$(1\text{-}9) \qquad b_s \doteq 2 \sum_{j=1}^{f/2} r_j^s \cos s\, \lambda_j$$

Ahora bien, si z_p designa una raíz dominante compleja, la (1-9) se reduce, para altos s, a lo siguiente:

$$(1\text{-}10) \qquad b_s \doteq 2\, r_p^s \cos s\, \lambda_p$$

El problema queda reducido ahora a la determinación de λ_p, r_p.

Existen dos caminos a seguir.

Consiste el primero en aplicar la relación (1-10) al índice 2s, para el cual se tiene:

$$(1\text{-}11) \qquad \begin{aligned} b_{2s} &\doteq 2\, r_p^{2s} \cos 2\, s\, \lambda_p \\ &= 2\, r_p^{2s}\, (2 \cos^2 s\, \lambda_p - 1) \end{aligned}$$

Al eliminar el módulo r_p entre las relaciones (1-10), (1-11), se obtiene:

$$2 \cos^2 s\,\lambda_p \doteq b_s^2/(b_s^2 - b_{2s}) \tag{1-12}$$

Esta relación nos da, para cada valor del índice s, un valor para el argumento λ_p; y, con éste, mediante la (1-10), se tendrá una determinación correlativa para el módulo.

El segundo camino a seguir consiste en elegir en la relación (1-10) aquellos valores del argumento que difieren poco de los múltiplos enteros de 2π, para los cuales se tiene:

(1-13 $$s\,\lambda_p \doteq 2\,l\,\pi$$

(l, un número entero positivo). En tales circunstancias, la relación (1-10) da,

$$b_s \doteq 2\,r_p^s \tag{1-14}$$

En resumen: podemos descubrir la raíz dominante por medio de su módulo, cuando el argumento $s\,\lambda_p$ se acerca a un múltiplo de π. Basta para ello buscar los valores *altos* de b_s, en la sucesión de sumas potenciales. La obtención de un valor inicial para el argumento utilizando la (1-13), es inmediata.

Mejoramiento de la raíz.- Una vez obtenido el valor de la raíz dominante con una o dos cifras decimales exactas, se procederá a "mejorar" el valor conocido, mediante la adición del cociente de Newton, basado en la serie de Taylor, cociente o corrección que es válido bien sea que se trate de variable real o de variable compleja. A saber,

$$h = -f(x)/f'(x)$$

y respectivamente,

$$h + k\,i = -f(z)/f'(z)$$

Casos de excepción.- Las ecuaciones *binómicas* poseen raíces equimodulares. Se conoce su sencilla representación como vértices de un polígono regular en el plano de Gauss. Hay también ecuaciones en las cuales los módulos difieren poco entre sí. Este trabajo no se ocupa de tales circunstancias excepcionales. No obstante, creemos que los métodos de análisis numérico presentados aquí, pueden adaptarse, con ligeras modificaciones, para cubrir todas las circunstancias.

(Continuará en el próximo número)