Resolución Numérica de Ecuaciones Algebraicas

(Continuación)

Por el prof. Ing. *Luis de Greiff Bravo*

2.-Obtención de las sumas potenciales.- Sea f(x) el polinomio cuyos ceros debemos determinar. El procedimiento más sencillo a seguir para determinar las sumas de potencias de las raíces, consiste en efectuar la división de f'(x) entre f(x) operando únicamente con los coeficientes, (división sintética o abreviada de Ruffini y Horner). La disposición de los cálculos se indica en el ejercicio tratado a continuación.

Sean,

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 62x^2 + 38x + 901 \tag{2-1}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 124x + 38 \tag{2-2}$$

Los cómputos relativos a la división son los siguientes:

4	—6	124	38		1 —2 62 38 901
4	—8	248	152	3604	
2	—124	—114	—3604	....	(4)
2	—4	124	76	1802	(2)
—120	—238	—3680	—1802	......	
—120	240	—7440	—4560	—108120	(—120)
—478	3760	2758	108120		
—478	956	—29636	—18164	—430678	(—478)
2804	32394	126284	430678		
2804	—5608	173848	106552	2526404	(2804)
38002	—47564	324126	—2526404		
38002	—76004	2356124	1444076	34239802	(38002)
28440	—2031998	—3970480	—34239802		(28440)

Con lo anterior se han obtenido los valores:

$b_0 = 4, \quad b_1 = 2, \quad b_2 = -120, \quad b_3 = -478, \quad b_4 = 2.804,$

$b_5 = 38.002, \quad b_6 = 28.440,$ etc.

Pasamos ahora a exponer otro procedimiento para calcular las sumas potenciales. Está basado en una relación de recurrencia, en la que se presenta un producto interior de vectores.

Sea el polinomio:

$$(2\text{-}3) \qquad f(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + \ \ldots \ + p_{n-1}x + p_n$$

cuyos coeficientes, por hipótesis, pertenecen al cuerpo de los números reales.

La serie que da las sumas potenciales de los ceros de $f(x)$, es como sigue:

$$(2\text{-}4) \qquad f'(x)/f(x) = b_0/x + b_1/x^2 + b_2/x^3 + \ldots\ldots + b_s/x^{s+1} + \ldots$$

en esta serie b_s representa el valor de la suma de las potencias, índice s, de los ceros del polinomio $f(x)$, (o raíces de la ecuación $f(x) = 0$).

Multiplicando los dos miembros de la relación (2-4) por $f(x)$ en su forma explícita, y reuniendo términos semejantes, se tiene:

$$(2\text{-}5) \qquad f'(x) = np_0x^{n-1} + (n-1)p_1x^{n-2} + \ldots\ldots + p_{n-1}$$

$$= p_0b_0x^{n-1} + (p_0b_1 + p_1b_0)x^{n-2} + (p_0b_2 + p_1b_1 + p_2b_0)x^{n-3}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ (p_0b_s + p_1b_{s-1} + p_2b_{s-2} + \ldots\ldots + p_nb_{s-n})x^{n-s-1} + \ \ldots$$

A partir del exponente $n\text{-}s\text{-}1=0$, ó sea cuando es $s=n\text{-}1$, el coeficiente se dice *completo*, puesto que en él intervienen todos los coeficientes p_v del polinomio $f(x)$.

Según el principio de coeficientes indeterminados, (unicidad del desarrollo de una función), puede escribirse:

$$(2\text{-}6) \qquad np_0 = b_0p_0, \text{ de donde, } b_0 = n;$$

$$p_0b_1 + p_1b_0 = (n\text{-}1)\,p_1, \text{ de donde, } b_1 = -p_1/p_0;$$

$$p_0b_2 + p_1b_1 + p_2b_0 = (n-2)\,p_2, \text{ de donde,}$$

$$b_2 = (p_1/p_0)^2 - 2p_2/p_0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

De este modo se pueden calcular progresivamente los valores de b_s hasta llegar a $s=n\text{-}1$. De este valor en adelante, los coeficientes que aparecen en el segundo miembro de (2-5), -coeficientes completos- son todos nulos, y se cumple la siguiente relación recurrente que liga los coeficientes p_v del polinomio con las sumas potenciales b_s:

$$(2\text{-}7) \qquad p_0b_s + p_1b_{s-1} + p_2b_{s-2} + \ldots\ldots + p_nb_{s-n} = 0 \qquad (s = n, n+1, \ldots.)$$

De esta relación lineal se podrá despejar b_n, luego b_{n+1}, etc.

La expresión sumatoria para la relación (2-7) es como sigue:

$$(2\text{-}8) \qquad \sum_{v=0}^{n} p_vb_{s-v} = 0, \qquad (s = n, n+1, \ldots.)$$

Estas relaciones expresan que el producto interior del vector-línea:

$$(2\text{-}9) \qquad \left[p_0, p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n\right]$$

por el vector-columna:

$$(2\text{-}10) \qquad \begin{bmatrix} b_s \\ b_{s-1} \\ \cdot \\ b_{s-n} \end{bmatrix}$$

es igual a *cero*, a partir de $s=n$.

Una tercera forma para las relaciones (2-7), (2-8) es pues la siguiente:

$$(2\text{-}11) \qquad \left[p_0, p_1, \ldots\ldots, p_n\right] \begin{bmatrix} b_s \\ b_{s-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{s-n} \end{bmatrix} = 0$$

Resulta interesante expresar estas relaciones que valen para $s=n, n+1, \ldots.$, en la forma de producto de matrices, cuyas dimensiones son $1 \times n$ para la primera, $n \times \infty$ para la segunda:

$$(2\text{-}12) \qquad \left[p_0, p_1, \ldots\ldots, p_n\right] \begin{bmatrix} b_n & b_{n+1} & b_{n+2} & \ldots \\ b_{n-1} & b_n & b_{n+1} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots \end{bmatrix}$$

$$= [0,\ 0,\ 0, \ldots .]$$

Ejemplo.- Como ilustración del método explicado vamos a determinar las sumas b_v correspondientes a la función vista anteriormente:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 62x^2 + 38x + 901$$

En primer lugar se tiene $b_0 = n = 4$.

La segunda relación (2-6), se escribe:

$$[1,\ -2] \begin{bmatrix} b_1 \\ 4 \end{bmatrix} = 3 \times (-2) = -6, \text{ de donde. } \quad \underline{b_1 = 2}$$

El cómputo continúa así:

$$[1,\ -2,\ 62,] \begin{bmatrix} b_2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \times 62 = 124, \text{ de donde, } \underline{b_2 = 120}$$

$$[1,\ -2,\ 62,\ 38] \begin{bmatrix} b_3 \\ -120 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 38, \text{ de donde, } \quad \underline{b_3 = -478}$$

La ecuación siguiente es completa:

$$[1,\ -2,\ 62,\ 38,\ 901] \begin{bmatrix} b_4 \\ -478 \\ -120 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 0, \text{ de donde, } \quad b_4 = 2804$$

Y procediendo con relaciones análogas a la anterior que es la (2-11) aplicada a $n=4$, se obtienen los valores:

$b_5 = -38.002$; $b_6 = 28.440$; $b_7 = -1'975.118$; $b_8 = -9'683.996$; resultados que están de acuerdo con los que fueron obtenidos por el método de división.

3.-*Deducción de las fórmulas precedentes utilizando el signo de sumatoria.*- Con tal fin se escriben las relaciones fundamentales:

(3-1) $$f(x) = \sum_{v=0}^{n} p_v x^{n-v}$$

(3-2) $$f'(x) = \sum_{v=0}^{n-1} (n-v)\, p_v x^{n-v-1}$$

(3-3) $$\left[f'(x)/f(x) \right] = \sum_{r=0}^{\infty} b_r/x^{r+1}$$

Multiplicando la primera por la tercera e igualando a la expresión intermedia, segundo miembro, se tiene:

(3-4) $$\sum_{v=0}^{n-1} (n-v)\, p_v x^{n-v-1} = \sum_{v=0}^{n} p_v x^{n-v} . \sum_{r=0}^{\infty} b_r/x^{r+1}$$

Ahora bien, esta expresión (3-4) puede disponerse como sigue:

(3-5) $$\sum_{v=0}^{n-1} (n-v)\, p_v x^{n-v-1}$$
$$= \sum_{v=0}^{n} p_v x^{n-v} \left(\sum_{r=0}^{n} b_r/x^{r+1} + \sum_{r=n+1}^{\infty} b_r/x^{r+1} \right)$$

donde, al efectuar la multiplicación indicada al segundo miembro se tiene,

(3-6) $$\sum_{v=0}^{n-1} (n-v)\, p_v x^{n-v-1} = + \sum_{v=0}^{n} \sum_{r=0}^{n} p_v b_r x^{n-r-v-1}$$
$$+ \sum_{v=0}^{n} \sum_{r=n+1}^{\infty} p_v b_r x^{n-r-v-1}$$

Ahora consideremos los índices de potencia que satisfacen la desigualdad:

(3-7) $v + r = h$ menor o igual a n-1

para tales valores el primer término del segundo miembro de la relación (3-6), puede escribirse:

(3-8) $$\sum_{v=0}^{h} p_v b_{h-v} x^{n-h-1}$$

En virtud del principio de coeficientes indeterminados y si se tiene en cuenta que en el primer miembro de (3-6) sólo habrá un término con exponente n-h-1, a saber:

(3-9) $(n-h)\, p_h x^{n-h-1}$,

se *obtiene*:

(3-10) $$(n-h)\, p_h = \sum_{v=0}^{h} p_v b_{h-v}$$

relación que, repetimos, vale para todo h menor o igual a n-1.

Falta analizar la segunda sumatoria escrita en el segundo miembro de (3-6). Se tiene ahora,

(3-11) $\qquad v + r = h$ mayor o igual a n,

Para estos índices son negativos los exponentes de x en la sumatoria, y por no ocurrir lo mismo en el primer miembro de (3-6), se concluye que todos los coeficientes de x^h, (h mayor o igual que n), son nulos. O sea:

(3-12) $\qquad \sum_{v=0}^{n} p_v b_{h-v} = 0$, para todo h mayor o igual a n.

Provistos ya de procedimientos para la obtención de las sumas potenciales, vamos a resolver algunas ecuaciones de coeficientes reales.

4.-*Determinación de raíces reales y complejas*.- Sea como ejemplo ilustrativo, la ecuación cúbica:

(4-1) $\qquad f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x - 2, \; f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$

Con los procedimientos explicados, se obtiene:

$b_0 = 3, \quad b_1 = -6, \quad b_2 = 18, \quad b_3 = -48, \quad b_4 = 114,$

$b_5 = -216, \; b_6 = 174, \quad b_7 = 1128, \; b_8 = -8766, \quad \ldots$

Para determinar el argumento ϕ nos valemos de la relación (1-12) cuya escritura repetimos:

(4-2) $\qquad 2 \cos^2 h\,\phi \doteq b_h^2/(b_h^2 - b_{2h})$

Esta relación aplicada a h=2, suministra:

$$2 \cos^2 2\,\phi \doteq 18^2/(18^2 - 144) = 162/210$$

En seguida hacemos constar el cómputo logarítmico de ϕ.

$$\begin{array}{rcl} \log 162 & = & 22{,}2095\ 150 \quad -20 \\ \log 210 & = & \underline{2{,}3222\ 193} \\ \log \cos^2 2\,\phi & \doteq & 19{,}8872\ 957 \quad -20 \\ \log \cos 2\,\phi & \doteq & 9{,}9436\ 478 \quad -10 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 2\,\phi & \doteq & 331^\circ\ 26'\ 20'' \\ \phi & \doteq & \underline{165^\circ\ 43'\ 10''} \end{array}$$

Para la determinación del argumento ϕ se ha tenido en consideración que, por ser,

(4-3) $\qquad b_h \doteq 2\lambda^h \cos h\,\phi$

los múltiplos de ϕ den para el *coseno* signos concordantes con los signos de b_h. Así por ejemplo, si hubiésemos elegido ϕ en el primer cuadrante, a saber:

$$2\phi = 28^\circ\ 33'\ 40'' \text{ de donde, } \phi = 14^\circ\ 16'\ 50'',$$

se habría obtenido un valor positivo para cos 5ϕ, o lo que es equivalente según (4-3), para b_5, y esto habría estado en contradicción con la sucesión de las sumas potenciales que da para b_5 el valor —216.

Determinación del módulo.- Aplicando la relación (4-3) para h=2, se tiene,

$$b_2 = 18 \doteq 2\lambda^2 \cos 2\phi, \text{ de donde, } \lambda^2 \doteq 9/\cos 2\phi$$

Se tiene,

$$\log 9 = 0{,}95424$$

$$\log \cos 2\phi = 9{,}94365 \quad -10$$

$$\log \lambda^2 = 1{,}01059 \qquad \log \lambda = 0{,}50530$$

Con estos elementos podemos calcular en primera aproximación las componentes de la raíz: $a = \lambda \cos \phi$, $b = \lambda \text{ sen } \phi$.

Al efecto,

$\log \lambda$	$= 0{,}50530$	$\log \lambda$	$= 0{,}50530$
$\log \cos \phi$	$= 9{,}98636 \quad -10$	$\log \text{sen } \phi$	$= 9{,}39220 \quad -10$
$\log a$	$= 0{,}49166$	$\log b$	$= 9{,}89750 \quad -10$
a	$= -3{,}10215$	b	$= 0{,}78976$

Las raíces tienen pues por valor:

$$z_1 = -3{,}10215 + 0{,}78976\ i$$

$$z_2 = -3{,}10215 - 0{,}78976\ i$$

Procedemos ahora a corregir esta primera determinación de la raíz.

Con tal fin es necesario computar el valor $f(z_1)$, lo que se logra dividiendo el primer miembro de la ecuación o sea $f(x)$, entre $(x-z_1)$.

Preferiremos aquí dividir por la función:

$$(x-z_1)\ (x-z_2) = (x-a)^2 + b^2 \tag{4-4}$$

lo que conduce a escribir la identidad:

(4-5) $$f(x) = \left[(x-a)^2 + b^2\right] \phi(x) + \alpha x + \beta$$

donde, efectuando la sustitución $x = a + bi$, resulta:

(4-6) $$f(a + bi) = \alpha a + \beta + \alpha bi$$

Este procedimiento tiene la ventaja de que las operaciones de división se ejecutan con más facilidad, pues tanto el dividendo como el divisor son polinomios con coeficientes reales.

Por el procedimiento descrito obtenemos luego $f'(z_1)$. Omitimos la presentación de cómputos de detalle limitándonos a hacer constar únicamente los resultados finales. Son:

$$f(z_1) = -0{,}02994 - 0{,}01618\ i; \qquad f'(z_1) = 1{,}22694 + 5{,}2226\ i$$

Con esto podemos plantear la corrección newtoniana:

(4-7) $$s + hi = -f(z_1)/f'(z_1)$$

Se tiene,

$$s + hi = 0{,}00421 - 0{,}00474\ i$$

Adicionando este resultado a la primera determinación de la raíz, se tiene como nueva valoración para ésta:

$$\left.\begin{matrix} z_1 \\ \\ z_2 \end{matrix}\right\} = -3{,}09794 \pm 0{,}78502\ i$$

La raíz real de la ecuación (4-1) se deduce con base en la relación $z_1 + z_2 + x_1 = -6$, que da para la última el valor:

$$x_1 = 0{,}19588$$

Segundo análisis.- Si la ecuación cúbica (4-1) se transforma por medio de la sustitución $x=1/y$, caemos en el caso de una ecuación cuya raíz dominante es real. Pasamos a obtenerla.

Se tiene:

(4-8) $$f(y) = y^3 - 4{,}5y^2 - 3{,}0y - 0{,}5$$

$$f'(y) = 3y^2 - 9y - 3$$

Por división:

(4-9) $$\frac{f'(y)}{f(y)} = \frac{3}{y} + \frac{4{,}5}{y^2} + \frac{26{,}25}{y^3} + \frac{133{,}125}{y^4} + \dots$$

Podemos computar la primera determinación de la raíz real de

$f(y) = 0$, por medio de b_3. Al efecto se tiene:

$$b_3 = 133{,}125 \doteq y_1^3, \qquad \log 133{,}125 = 2{,}124\ 2596$$

$$\log y_1 \doteq 0{,}708\ 0865$$

$$y_1 \doteq 5{,}1061$$

Corrección para y_1:

$$s = -\frac{f(y_1)}{f'(y_1)} = \frac{0{,}01589}{29{,}26190} = 0{,}00054$$

Aportando la corrección, se tiene $y_1 = 5{,}1061 + 0{,}0005 = 5{,}1066$ de donde $x_1 = 0{,}19582\ldots$, valor coincidente hasta la cuarta cifra decimal, con el que fué determinado anteriormente.

Segundo ejemplo.- Sea la siguiente ecuación de cuarto grado, de raíces complejas:

$$(4\text{-}10) \qquad f(z) = z^4 - 2z^3 + 62z^2 + 38z + 901 = 0$$

$$f'(z) = 4z^3 - 6z^2 + 124z + 38$$

Ya habíamos obtenido las sumas potenciales correspondientes a esta ecuación: Son ellas:

$b_0 = 4$, $b_1 = 2$, $b_2 = -120$, $b_3 = -478$, $b_4 = 2804$,

$b_5 = 38002$, $b_6 = 28440$, $b_7 = -1.975.118$, ...

Determinación del módulo.- Se parte de las relaciones,

$$b_7 \doteq 2\lambda^7 \cos 7\phi, \qquad \cos 7\phi \doteq -1$$

que dan, al sustituir valores numéricos:

$$2\lambda^7 \doteq 1.975.118. \text{ Se deduce,}$$

$$\lambda \doteq 7{,}184; \quad \log \lambda \doteq 0{,}856\ 3660$$

Observando la marcha de los signos de b_ν, se desprende que 7ϕ debe valer cerca de 540º, lo que nos da: $\phi \doteq 77º\ 8'\ 34''$.

Una determinación más exacta del argumento será la obtenida ahora partiendo de b_6. He aquí el detalle del cálculo:

$$b_6 \doteq 2\lambda^6 \cos 6\phi \qquad \log 14.220 = 4{,}152\ 8996$$

$$b_6/2 = 14.220 \qquad \log \lambda^6 \doteq 5{,}138\ 1960$$

$$\log \cos 6\phi \doteq 9{,}014\ 7036$$

Se deduce: $6\phi \doteq 360º + (84º\ 3'\ 45'')$; $\phi \doteq 74º\ 0'\ 37''$

Con esto podemos valorar la raíz dominante (y su conjugada).

$\log \lambda \doteq 0{,}856\ 3660$

$\log \cos \phi \doteq \overline{9}{,}440\ 0661 \qquad \log a \doteq 0{,}296\ 4321;$

$\log \operatorname{sen} \phi \doteq \overline{9}{,}982\ 8638 \qquad \log b \doteq 0{,}839\ 2298;$

$a \doteq 1{,}9789 \qquad b \doteq 6{,}9060$

y finalmente,

$$z_1 \doteq 1{,}9789 + 6{,}9060\ i; \qquad z_2 = \bar{z}_1 \doteq 1{,}9789 - 6{,}9060\ i$$

Corrección de la raíz hallada.- Ya hemos explicado el procedimiento que debe seguirse para calcular el valor $f(z_1)$. Consiste en dividir el polinomio dado por la forma cuadrática $(z-z_1)\ (z-\bar{z}_1)$ que para los valores obtenidos se reduce a lo siguiente:

$$z^2 - 3{,}9578\ z + 51{,}6088$$

Las operaciones de división aparecen en seguida:

1	—2	+62	+38	+901	1	—3,9578	51,6088
1	—3,9578	51,6088			1	1,9578	18,1398
	1,9578	10,3912	38				
	1,9578	—7,7486	101,0397				
		18,1398	—63,0397	901			
		18,1398	—71,7937	936,1733			
			8,7540	—35,1733			

El residuo de la división: $8{,}7540z - 35{,}1733$, nos permite obtener:

$$f(z_1) = 8{,}7540(\ 1{,}9789 + 6{,}9060\ i) - 35{,}1733$$

$$= -17{,}8500 + 60{,}4551\ i$$

Procediendo de manera análoga se obtiene:

$$f'(z_1) = -555{,}5086 - 300{,}5857\ i$$

con lo cual la corrección viene a ser:

$$s + hi = \frac{f(z_1)}{f'(z_1)} = \frac{-1{,}78 + 6{,}05\ i}{55{,}55 + 30{,}06\ i} = 0{,}0208 + 0{,}0977\ i$$

valor que, adicionado a la raíz, nos da como segunda apreciación para ésta:

$$\left.\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}\right\} = 1{,}9997 \pm 7{,}0037\ i$$

Tercer ejemplo.- La ecuación cuadrática.- Resulta interesante ver las simplificaciones que reciben las relaciones fundamentales, cuando se trata de la función cuadrática:

$$f(z) = z^2 + pz + q \qquad (p/2)^2 - q \text{ menor que } 0$$

En este caso las dos raíces complejas:

$$z_1 = r(\cos \phi + i \operatorname{sen}\phi),$$
$$\overline{z_1} = r(\cos \phi - i \operatorname{sen}\phi)$$

llevadas a la relación (1-7) dan como valor para las sumas potenciales:

$$b_h = 2r^h \cos h\phi$$

La relación (1-12) es en este caso exacta.

Finalmente, el desarrollo (2-3) se convierte en:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{2}{z} + \frac{2r}{z^2}\cos\phi + \frac{2r^2}{z^3}\cos 2\phi + \ldots +$$
$$\frac{2r^s}{z^{s+1}}\cos s\phi + \ldots$$

Desde el punto de vista práctico la ecuación cuadrática viene a ser el caso trivial para la resolución por el método de sumas potenciales.

En efecto, para la resolución por módulo y argumento, basta escribir:

$$b_1 = z_1 + \overline{z_1} = -p; \quad z_1\overline{z_1} = r^2 = q$$

De la primera: $2r \cos \phi = -p$; De la segunda: $r^2 = q$ relaciones que dan el módulo y el argumento de las raíces.

Pero es mucho más simple proceder como sigue:

Se escribe, $\quad z_1 = a + bi, \quad \overline{z_1} = a - bi$

y se tiene, $\quad z_1 + \overline{z_1} = 2a = -p; \; z_1\overline{z_1} = a^2 + b^2 = q$

de donde, $\quad a = -p/2, \quad b = \sqrt{q - p^2/4}$

Cuarto ejemplo.- Resolución de la ecuación cúbica:

(4-11) $\quad f(x) = x^3 - 16x^2 + 86x - 116 = 0$

Los valores de las sumas potenciales son:

$$b_0 = 3, \quad b_1 = 16, \quad b_2 = 84, \quad b_3 = 316,$$

$$b_4 = -312, \quad b_5 = -22.424,$$

$$b_6 = -295.296, \quad \ldots .$$

Si la raíz dominante de la ecuación (4-11) fuera real, b_6 tendría, *probablemente*, valor positivo. Como ocurre lo contrario, colegimos que la raíz dominante es compleja. Partimos de h=3 para tener:

$$2 \cos^2 3\phi \doteq (316)^2/(316^2 + 295.296)$$
$$= 99.856/395.152$$

Veamos el cálculo logarítmico que lleva a la primera determinación de la raíz dominante:

$\log \cos 3\phi \doteq 9{,}550\ 7900$	$316 \doteq 2\lambda^3 \cos 3\phi$
$3\phi \doteq 69^\circ\ 10'\ 52''$	$\log 158 \doteq 12{,}198\ 6571$
$\phi \doteq 23^\circ\ 3'\ 34''$	$\log \cos 3\phi \doteq 9{,}550\ 7900$
	$\log \lambda^3 \doteq 2{,}647\ 8671$
$\log a \doteq 0{,}846\ 4569$	$\log \lambda \doteq 0{,}882\ 6224$
$\log b \doteq 0{,}475\ 5605$	$\log \cos \phi \doteq 9{,}963\ 8345$
$a \doteq 7.02194$	$\log \operatorname{sen} \phi \doteq 9{,}592\ 9381$
$b \doteq 2{,}98924$	Raíces complejas: $7{,}02194 \pm 2{,}98924\ i$

La corrección se calcula de la manera explicada anteriormente.

Sugerimos al lector resolver la ecuación (4-11) por inversión, tal como se procedió con la ecuación (4-1).

Aplicación a la Trigonometría.- La relación (1-7) sugiere un procedimiento sencillo para computar los cosenos de los múltiplos de un arco. Con tal fin debemos formar la ecuación de grado mínimo y de coeficientes reales, cuyas raíces complejas - conjugadas -, tengan como argumento el ángulo de que se trata.

Sea en efecto la función cuadrática con ceros z_1, $\bar{z}_1$:

(4-12) $$\beta(z) = (z-z_1)\ (z-\bar{z}_1) = z^2 - 2z\lambda \cos \phi + \lambda^2$$

donde se tiene las equivalencias:

(4-13) $$z_1 = \lambda\ (\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi), \quad \bar{z}_1 = \lambda\ (\cos \phi - i \operatorname{sen} \phi)$$

Con la derivada de (4-12), a saber:

(4-14) $$\beta'(z) = 2z - 2\lambda \cos \phi$$

formamos el desarrollo cociental:

(4-15) $$\frac{\beta'(z)}{\beta(z)} = \frac{2}{z} + \frac{2\lambda \cos \phi}{z^2} + \frac{2\lambda^2 \cos 2\phi}{z^3} + \frac{2\lambda^3 \cos 3\phi}{z^4} + \ldots\ldots$$

La comparación de los términos de esta serie con el desarrollo numérico correspondiente a un caso dado, hará conocer los cosenos de los arcos múltiplos.

Apliquemos los anteriores puntos de vista al siguiente caso:

$$\phi = 12^\circ, \qquad \lambda = 10.$$

Se tiene:

$$\cos 12^\circ = 0{,}97815, \qquad \beta(z) = z^2 - 19.563z + 100$$
$$\beta'(z) = 2z - 19.563$$

Los coeficientes del desarrollo (4-15) resultan ser, en orden:

2; 19.563; 182.711; 1618.075; 13.383.301; ....

De ellos se deduce:

$$\cos 24^\circ = 0{,}91356; \quad \cos 36^\circ = 0{,}80904;$$
$$\cos 48^\circ = 0{,}66917; \quad \ldots.$$

en acuerdo aceptable con los valores de la Tabla. (El valor de partida debiera haberse introducido con unas siete cifras decimales).

Quinto ejemplo.- Sea la ecuación de sexto grado, $f(z)=0$:

(4-16) $$f(z) = z^6 + 4z + 12; \qquad f'(z) = 6z^5 + 4$$

Se tiene,

$p_0 = 1$; $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0$; $p_5 = 4$; $p_6 = 12$;

$b_0 = 6$. b_1 se deduce mediante la relación:

$$[p_0, p_1]\begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = (n-1)p_1, \text{ o sea, } [1, 0]\begin{bmatrix} b_1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$= 0$, de donde, $\qquad b_1 = 0.$

Procediendo según las relaciones (2-6) y (2-7) se obtienen:

$b_2 = b_3 = b_4 = 0; \quad b_5 = -20; \quad b_6 = -72; \quad b_7 = 0;$

$b_8 = 0; \quad \ldots\ldots$

Automatización.- La obtención de las sumas potenciales puede automatizarse en la forma que indica el siguiente cuadro:

$p_6=12$	$b_3=0$	0	0	—240	—864	0
$p_5=4$	$b_4=0$	0	—80	—288	0	0
$p_4=0$	$b_5=-20$	0	0	0	0	0
$p_3=0$	$b_6=-72$	0	0	0	0	0
$p_2=0$	$b_7=0$	0	0	0	0	0
$p_1=0$	$b_8=0$	0	0	0	0	0
		0	80	528	864	0
		(b_9)	(b_{10})	(b_{11})	(b_{12})	(b_{13})

0	0	960	6 336	10 368	0	0	—3 840
0	320	2 112	3 456	0	0	—1 280	—12 288
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	—320	—3 072	—9 792	—10 368	0	1 280	16 128
(b_{14})	(b_{15})	(b_{16})	(b_{17})	(b_{18})	(b_{19})	(b_{20})	(b_{21})

—36 864	—117 504	—124 416	0	15 360
—39 168	— 41 472	0	5 120	64 512
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
76 032	158 976	124 416	—51 20	—79 872
(b_{22})	(b_{23})	(b_{24})	(b_{25})	(b_{26})

193 536	912 384	1 907 712	1 492 992	— 61 440
304 128	635 904	497 664	—20 480	—319 488
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
—497 664	—1 548 288	—2 405 376	—1 472 512	—384 928
(b_{27})	(b_{28})	(b_{29})	(b_{30})	(b_{31})

Vamos en primer lugar a dar una explicación sobre este esquema de cálculo numérico.

De la relación (4-11) se deduce:

$$(4\text{-}17) \qquad p_0 b_s = -[p_1, p_2, \ldots, p_n] \begin{bmatrix} b_{s-1} \\ b_{s-2} \\ \vdots \\ b_{s-n} \end{bmatrix} (s = n, n+1, \ldots)$$

Por tenerse en este caso $p_0=1$, esta fórmula da directamente, con un simple cambio de signo, el valor b_s.

En el esquema, cada columna contiene los diferentes sumandos que componen el producto interior (4-17). Con tal finalidad, la primera columna contiene los coeficientes p_v de la ecuación escritos tal como aparecen al leerlos de derecha a izquierda. La siguiente columna contiene seis valores consecutivos de b_j $(j=n,n+1,..)$.

Primera operación.- El producto de p_6 por $b_3, b_4, \ldots, b_8$, da el encabezamiento de las seis columnas siguientes, a saber: tercera, cuarta, octava. La segunda operación consiste en multiplicar p_5 por $b_4, b_5, \ldots, b_8$, disponiendo los productos en la segunda línea horizontal, en las columnas tercera, cuarta,...., séptima. Análoga operación con p_4, hasta ocupar en la línea horizontal, las columnas tercera, cuarta, quinta, sexta. Análogas operaciones con p_3; luego con p_2 y por último con p_1, consiguiendo con ésta última operación, completar la tercera columna. La suma de los elementos de dicha tercera columna, cambiada de signo, nos da b_9, que en este caso ha resultado igual a 0.

Obtenido b_9 su valor se multiplica por $p_1, p_2, \ldots, p_6$ y se ocupan con los productos los primeros espacios vacíos de las columnas siguientes. Con esto se logra obtener b_{10}, que pasa a ser el siguiente factor.

Las operaciones y el esquema consiguiente se simplifican de manera considerable cuando algunos p_v son nulos. Así, en el caso que presentamos sería posible suprimir, por innecesarias, las líneas horizontales formadas por *ceros* (tercera, cuarta, quinta y sexta). No lo hemos hecho para mayor claridad.

Hagamos ahora el cómputo de la raíz dominante. Una rápida ojeada hace ver cómo un valor adecuado para iniciar la búsqueda de la raíz, es b_{29}. Se tiene:

$$b_{29} = -2.405.376 \doteq 2\,\lambda^{29}\cos 29\phi;\quad \cos 29\phi \doteq -1$$

$$29\phi \doteq 900^{\circ}$$

$$\log \tfrac{1}{2}b_{29} = 6{,}080\;1531 \doteq \log \lambda^{29};\qquad \phi \doteq 31^{\circ}\;02'\;4''13$$

$$\log \lambda \doteq 0{,}209\;6605 \qquad \lambda \doteq 1{,}620\;543$$

$$\log \lambda^2 = 0{,}419\;3210 \qquad \lambda^2 \doteq 2{,}62616$$

$$\log \cos \phi = 9{,}932\;9085;$$

$$\log \operatorname{sen} \phi = 9{,}712\;2740$$

$$\log a = 0{,}142\;5690; \qquad a = 1{,}38857$$

$$\log b = 9{,}921\;9345; \qquad b = 0{,}83548$$

Designando por $z_1 = a + bi$, el valor así determinado, pasamos a efectuar la corrección del mismo de la manera siguiente:

$$f(z_1) = -0{,}45135 + 1{,}38386\,i;\quad f'(z_1) = -56{,}86 + 28{,}16\,i$$

En consecuencia:

$$h + ki = -\frac{f(z_1)}{f'(z_1)} = -0{,}0160 + 0{,}0163\,i$$

cociente que, al ser adicionado a z_1, nos da la nueva valoración de la raíz dominante:

$$z_1' = 1{,}3726 + 0{,}8518\,i$$

Las correcciones han afectado las segundas cifras decimales.

Vamos a obtener ahora las restantes raíces de la ecuación (4-16) que nos ocupa. La ecuación rebajada viene a ser:

$$(4\text{-}17)\qquad f_1(z) = z^4 + 2{,}745z^3 + 4{,}9265z^2 + 6{,}3603z + 4{,}6041 = 0$$

El cómputo de las sumas potenciales se efectúa como de ordinario. Los valores oportunos para la solución, son:

$b_{14} = -128,6655$; $b_{15} = 912,9397$;

$b_{16} = 680,8945$; $b_{17} = -2.767,1051$;

$b_{18} = -972,3515$; ...

La última cifra que hemos hecho constar sugiere la siguiente relación para deducir un valor previo del argumento:

$\cos 18\phi \doteq 0$, de donde, $18\phi \doteq 4\times 360^\circ + 270^\circ$;

$\phi \doteq 95^\circ$

Esta determinación para el argumento es concordante con los signos de los b_v.

Resolución.-

$$\begin{array}{lcl} \log 2767,1051 & = & 13,442\ 0257 \\ (-)\ \log 2 & = & 0,301\ 0300 \\ (-)\ \log \cos 17\phi & = & 9,998\ 3442 \\ \hline \log \lambda^2 & = & 3,142\ 6515; \quad \log \lambda \doteq 0,18486 \end{array}$$

$$\lambda \doteq 1,5306$$

$$\lambda^2 \doteq 2,3427$$

$\cos 95^\circ = -0,08716$; $\operatorname{sen} 95^\circ = 0,99619$,

de donde,

$$z_2 = (\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)\lambda = -0,1334 + 1,5249\ i$$

$$\bar{z}_2 = -0,1334 - 1,5248\ i$$

Estamos ahora en circunstancias de conocer el tercer par de raíces de la ecuación (4-16), mediante resolución directa de la ecuación rebajada de segundo grado:

$$f_2(z) = z^2 + 2,4784z + 1,9226 = 0 \qquad \text{(4-18)}$$

en la que se tiene:

$$-2\lambda \cos \phi = 2,4784; \qquad \lambda^2 = 1,9226$$

y se deduce:

$$\cos \phi = -1,2392; \qquad \operatorname{sen} \phi = 0,6221$$

de modo que se tiene para el tercer par de raíces:

$$\left.\begin{matrix} z_3 \\ \overline{z_3} \end{matrix}\right\} = -1{,}2392 \pm 0{,}6221\ i$$

Veamos asora los resultados provenientes de un tercer ciclo de operaciones:

$$\left.\begin{matrix} z_1 \\ \overline{z_1} \end{matrix}\right\} = 1.3730 \pm 0.8526\ i$$

$$\left.\begin{matrix} z_2 \\ \overline{z_2} \end{matrix}\right\} = -0.1247 \pm 1.5287\ i$$

$$\left.\begin{matrix} z_3 \\ \overline{z_3} \end{matrix}\right\} = -1.2484 \pm 0.6284\ i$$

La ciencia es un producto de colaboración internacional a través del tiempo y del espacio. Tiene una continuidad a través de las generaciones y una continuidod entre todos los pueblos contemporáneos. La ciencia crece así por transmisión, aumento, revisión y perfeccionamiento incesante.

BERNARDO A. HOUSSAY

Premio Nobel de Medicina y Filosofía