LOTES ECONOMICOS EN CASO DE DEMANDA DETERMINISTICA

Por el Ingeniero Jorge Forcadas F.

0. INTRODUCCION

En el presente trabajo examinaremos la cantidad óptima de compra cuando el consumo, sea éste del tipo que fuere, es conocido. Supondremos el aprovisionamiento instantáneo que se produce en el momento deseado. La generalización a casos más reales no resulta difícil, especialmente cuando se tiene seguridad en la constancia del tiempo transcurrido entre la emisión del pedido y la recepción de la mercancía.

La demanda es conocida por previsión. Rigurosamente, por tanto, su "conocimiento" implica un cierto grado de inseguridad. Sin embargo, la supondremos determinada (algunos autores la llaman "determinística" [1]), cuando sus factores de variación son debidos a tendencias estables en el tiempo y previsibles, con mayor o menor exactitud, por medio de técnicas estadísticas muy conocidas.

No admitimos las llamadas rupturas de lotes, o sea la situación de que el almacén quede sin unidades, pese a persistir una demanda. Ello equivale a considerar infinito el costo que origina dicha situación.

1. ECUACION FUNDAMENTAL DE COSTOS

Los costos durante un período arbitrario de tiempo T, que se originan en una específica política de compras, pueden quedar expresados por la siguiente ecuación:

$$C_T = C_A + C_P + K \qquad (1, 1)$$

en la que:

C_T = Costo total en el período de referencia.

C_A = Costo de almacenaje. Este costo es variable en función de la cantidad comprada q. Se origina, esencialmente, de las necesidades de mantenimiento y espacio de las unidades compradas, así como de la inmovilización del capital que el almacenaje supone.

C_P = Costo de emisión de un pedido. Es importante de anotar que resulta totalmente independiente de la cantidad comprada. Por tanto resulta función exclusiva del número de veces que se produzca el pedido: n.

K = Costos fijos o, mejor expresado, aquellos que, aun siendo variables, no son afectados por nuestra decisión de comprar mayor o menor cantidad, ni un mayor o menor número de veces en el transcurso del tiempo de referencia.

Una observación antes de proseguir. No es evidente la independencia de las variables q y n, que regulan los costos C_A y C_P, respectivamente. Se puede argumentar que si compramos una mayor cantidad de materia, requeriremos hacer menos pedidos y viceversa. Sin embargo este argumento supone haber establecido "a priori", algún tipo de política de compras, o sea haber solucionado lo propuesto en base alguna hipótesis previa que nos liga q y n. Precisamente el proceso de cálculo que desarrollamos a continuación, no precisa la formulación de relaciones, no justificadas, entre las repetidas variables. Un ejemplo para abundar en lo expuesto. Los autores clásicos (por ejemplo [2]), al solucionar el problema de compra con demanda constante, establecen la siguiente relación:

$$n = \frac{Q}{q} \qquad (1,\ 2)$$

siendo:

n = número de pedidos en el período de referencia.
Q = cantidad requerida en el mismo período.
q = tamaño del lote.

El establecer esta relación, implica avanzar la solución de que todos los lotes tienen igual tamaño y que el período de tiempo entre un aprovisionamiento y el siguiente es constante. Ello es cierto en el óptimo y para el caso particular de demanda constante, pero resulta evidente que este supuesto previo quita generalidad y fuerza a la demostración posterior. En definitiva, esto tendría que ser un resultado (tan esperado como se quiera), pero no un punto de partida para el planteamiento del problema.

Después de aclarar estos conceptos, sigamos examinando la ecuación (1, 1). Nuestro propósito es minimizar C_T, por lo que procederemos de la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial C_T}{\partial q} &= C'_A \\ \frac{\partial C_T}{\partial n} &= C'_P \end{aligned}\right\} \qquad (1,3)$$

Convencionalmente llamamos C'_A a la derivada parcial de la función de costos respecto a q y que, por lo dicho anteriormente, sólo afectará al sumando C_A. Asimismo de forma convencional llamamos C'_P a la derivada parcial de los costos respecto a n que afectará tan sólo a C_P. Al ser C_T una función creciente no tendrá un máximo definido y su mínimo se producirá cuando:

$$\left.\begin{aligned} C'_A &= 0 \\ C'_P &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad C'_A = C'_P \qquad (1,4)$$

Si las funciones derivadas de C'_A y C'_P, son iguales en el mínimo, deberán serlo las funciones primitivas o, a lo más, diferir de una constante, en el mismo mínimo. En este último caso (el de diferir de una constante), ella estará incluída en la K definida en la fórmula (1, 1). Por tanto concluímos que la relación:

$$C_A = C_P \qquad (1,5)$$

minimiza el costo total.

2. DETERMINACION DE LAS CANTIDADES ALMACENADAS

La cantidad que mantenemos en almacén para un cierto instante t, será la cantidad comprada inicialmente menos lo consumido hasta este instante.

Llamemos q = f (t), la función acumulada de demanda, o sea aquella que nos da la cantidad requerida q hasta el momento t. Si en el origen de los tiempos hemos alquirido una cantidad q_1, el almacenaje en el instante t, vendrá dado por la expresión:

$$q_t = q_1 - f(t) \qquad (2,1)$$

siendo q_t la existencia en almacén en el momento t. La representación gráfica de la ecuación (2, 1), origina los clásicos gráficos que se estudian en lotes económicos. En la figura 1 observamos una de estas representaciones. Por $t_1, t_2, \ldots$, entendemos tiempo transcurrido entre un aprovisionamiento y el siguiente. Por q_1, q_2, ..., las cantidades que ingresan en almacén al empezar cada uno de los períodos. En la misma figura vemos que al terminar el primer período, todavía existen unidades en el almacén, en cambio las unidades se han agotado antes de terminarse el segundo período. El caso que se presenta en el segundo período, no puede darse en el problema que estudiamos por las limitaciones de su planteamiento hecho en la Introducción. El caso del primer período plantearía la necesidad práctica de establecer los llamados "lotes de seguridad" (ver por ejemplo [3]). Sin embargo, cuando se parte del supuesto de demanda conocida, no hay ninguna razón teórica que justifique un lote de seguridad ya que sabemos exactamente el momento en que se agotarán las existencias y nuestro aprovisionamiento es instantáneo (nos remitimos de nuevo a la Introducción). Debido a ello, en el caso específico en que nos desenvolvemos, la representación gráfica exacta adoptará la forma de la figura 2. Pese a lo expuesto, el fijar un lote de seguridad que guardara una relación adecuada con la exactitud estimada de nuestras previsiones, no supondría dificultad alguna y no afectaría sustancialmente el desarrollo de lo que sigue. Significaría, apenas, un desplazamiento de las gráficas hacia arriba o, lo que es equivalente, un descenso del eje de abscisas.

Teniendo a la vista la figura 2, establezcamos los almacenajes promedios por unidad de tiempo.

Llamando $\overline{q_i}$, al almacenaje promedio por unidad de tiempo en el período i, se establece:

Período 1.

$$\overline{q_1} = \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1}\left[q_1 - f(t)\right]dt = \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1}\left[f(t_1) - f(t)\right]dt$$

$$= f(t_1) - \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} f(t)\,dt \qquad (2,2a)$$

Período 2.

$$\bar{q}_2 = \frac{1}{t_2} \int_{t_1}^{t_1+t_2} \left[q_2 - f(t - t_1) \right] dt$$

$$= \frac{1}{t_2} \int_{t_1}^{t_1+t_2} \left[f(t_1 + t_2) - f(t_1) - f(t - t_1) \right] dt$$

$$= f(t_1 + t_2) - f(t_1) - \frac{1}{t_2} \int_{t_1}^{t_1+t_2} f(t - t_1)\, dt \qquad (2,2b)$$

Período n-ésimo.

$$\bar{q}_n = f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) - f\left(\sum_{j=1}^{n-1} t_j\right) - \frac{1}{t_n} \int_{\sum_{j=1}^{n-1} t_j}^{\sum_{i=1}^{n} t_i} f\left(t - \sum_{j=1}^{n-1} t_j\right) dt \qquad (2,2)$$

3. CALCULO DEL LOTE ECONOMICO

Llamemos:

c_1 = Costo del almacenaje de una unidad de mercancía durante una unidad de tiempo. Dimensionalmente será: \$/unidad de tiempo-unidad de mercancía.

c_2 = Costo de la emisión de un pedido en \$/pedido.

Consideremos ahora los costos marginales para cada período, o sea aquellos costos afectados por la decisión de compra. Se trata pues, de los sumandos C_A y C_P de la ecuación (1, 1).

Es evidente que el no tener en cuenta los costos fijos K (tal como han sido definidos), no afectará la optimización. Llamemos S_i al costo marginal del período i. Tendremos:

Período 1.

$$S_1 = \left[f(t_1) - \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} f(t)\, dt \right] c_1 t_1 + c_2 =$$

$$= \left[t_1 f(t_1) - \int_0^{t_1} f(t)\, dt \right] c_1 + c_2 \qquad (3,1a)$$

Período 2.

$$S_2 = \left[f(t_1 + t_2) - f(t_1) - \frac{1}{t_2} \int_{t_1}^{t_1+t_2} f(t - t_1)\, dt \right] c_1 t_2 + c_2 =$$

$$= \left[t_2 f(t_1 + t_2) - t_2 f(t_1) - \int_{t_1}^{t_1+t_2} f(t - t_1)\, dt \right] c_1 + c_2 \qquad (3,1b)$$

Período n-ésimo.

$$S_n = \left[f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) - f\left(\sum_{j=1}^{n-1} t_j\right) - \frac{1}{t_n} \int_{\sum_{j=1}^{n-1} t_j}^{\sum_{i=1}^{n} t_i} f\left(t - \sum_{j=1}^{n-1} t_j\right) dt \right] t_n c_1 + c_2$$

$$= \left[t_n f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) - t_n f\left(\sum_{j=1}^{n-1} t_j\right) - \int_{\sum_{j=1}^{n-1} t_j}^{\sum_{i=1}^{n} t_i} f\left(t - \sum_{j=1}^{n-1} t_j\right) dt \right] c_1 + c_2 \qquad (3,1)$$

Para cada período los costos están calculados en base al almacenaje promedio determinado en las fórmulas (2, 2), por su costo de almacenaje unitario y por el tiempo que permanecen en el almacén. Naturalmente a este primer costo debe añadírsele el producido por la emisión del pedido que es constante para todos los períodos.

Los costos calculados se minimizarán, según lo establecido en la relación (1,5) cuando el valor del almacenaje iguale al de emisión del pedido. Por tanto, tenemos que en el mínimo se produce:

$$S_{min\,1} = S_{min\,2} = S_{min\,3} = \cdots = S_{min\,n} = 2c_2$$

y de aquí deducimos que los tiempos para cada período, que minimizarán los costos, se obtienen resolviendo las ecuaciones siguientes:

$$t_1 f(t_1) - \int_0^{t_1} f(t)\, dt = \frac{c_2}{c_1} \qquad (3,2a)$$

$$t_2 f(t_1 + t_2) - t_2 f(t_1) - \int_{t_1}^{t_1+t_2} f(t - t_1)\, dt = \frac{c_2}{c_1} \qquad (3,2b)$$

$$\vdots$$

$$t_n f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) - t_n f\left(\sum_{j=1}^{n-1} t_j\right) - \int_{\sum_{j=1}^{n-1} t_j}^{\sum_{i=1}^{n} t_i} f\left(t - \sum_{j=1}^{n-1} t_j\right) dt = \frac{c_2}{c_1} \qquad (3,2)$$

Observemos que las soluciones se obtienen de forma escalonada. En efecto, (3, 2a) está exclusivamente en función de t_1. Una vez solucionada esta y determinado t_1, la ecuación (3, 2b) queda sólo en función de t_2 y así sucesivamente, de manera iterativa hallamos los diferentes períodos que optimizan los costos analizados.

Evidentemente, los lotes económicos de compra quedan automáticamente determinados al estarlo los períodos correspondientes. Ellos vendrán expresados por:

$$q_1 = f(t_1) \qquad (3,3a)$$

$$q_2 = f(t_1 + t_2) - f(t_1) \qquad (3,3b)$$

$$\vdots$$

$$q_n = f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) - f\left(\sum_{j=1}^{n-1} t_j\right) \qquad (3,3)$$

4. SOLUCION DE LOS CASOS COMUNES

Examinemos el caso de demanda constante. La demanda acumulada estará dada por la expresión:

$$q = kt \tag{4, 1}$$

Significando la constante de proporcionalidad k, la cantidad requerida por unidad de tiempo. Si en este caso aplicamos las ecuaciones (3, 2) tenemos:

Período 1.

$$t_1 k t_1 - \int_0^{t_1} k t\, dt = \frac{c_2}{c_1}$$

$$k t_1^2 - \frac{k t_1^2}{2} = \frac{c_2}{c_1} \quad ; \quad t_1 = \sqrt{\frac{2 c_2}{c_1 k}}$$

y el lote económico de compra:

$$q_1 = k t_1 = \sqrt{\frac{2 c_2 k}{c_1}} \tag{4, 2}$$

Período 2.

$$t_2 k (t_1 + t_2) - t_2 k t_1 - \int_{t_1}^{t_1 + t_2} k (t - t_1)\, dt = \frac{c_2}{c_1}$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2 c_2}{c_1 k}}$$

$$q_2 = k (t_1 + t_2) - k t_1 = k t_2 = \sqrt{\frac{2 c_2 k}{c_1}}$$

Como era de esperar los lotes de compra son todos iguales, así como los períodos de aprovisionamiento. La expresión (4, 2), coincide con la clásica fórmula llamada de Wilson o de Harris (Ver [1] o [4]).

Intentar hallar generalizaciones para otras funciones de demanda que tuvieran una expresión algebraica mas o menos manejable (un polinomio, por ejemplo), no tiene prácticamente objeto. Los casos reales se circunscriben al descrito, o bien resultan, en general, demasiado complejos para poder ser expresados por relaciones simples. Casi siempre nos debemos enfrentar con previsiones de demanda cuyo aspecto, al menos a primera vista, resulta muy irregular. Hay que recurrir a las series de Fourier si se desea un ajuste analítico del fenómeno. La abundante bibliografía al respecto (ver [5] o [6], por ejemplo), proporciona soluciones cómodas especialmente en los casos en que el período de referencia se divide discretamente en 6, 12 ó 24 partes. Generalmente ello nos basta en la práctica si, por ejemplo, t lo expresamos en meses y estamos efectuando previsiones para un año.

El tener funciones de demanda acumulada, que serán sumatorias de series de Fourier hasta un cierto armónico, supondrá un fatigoso tratamiento analítico, si intentamos solucionar las ecuaciones que se plantean con (3, 2). Debido a ello, resultan especialmente sugestivos aquellos métodos gráficos que nos conduzcan a una solución.

5. SISTEMA GRAFICO PARA LA DETERMINACION DEL LOTE ECONOMICO

Vamos a establecer un procedimiento gráfico para resolver la ecuación (3, 2a). Posteriormente veremos que en los demás casos se reducen al primero con un adecuado cambio en el origen de coordenadas.

Hacemos referencia a la figura 3, donde la curva OQ es la de demanda acumulada. Ot es el eje de tiempos y Oq el de cantidades o unidades. El mecanismo de construcción gráfica es el siguiente:

1) Sobre el eje de abscisas se elige un punto cualquiera P, que llamaremos polo y por él levantamos una perpendicular PP', eje polar. La escogencia de P es arbitraria. Sin embargo, por razones de escalas, a las que luego aludiremos, es muy cómodo tomar $\overline{OP} = 1$, o sea unitario y en el sentido positivo del eje de abscisas. En todo lo que sigue se supondrá elegido P bajo esta premisa.

2) En el eje de ordenadas marcamos un punto C, tal que $\overline{OC} = c_2/c_1$. La anterior igualdad, evidentemente, no puede cumplirse dimensionalmente, pero si el polo elegido ha sido unitario se cumple una igualdad numérica que nos basta en nuestro caso.

3) Por C trazamos la recta paralela al eje de abscisas CC'

4) Dividimos la curva OQ en un número arbitrario de partes: Oa', a'b', b'c', . . ., y los extremos de cada una de ellas los proyectamos al eje de abscisas. Las proyecciones son: de a' a a, de b' a b, etc. Estas partes son también de escogencia arbitraria, si bien debe procurarse que cada arco de curva determinado por la división, pueda equipararse a una recta sin error muy sensible. Huelga decir que como más divisiones consideremos, más exactitud tendremos en la construcción.

5) Se ubican en el eje de abscisas los puntos a'', b'', c'', . . ., centrales de los respectivos segmentos en que se encuentran, o sean respectivamente a $\overline{Oa}$, $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, etc. Por los puntos así determinados se levantan perpendiculares que cortan a la curva OQ en α, β, γ, . .

6) Los puntos α, β, γ, . . ., se proyectan en el eje de ordenadas y en el eje polar. Dichas proyecciones son, respectivamente α' y α'' para α; β' y β'' para β, etc.

7) Se traza la recta que une el polo P con α'

8) Por O se traza la paralela a $\overline{P\alpha'}$ hasta que corte la recta $\overline{a'a}$, cosa que sucede en el punto a'''. Esta recta, asimismo, corta a la $a''\alpha$ en el punto α_1.

9) Se une O con α''.

10) La recta $\overline{O\alpha''}$ corta a la $\overline{\alpha a''}$ en el punto α_2.

11) Con abertura de compás igual a la distancia $\overline{\alpha_2 a''}$, se traza arco con centro en α_1. La intersección del arco (entendiéndose que el sentido centro-intersección, debe ser el positivo de las ordenadas) con la recta α a'' nos determina el punto A, terminando aquí el proceso para la primera división considerada.

12) Se traza la recta que une el polo P con β'.

13) Por a''' se traza la paralela a $\overline{P\beta'}$ hasta que corte a $\overline{b'b}$. cosa que sucele en el punto b'''. Esta recta corta a la βb'' en el punto β_1.

14) Se une O con β''.

15) La recta $\overline{O\beta''}$ corta a la $\overline{\beta b''}$ en el punto β_2.

16) Con abertura de compás igual a la distancia $\overline{\beta_2 b''}$ se traza arco con centro en β_1. La intersección del arco (con la misma observación que en el numeral 11) con la recta $\overline{\beta b''}$ nos determina

el punto B, terminando el proceso para la segunda división considerada.

17) Se procede iterativamente según lo expuesto en los numerales de 7 a 11 ambos inclusive y de 12 a 16 asimismo ambos inclusive, determinando, de esta manera una sucesión de puntos A, B, C. D. . . .,cuyo lugar geométrico es la curva OT.

18) La intersección de OT con la recta $\overline{CC'}$ que se produce en el punto T define la solución del problema en su primera parte. La proyección de T en el eje de abscisas nos indica t primera solución buscada.

19) La intersección de Tt_1 con la curva OQ, es el punto O_1. La proyección de este punto en el eje de ordenadas es q_1, lote económico.

20) Se trazan nuevos ejes coordenados, paralelos a los anteriores, pero con origen en O_1.

21) Se repite todo el proceso anterior del numeral 1 al 20, ambos inclusive, pero con los nuevos ejes coordenados. Se obtiene así las soluciones para el segundo período t_2 y q_2.

22) Se procede iterativamente según lo expresado en 21, para hallar t_3 q_3, . . ., t_n q_n, hasta agotar la curva OQ.

El procedimiento mecánico descrito es fácilmente comprensible. La poligonal Oa''' b''' c''' . . ., es la representación aproximada de:

$$-\int_0^t f(t)\, dt$$

El trazado de dicha poligonal es el clásico descrito en integración gráfica (ver por ejemplo [7]). Sin embargo, el hecho de tomar el polo en el sentido positivo del eje de abscisas, que resulta negativo como distancia polar, confiere a la solución el signo negativo que antes anotábamos.

Por otra parte, los puntos $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, . . ., son el lugar geométrico de una curva (no trazada en aras a la mayor claridad de la construcción), que nos representa:

t f (t)

También resulta este un cálculo gráfico muy común, para el cual existe numerosa bibliografía (véase [8]).

Finalmente la localización de A, B, C, . . ., resulta de la adición de las dos expresiones anteriores, o sea que el lugar geométrico de estos puntos representa:

$$t f(t) - \int_0^t f(t)\, dt$$

igual al primer miembro de la ecuación (3, 2a). Debido a ello cuando la curva OT adquiere el valor c_2/c_1, lo que es equivalente a decir, cuando OT corta a CC'; se cumple la igualdad de (3, 2a) y el punto resultante nos proporciona la solución deseada.

Observación importante resulta el hacer hincapié en la elección de la distancia polar. La integración y el producto gráfico nos proporcionan, respectivamente los siguientes resultados:

$$\frac{\int_0^t f(t)\, dt}{H_1}$$

$$\frac{t\, f(t)}{H_2}$$

Siendo H_1 y H_2, las respectivas distancias polares. En la solución que proponemos, se establece que $H_1 = -1$ y que $H_2 = +1$; con lo que se consiguen las siguientes ventajas:

a) La curva integral queda afectada de signo negativo, lo que nos interesa, además de proporcionar más claridad a la figura.

b) El eje polar del producto, pasa por el polo de integración. Proporciona sencillez y claridad.

c) Numéricamente, los valores de la función que se nos genera pueden leerse directamente sobre el eje de ordenadas, si bien hay que recordar que el valor leído tendrá unas dimensiones distintas de las que expresa la escala (que son unidades de mercancía). Ello nos permite representar c_2/c_1, en su valor absoluto sin mayor problema. en el eje de ordenadas.

d) Como consecuencia de lo anterior, los valores de la integral y de la función producto son directamente aditivos.

Es evidente que otras elecciones de polo y eje polar, serían posibles, si bien complicarían bastante la construcción y debería atenderse la cuestión de escalas de manera muy especial.

Por último observemos que la construcción es iterativa con el cambio de ejes coordenados que se indica en el numeral 20. En efecto, tomemos, por ejemplo la expresión (3, 2b), correspondiente al segundo período:

$$t_2 \left[f(t_1 + t_2) - f(t_1) \right] - \int_{t_1}^{t_1+t_2} f(t - t_1)\, dt = \frac{c_2}{c_1}$$

La expresión primera entre corchetes, equivale a un desplazamiento $f(t_1) = q_1$, en el sentido positivo del eje de ordenadas. La integral definida, equivale a una traslación t_1 en el eje de abscisas y, por tanto equivalente a otra integral, respecto los nuevos ejes entre O y t_2. En definitiva las traslaciones que efectuamos gráficamente.

Para los restantes períodos el razonamiento es totalmente análogo.

6. EJEMPLO

Para ilustrar el sistema anterior con un ejemplo concreto, consideremos el caso de una industria que consumirá durante el próximo año un millón de unidades de determinado artículo. Supongamos, asimismo, que el costo de emisión de un pedido es de veinte mil pesos y que mantener una pieza almacenada durante un año supone un costo de dos pesos cincuenta y seis centavos.

Si consideramos que la demanda es constante, la función acumulada de la misma será:

$$q = \frac{10^6}{12} t \qquad \text{(t expresado en meses)}$$

$c_1 = \$ \ 2{,}56$/unidad-año.

$c_2 = \$ \ 20.000$/pedido.

Aplicando la fórmula de Wilson (4, 2):

$$q_1 = \sqrt{\frac{2 \times 20.000 \times 10^6/12}{2{,}56/12}} = 125.000 \text{ Unidades}$$

$$t_1 = \frac{125.000 \times 12}{10^6} = 1{,}5 \text{ meses}$$

Ya sabemos que todos los lotes son de igual tamaño y los períodos del mismo tiempo.

Consideremos ahora que la previsión ha ido más allá de fijar globalmente un consumo anual. Debido a unas características estacionales bien previsibles, esta empresa ha confeccionado un programa de necesidades por mes, expresado en la tabla I.

TABLA I

MES	DEMANDA	DEMANDA ACUMULADA
Enero	151.600	151.600
Febrero	186.600	338.200
Marzo	158.400	496.600
Abril	94.600	591.200
Mayo	47.700	638.900
Junio	45.900	684.800
Julio	69.500	754.300
Agosto	76.600	830.900
Septiembre	50.100	881.000
Octubre	17.000	898.000
Noviembre	22.000	920.000
Diciembre	80.000	1.000.000

Empleando los procedimientos de ajuste que se mencionaron con anterioridad y aproximando hasta el segundo armónico, la demanda prevista por la tabla anterior se puede expresar como:

$$q_m = 83.154 + 38.795 \operatorname{sen}(t-1)\frac{\pi}{6}$$

$$+ 40.164 \operatorname{sen}(t-1)\frac{\pi}{3} + 41.077 \cos(t-1)\frac{\pi}{6}$$

$$+ 27.385 \cos(t-1)\frac{\pi}{3}$$

para $t = 1, 2, 3 \ldots, 12$ meses

Para encontrar la función de demanda acumulada, debe sumarse la expresión anterior desde uno a t.

$$q = \sum_{i=1}^{t} \left[83.154 + 38.795 \operatorname{sen} (t_i - 1) \frac{\pi}{6} \right.$$

$$+ 40.164 \operatorname{sen} (t_i - 1) \frac{\pi}{3} + 41.077 \cos (t_i - 1) \frac{\pi}{6}$$

$$\left. + 27.385 \cos (t_i - 1) \frac{\pi}{3} \right]$$

La suma de series trigonométricas viene dada por las útiles expresiones:

$$\sum_{n=1}^{n} \operatorname{sen} n\theta = \operatorname{sen} \frac{(n+1)}{2} \theta \operatorname{sen} n \frac{\theta}{2} \operatorname{cosec} \frac{\theta}{2} \qquad (6,1)$$

$$\sum_{n=1}^{n} \cos n\theta = \cos \frac{(n+1)}{2} \theta \operatorname{sen} n \frac{\theta}{2} \operatorname{cosec} \frac{\theta}{2} \qquad (6,2)$$

relaciones deducidas en [9] y citadas por [10]. Estos productos, además, pueden transformarse con facilidad en sumas o diferencias de senos y cosenos.

En el ejemplo que nos ocupa, la sumatoria será, aplicando (6, 1) y (6, 2):

$$q = f(t) = 83{,}154\, t + \left(3{,}86368 \cdot \operatorname{sen} (t-1) \frac{\pi}{12}\right) \cdot$$

$$\left[41.077 \cos t \frac{\pi}{12} + 38.795 \operatorname{sen} t \frac{\pi}{12} \right] +$$

$$\left(2 \operatorname{sen} (t \quad 1) \frac{\pi}{6}\right) \cdot \left[27.385 \cos t \frac{\pi}{6} + 40.164 \operatorname{sen} t \frac{\pi}{6} \right]$$

$$+ 68.461 \qquad (0 \leq t \leq 12)$$

La anterior sería la función que debería integrarse entre cero y t_1, para, posteriormente establecer la tan repetida relación (3, 2a):

$$t_1 f(t_1) - \int_0^{t_1} f(t)\, dt = \frac{e_2}{e_1}$$

y una vez determinado t_1 seguir iterativamente. Sin necesidad de continuar por este camino, es perfectamente notorio lo engorroso que resulta el tratamiento analítico del problema.

Vamos a resolverlo por el sistema gráfico. Obsérvese la solución en la figura 4. En ella OQ es la curva de demanda acumulada. Huelga aclarar que no hay ninguna necesidad de calcular la función analítica que la caracteriza, la curva se construye directamente por puntos a partir de los datos de la tabla I. Las curvas AA', BB' CC', ..., son las funciones (3, 2) halladas gráficamente según el procedimiento explicado en el numeral anterior. Las rectas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, son las relaciones c_2/c_1 referidas a cada origen de coordenadas que se está considerando. En nuestro ejemplo, el valor de esta razón es:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{20.000}{2,56/12} = 93.750$$

según los datos proporcionados más arriba. Naturalmente, el costo de almacenaje ($ 2,56) se nos da como dato pero referido al mantenimiento anual de la unidad de mercancía. Debido a ello, lo dividimos por 12 para que quede referido al mes, unidad de tiempo que hemos adoptado en nuestra solución.

Los puntos 1, 2, 3,..., 7, del gráfico son las intersecciones que nos proporcionan las soluciones buscadas y, a la vez, indican el nuevo origen de coordenadas: 0_1, 0_2, ..., 0_7

La solución total del problema, leída sobre el gráfico, queda resumida en la tabla II.

TABLA II

Período Nº	Tiempo en meses al origen	Tiempo en meses parcial	Cantidad de compra en miles u.	Cantidad acumulada en miles de uni.
1	1,10	1,10	168	168
2	2,13	1,03	196	364
3	3,38	2,25	168	532
4	5,45	2,07	120	652
5	7,07	1,62	114	766
6	8,93	1,86	108	874
7	11,40	2,47	60	934

El costo marginal total de esta solución será:

$C_{t.} = 2\ c_2\ n = 2 \times 20.000 \times 7 = \$\ 280.000$

De todas formas, hay que observar que este costo no es para todo el período anual programado, ya que sólo cubre 11,40 meses. El residuo de curva hay que incorporarla a la programación del año siguiente.

7. CASO DEL PRECIO VARIABLE

El precio de compra de una unidad de mercancía puede variar según la cantidad comprada. Cuatro casos teóricos pueden darse:

I) Precio decreciente en forma discreta a mayor cantidad comprada.

II) Precio creciente en forma continua a mayor cantidad comprada.

III) Precio decreciente en forma continua a mayor cantidad comprada.

IV) Precio creciente en forma discreta a mayor cantidad comprada.

Sin embargo, en la práctica, no suelen darse los casos III y IV. Pese a que la solución que propondremos es general, y cubre cualquier caso de los expuestos, haremos especial énfasis en el I y el II que son los más comunes.

El caso I, es frecuente en el comercio. Un proveedor ofrece un precio por unidad hasta una cierta cantidad de compra. A partir de esta cantidad y hasta otra determinada, ofrece un precio más económico y, de esta forma, establece un cierto número de rangos. Analíticamente esto se puede expresar mediante la siguiente función:

Cantidad	**Precio**
$0 \leq q \leq q_1$	P_1
$q_1 \leq q \leq q_2$	P_2
$\vdots$	$\vdots$
$q_{n-1} \leq q$	P_n

$$P_1 > P_2 > \cdots > P_n \qquad (7,1)$$

El caso II, se dará cuando las cantidades que se compran tienen una magnitud relativa dentro del mercado del artículo, tal que resultan suficientemente importantes como para que funcione la curva de oferta económica. O sea que si se compran cantidades altas, el mercado reacciona pidiendo más precio por la mercancía. Evidentemente esto está relacionado con el concepto de elasticidad a la oferta, totalmente análogo al de elasticidad a la demanda. Se puede definir de manera paralela:

$$E = \frac{\frac{dq}{q}}{\frac{dp}{p}} \tag{7,2}$$

o sea como variación relativa de la cantidad al precio, en un determinado punto. Suele saberse poco acerca del comportamiento de E, pero la experiencia enseña que admitir la elasticidad constante, proporciona una descripción suficientemente aceptable del fenómeno. Si partimos de esta base, la solución de la ecuación diferencial (7,2) es muy fácil y origina la siguiente importante relación.

$$q = K p^{E} \tag{7,3}$$

La elasticidad a la oferta E, es siempre una cantidad positiva (a la inversa de lo que sucede con la elasticidad a la demanda).

La circunstancia de que varíe el precio en función de la cantidad adquirida, afecta lógicamente, al costo de almacenaje c_1. Este puede considerarse como adición de varios costos. Podemos considerar, la siguiente ecuación, para los efectos de la situación que nos ocupa:

$$c_1 = c_1' + \alpha p \tag{7,4}$$

siendo:

c_1 = El costo total de almacenaje, tal como lo venimos anotantando, por unidad de mercancía y tiempo.

c'_1 = Los costos fijos de almacenaje. Estarán incluídos aquí, los costos de mantenimiento, personal de almacén, volumen ocupado por la unidad, gastos de seguro y otros generales, etc., todo referido, naturalmente, a una unidad en la unidad de tiempo.

α = Rendimiento del capital inmovilizado. Este valor estará fijado de acorde a las condiciones financieras y, en general, será producto de la situación de la oferta y la demanda existente en el mercado de capitales.

p = precio del artículo por unidad.

α p = será pues el costo del capital inmovilizado, siempre por unidad de mercancía y unidad de tiempo.

El caso I viene tratado en varios textos (por ejemplo [3] y [11]) para el cual dan solución analítica en el caso de demanda constante y considerando simplemente $c_1 = \alpha p$. El autor no conoce bibliografía en que se trate el caso II o ningún otro.

Se puede generalizar, considerando que, sea cual fuere el caso en que nos encontremos, dispondremos de una función de este tipo:

$$p = g(q) = g(f(t)) = F(t) \tag{7,5}$$

La función (7,5) será discreta, como cuando se deduzca, por ejemplo, a partir de funciones tipo (7, 1), o será continua cuando provenga de funciones tipo (7, 3).

El costo de almacenaje puede quedarnos expresado como función únicamente de t. En efecto, de (7, 4) y (7, 5):

$$C_1 = c'_1 + \alpha F(t) \tag{7,6}$$

Las ecuaciones equivalentes a las (3,2) para establecer el lote económico, en este caso quedarán:

$$t_1 f(t_1) - \int_0^{t_1} f(t)\, dt = \frac{c_L}{c'_1 + \alpha F(t_1)} \tag{7,7}$$

Conservamos las notaciones anteriores y expresamos tan sólo la ecuación para el primer período puesto que hemos visto que los otros se reducen a éste. La solución de (7, 7), nos da el óptimo de compra.

Consideremos, por ejemplo, el caso de demanda constante y de precio variando según (7, 3). En tal caso:

$$f(t) = kt$$

$$p = \frac{1}{K^{1/E}}\, q^{1/E} = \left(\frac{k}{K}\right)^{1/E} t^{1/E}$$

$$\alpha p = \alpha \left(\frac{k}{K}\right)^{1/E} t^{1/E} = \beta\, t^{1/E}$$

llamando β al factor constante $\alpha\left(\frac{k}{K}\right)^{1/E}$

La ecuación que debemos resolver será:

$$t_1\, k t_1 - \int_0^{t_1} k t \, dt = \frac{c_2}{c_1' + \beta t_1^{1/E}}$$

$$\frac{k t_1^2}{2} \left(c_1' + \beta t_1^{1/E} \right) = c_2 \qquad (7,8)$$

Despejando t_1 obtenemos el período óptimo y, por ende, el lote óptimo.

8. SOLUCION GRAFICA

Fijémonos en la ecuación que se trata de resolver (7, 7). Su primer miembro es idéntico al de las ecuaciones (3,2) y, por tanto la construcción gráfica de la función será exactamente igual que la descrita en el numeral 5. La diferencia estriba en que la solución se dará, no cuando la función anterior adquiera un valor dado por una constante (o sea intersecte con una recta paralela al eje de abscisas), sino cuando se iguale a:

$$\frac{c_2}{c_1 + \alpha F(t_1)} \qquad (8,1)$$

o sea intersecte con otra función del tiempo. Está claro que bastará construir convenientemente la curva que representa la función anterior y encontrar el punto de intersección con la curva construída según el sistema ya explicado.

En la figura 5, se muestran las soluciones para todos los casos posibles, donde ϕ(t), representa la expresión (8, 1) que reemplaza la recta paralela al eje de abscisas c_2/c_1. Los puntos de intersección T representan las soluciones buscadas y, como siempre OQ es la curva de demanda acumulada.

Para la construcción de las curvas ϕ (t) hay que comentar algunos extremos. En los casos discretos (I y IV), la cuestión no ofrece mayor dificultad. Basta hallar:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{c_2}{c_1 + \alpha p_1} & (\text{válida para } 0 \leq q \leq q_1') \\[2em] \dfrac{c_2}{c_1 + \alpha p_2} & (\text{válida para } q_1' \leq q \leq q_2') \\[2em] \cdots & \\[2em] \dfrac{c_2}{c_1 + \alpha p_n} & (\text{válida para } q_{n-1}' \leq q) \end{array}\right\} \quad (8,2)$$

donde las q_i' se han afectado de un índice superior para que no sean confundidas con las soluciones del problema. Encontrados los valores de (8, 2) que, en general, no serán muchos, ellos nos representarán rectas paralelas al eje de abscisas, formando un escalón: creciente, si el precio es decreciente con la cantidad (caso I) y decreciente si el precio es creciente con la cantidad (caso IV). Por lo demás el problema sigue los cauces ya conocidos.

Algo más complicado resulta el caso de las variaciones continuas (II y III). Se recomienda encontrar previamente una tabla de correspondencia f(t) $\longrightarrow$ ϕ(t). Con ella puede construírse una escala auxiliar móvil que se colocará paralela al eje de ordenadas. En la figura 5, casos II y III está representada con EM. Esta escala representará gráficamente el valor que adopta (8, 1) para cada valor de q, o sea de f (t). El procedimiento de construcción será pues:

1) Estamos considerando un punto A de la curva OQ, dentro de la construcción general para hallar OT.

2) Trazamos una recta paralela al eje de abscisas por A, hasta encontrar la escala auxiliar EM.

3) En EM, leemos un valor B que nos indicará ϕ(t) y que, por tanto debemos marcar en el eje de ordenadas. Este es B'.

4) La paralela al eje de abscisas por B' y la paralela al eje de ordenadas por A, se intersectan en C, siendo C, por tanto, un punto de ϕ(t).

5) De esta forma se van construyendo simultáneamente OT y

φ (t). Se seguirá en la construcción hasta hallar su punto de intersección T, que es el buscado.

6) La escala móvil se desplazará para la siguiente solución de tal forma que su origen coincida con el nuevo origen de coordenadas y se procederá de igual forma que lo expuesto en los anteriores numerales.

9. EJEMPLOS

a) Sigamos con el mismo ejemplo del numeral 6. Tenemos la distribución estacional dada por la tabla I. La variación consiste en que la empresa ha efectuado un detenido estudio de mercados al darse cuenta de que si aumentaba la cantidad de compra, provocaba un aumento en la demanda del mercado y el precio de la mercancía le subía. Decidió estudiar el fenómeno a fondo y encontró el siguiente resultado:

Si se compraban cantidades iguales o inferiores a 60.000 unidades el precio por unidad en el mercado era de $ 9.00. Si se compraban 200.000 unidades, en cambio, el precio subía hasta $ 14.00. Se consideró que la hipótesis de elasticidad constante, era suficientemente plausible, dentro los límites indicados.

El costo de emisión del pedido no varía y es, por tanto, $c_2 =$ \$ 20.000/pedido.

El costo de almacenaje sin tener en cuenta la inmovilización del capital, o sea lo que hemos referenciado antes como $c'_1 =$ \$ 1,36/unidad-año.

El rendimiento del capital inmovilizado se fija en un 12% anual, o sea $\alpha = 0{,}12$.

La función cantidad comprada-precio, se determinará de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{l} 60.000 = K\, 9^{E} \\ 200.000 = K\, 14^{E} \end{array}\right\} \qquad \frac{20}{6} = \left(\frac{14}{9}\right)^{E}$$

$$E = 2{,}725 \qquad ; \qquad K = 150{,}6$$

$$q = 150{,}6\; p^{2{,}725} \tag{9,1}$$

La elasticidad es 2,725, o sea oferta inelástica. Si de (9, 1) despejamos p, tenemos:

$$p = 0{,}159\ q^{1/2{,}725} \qquad (9 \leq p \leq 14) \qquad (9{,}2)$$

Pasemos ahora a calcular puntos de la función $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \frac{c_2}{c_1' - \dfrac{\alpha}{K^{1/E}}\, f(t)^{1/E}}$$

en nuestro caso:

$$\varphi(t) = \frac{20.000 \times 12}{0{,}12 \times 0{,}159\ q^{1/2{,}725} + 1{,}36} \qquad (9, 3)$$

Dando valores a $q = f(t)$, en la expresión (9, 3) hallamos los valores correspondientes de $\varphi(t)$, que se han tabulado en la tabla III:

TABLA III

$q = f(t)$	$\varphi\ (t)$
hasta 60.000	98.360
65.000	97.000
70.000	95.840
75.000	94.820
80.000	93.680
85.000	92.700
90.000	91.800
95.000	90.900
100.000	90.100
105.000	89.300
110.000	88.520
115.000	87.810
120.000	87.110
125.000	86.450
130.000	85.840
135.000	85.220
140.000	84.620
145.000	84.060
150.000	83.500
155.000	83.000
160.000	82.470
165.000	81.960
170.000	81.500
175.000	81.030
180.000	80.560
185.000	80.130
190.000	79.700
195.000	79.280
200.000 y más	78.900

Con estos valores construímos una escala móvil y resolvemos el problema según lo expuesto en el numeral 8.

En la figura 6, tenemos la solución para el primer período. La demanda acumulada es OQ y OT es la función ya conocida construída de la forma corriente. La escala EM es expresión gráfica de la tabla III y la curva φ (t) está trazada buscando para cada punto considerado su equivalencia en EM. El punto de intersección T, se produce en $t_1 = 1,025$ o sea un valor menor que el encontrado en el numeral 6, como era de esperarse. Corresponde a un $q_1 = 148.000$, en vez de 151.600 de la anterior solución. El precio que tendrá la mercancía al comprar la cantidad óptima será:

$$p = 0{,}159 \times 148.000^{1/2{,}725} = \$\ 12{,}48 \text{ unidad.}$$

b) Consideremos ahora que la empresa de la cual hipotéticamente nos venimos ocupando, se encuentra en otra situación. El proveedor que le suministra la mercancía del problema, le ofrece las siguientes condiciones:

Compras hasta de 80.000 unidades........$ 11 unidad
Compras de 80.000 a 100.000 unidades....$ 10 unidad
Compras de más de 100.000 unidades.....$ 9 unidad

Sin que varíen ninguna de las otras condiciones, los valores discretos que adopta $\varphi(t)$ son:

$$\varphi(t) = \frac{20.000 \times 12}{0{,}12 \times 11 + 1{,}36} = 89.600 \quad (\text{para } 0 \leq q \leq 80.000)$$

$$\varphi(t) = \frac{20.000 \times 12}{0{,}12 \times 10 + 1{,}36} = 93.750 \quad (\text{para } 80.000 \leq q \leq 100.000)$$

$$\varphi(t) = \frac{20.000 \times 12}{0{,}12 \times 9 + 1{,}36} = 98.400 \quad (\text{para } 100.000 \leq q)$$

En la figura 7 se observa la solución para el primer período en este caso. Como es lógico, la solución se encuentra para valores más altos que los anteriores. Así $t_1 = 1{,}15$ que corresponde a un $q_1 = 170.000$. y, por tanto, el precio de compra será de $ 9 unidad.

10. FINAL

Los estudios sobre la sensibilidad de las soluciones (ver [13]), indican que los costos varían poco alrededor de su mínimo, para diferencias del orden del 5% con respecto al lote económico. Teniendo en cuenta esta circunstancia, que suele olvidarse demasiado a menudo, no se justifica encontrar soluciones de una gran exactitud que requieren tratamientos analíticos fatigosos y que consumen gran tiempo de calculador electrónico. Debido a ello, las soluciones gráficas resultan especialmente adecuadas para estos problemas. Con una construcción un poco cuidadosa, no alcanzaremos, ni con mucho, errores del 5% en en nuestros resultados.

Los problemas que se resuelven en el presente trabajo, no son obviamente, un límite de aplicación del sistema. Resulta intuitivo que los sistemas gráficos tienen que proporcionar soluciones muy cómodas para los siguientes casos:

a) Cuando existen restricciones. Sean éstas de volumen almacenado, capital invertido o de otra índole. Analíticamente se suelen enfocar por procedimientos de Programación Dinámica, o por los sistemas clásicos de multiplicadores de Lagrange. Existen casos muy interesantes estudiados en [1] y problemas específicos expuestos en [12]

b) Cuando la recepción de materiales o la demanda o ambos son aleatorios, siguiendo una distribución estadística dada [2].

Resulta tema para un próximo trabajo, encontrar sistemas gráficos que cubran casos más generales. Quedamos en deuda con el paciente lector.

11. BIBLIOGRAFIA

[1] OCHOA, Juan Camilo: Notas sobre Investigación de Operaciones - Universidad Nacional de Colombia (1967).

[2] KAUFMANN, A: Métcdos y Modelos de la Investigación de Operaciones - CECSA (1965).

[3] SARDI, Paolo y BICCIOLO, Mario: Control económico de los stocks - Ed. Gestión (1962).

[4] SASIENI, YASPAN and FRIEDMAN: Operations research - Wiley and Sons (1964).

[5] AITKEN, A. C.: Estadística Matemática - Ed. Dossat s/f.

[6] OSUNA, Alfredo y URIBE, Jorge: Las series cronológicas en la gestión de empresas. - Tesis no publicada. Universidad Nacional de Colombia - Facultad de Minas (1968).

[7] MATEO DIAZ, Luis - Ampliación de Matemáticas (tomo IV) - Ediciones de la Escuela de Ingenieros Industriales de Barcelona (1948).

[8] MASSON, H.: Le Calcul Graphique a l'usage des Ingenieurs - Eyrolles (1952).

[9] LONEY, S. L.: Plane Trigonometry (Parts I and II) Cambridge University Press (1900).

[10] JOLLEY, L. B. W.: Summation of Series - Dover Publications (1961).

[11] CHACON, E. Curso de Investigación Operativa (Tomo I) - Publicaciones de la Universidad de Deusto (1968).

[12] VAZSONYI, Andrew: Scientific Programming in business and Industry - Wiley and Sons (1963).

[13] EILON, Samuel: Elements of Production Planning and Control - Macmillan (1962).

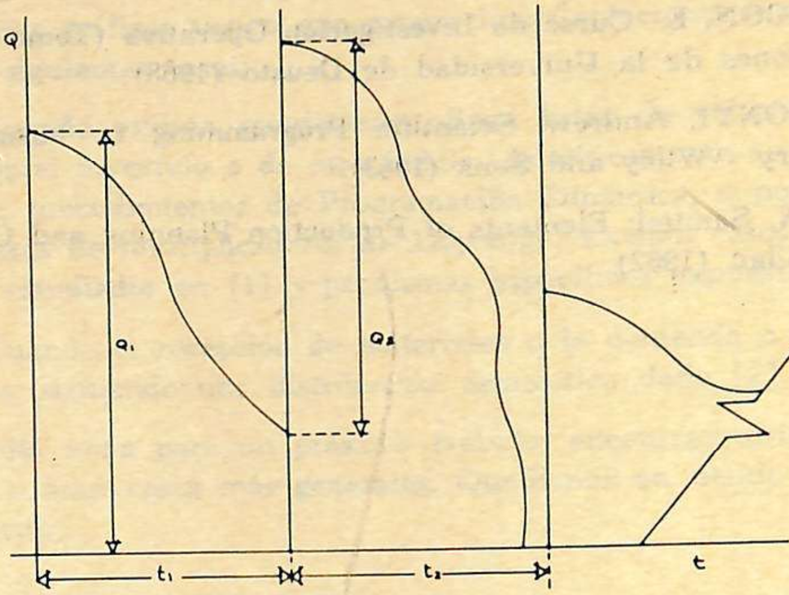

FIGURA 1

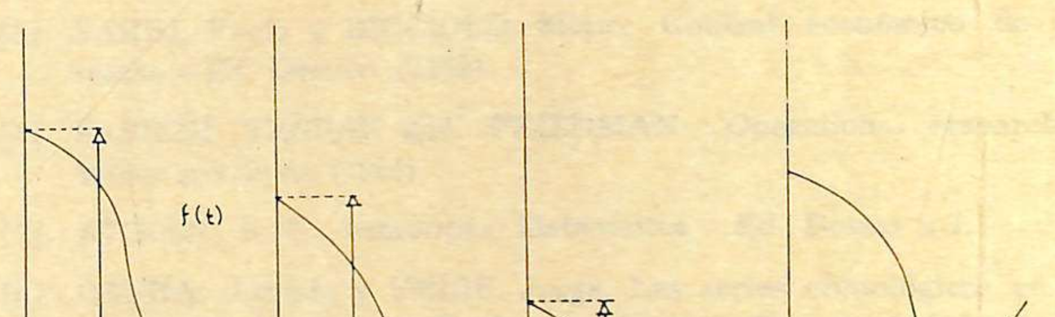

FIGURA 2

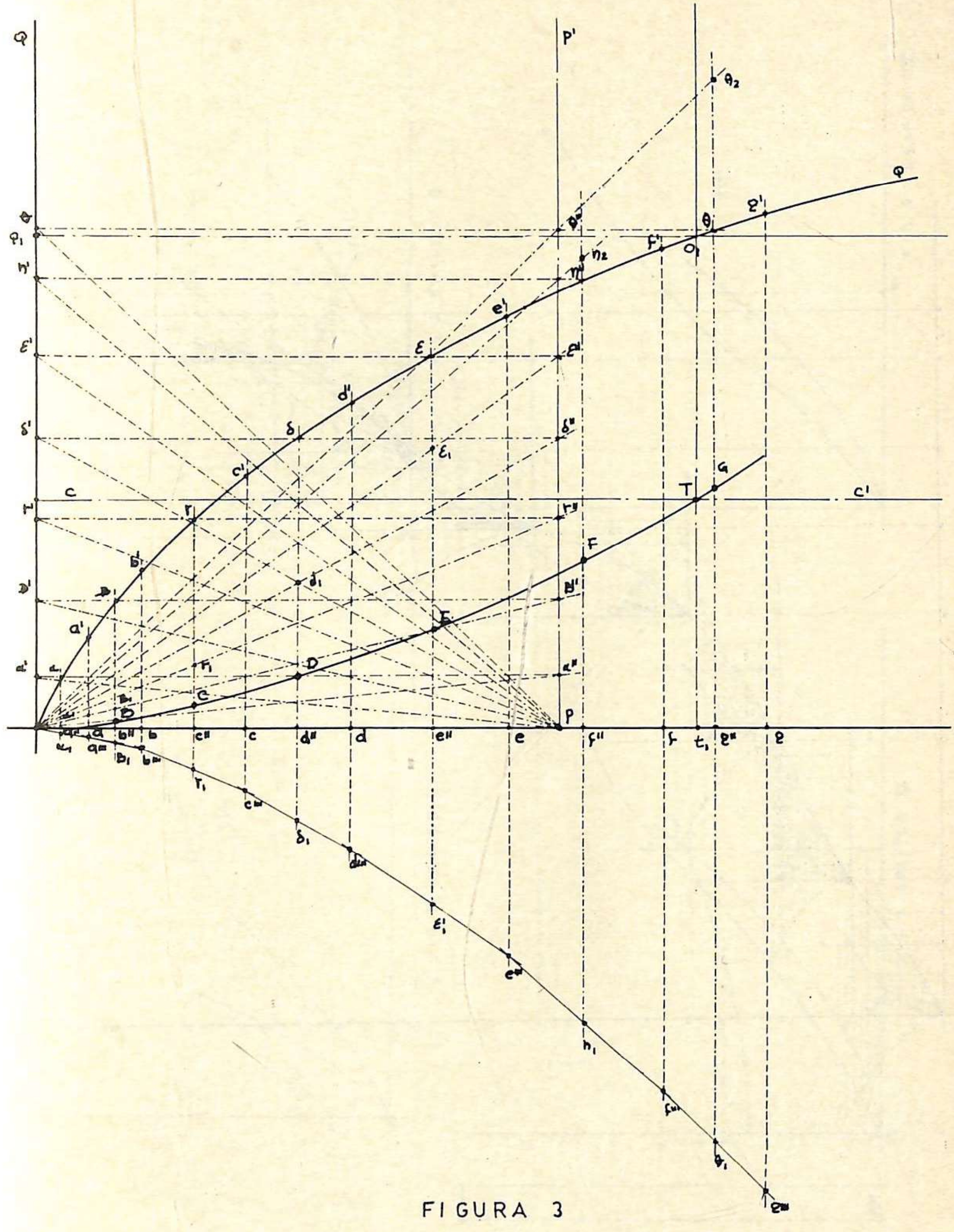

FIGURA 3

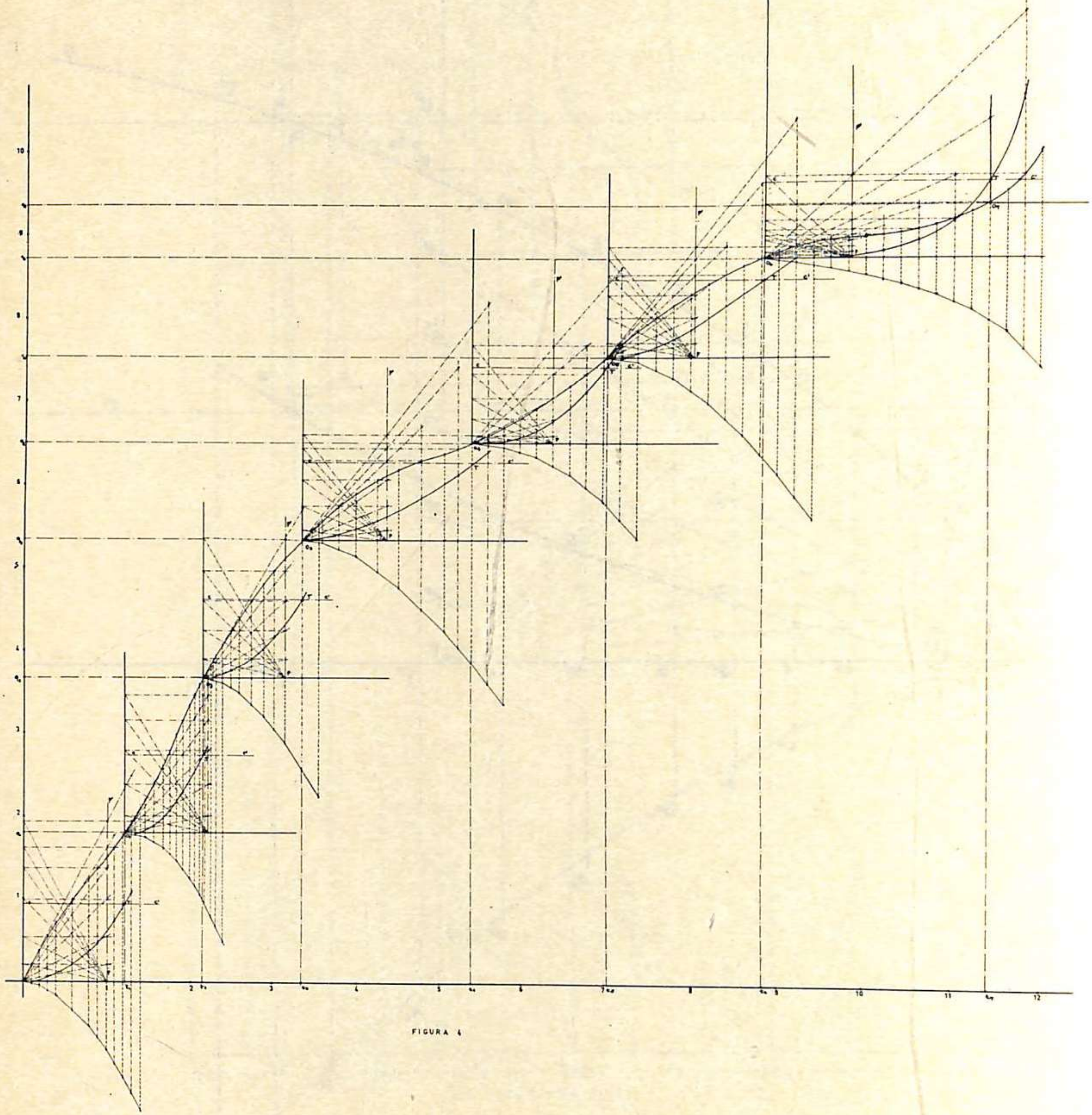

FIGURA 4

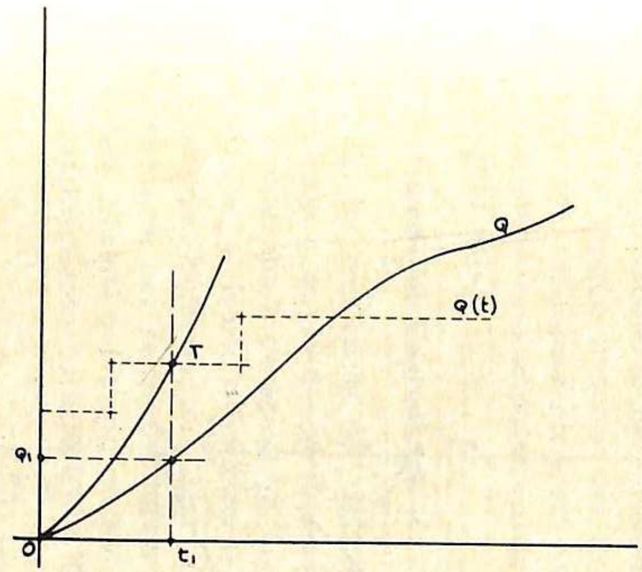

FIG. 5 GRAFICO I

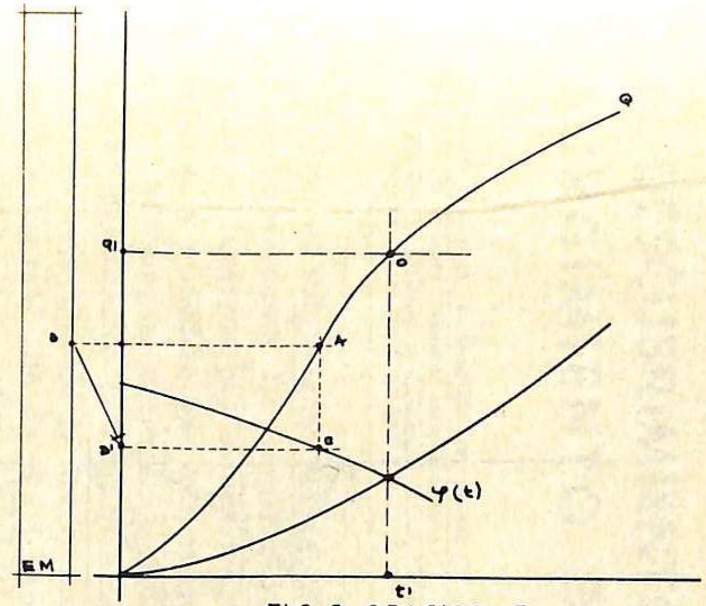

FIG 5 GRAFICO II

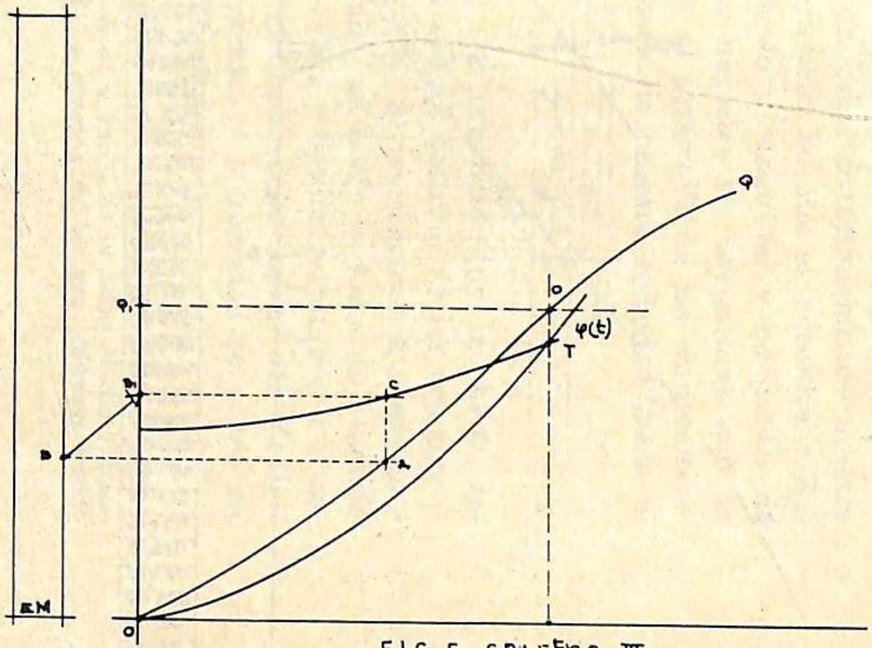

FIG 5 GRAFICO III

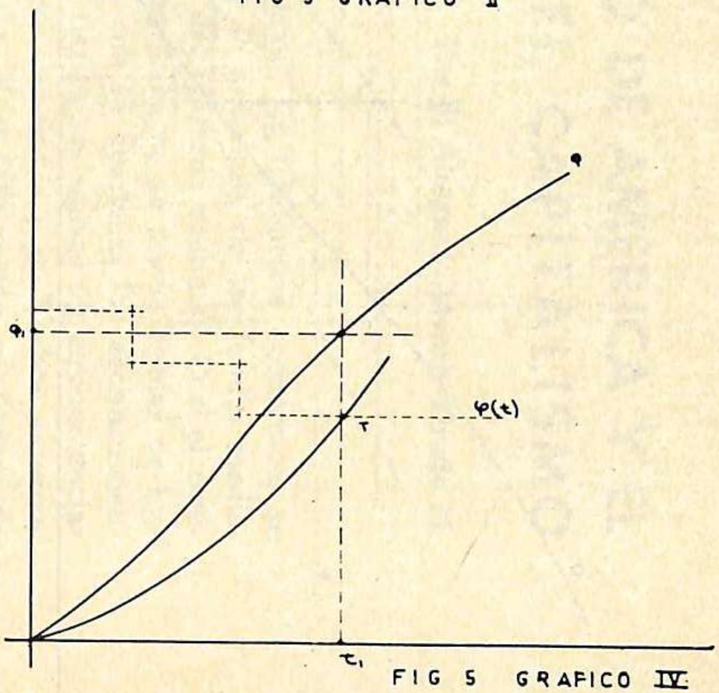

FIG 5 GRAFICO IV

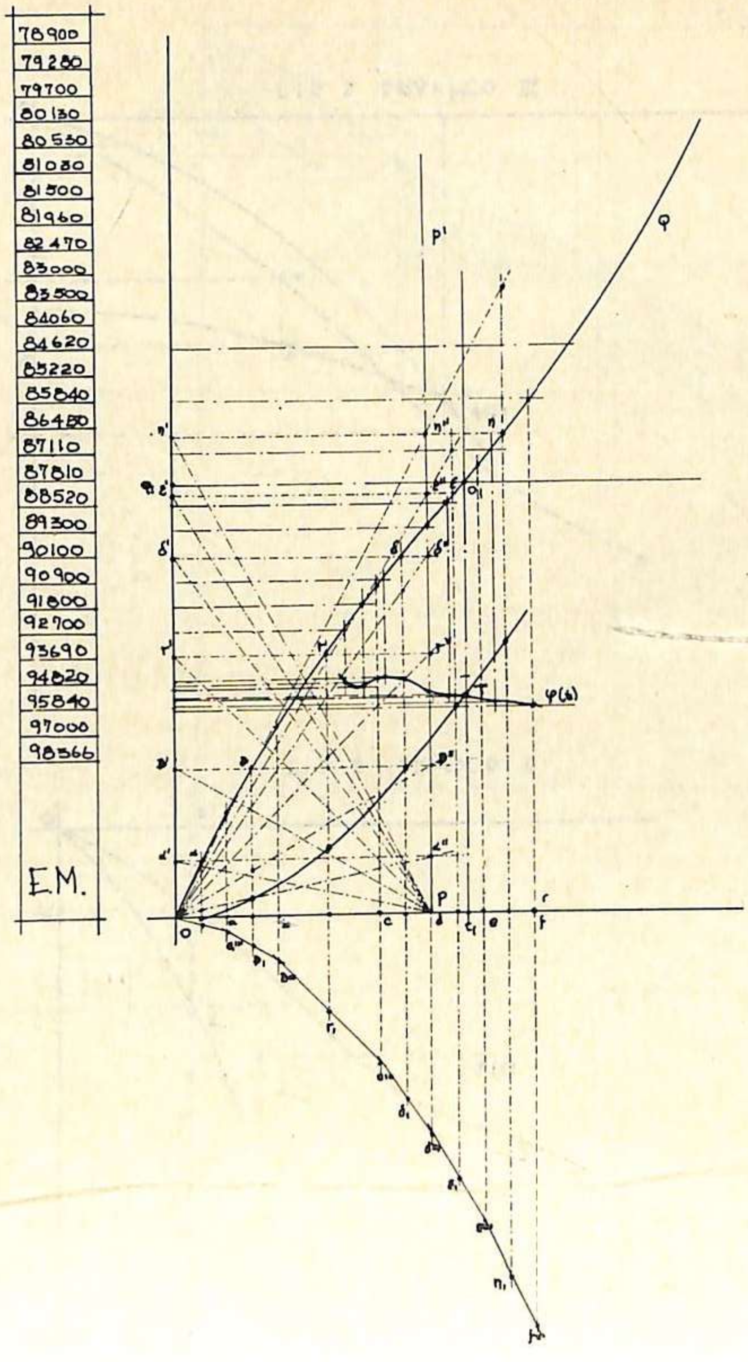

FIGURA 6

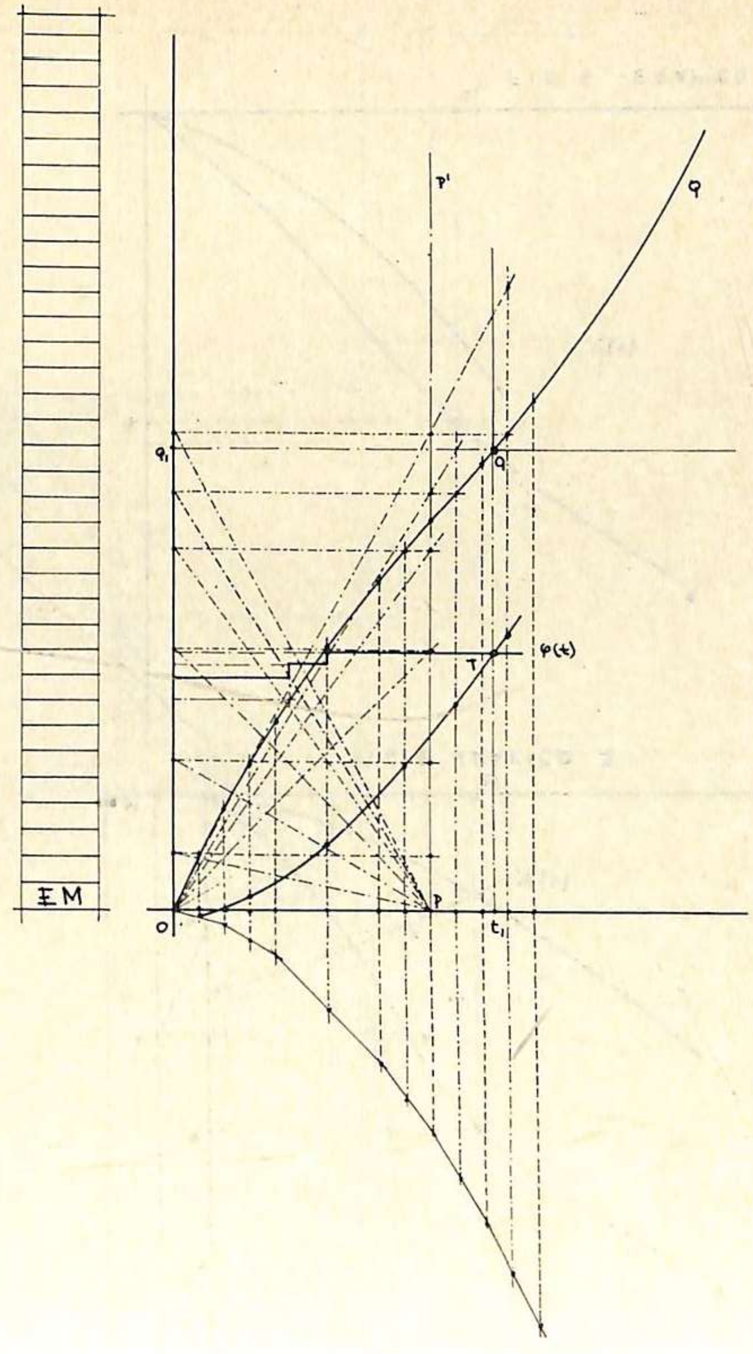

FIGURA 7