

I. - LOS FUNDAMENTOS DE LA FOTOELASTICIDAD PLANA

Por el Ingeniero GABRIEL GARCIA MORENO

INTRODUCCION

A pesar de que el fenómeno básico de la fotoelasticidad fue descubierto en el año de 1816, hecho que se atribuye a Sir David Brewster, no fue sino hasta a comienzos del actual siglo cuando se hizo la primera aplicación del fenómeno de la birrefringencia temporal al cálculo de un puente. Esta hazaña correspondió a Mesnager.

A partir de ese momento empezó un desarrollo rápido de este método del análisis experimental, y hoy en día se ha convertido en una poderosa herramienta de investigación, análisis y diseño.

Es frecuente encontrar en los problemas prácticos de diseño, en ingeniería, la necesidad de determinar con precisión la distribución de las tensiones en un cuerpo sometido a sollicitaciones estáticas o dinámicas conocidas, y adicionalmente, los valores cuantitativos de las mismas. En muchos de tales casos, el análisis matemático, a partir de la teoría de la elasticidad, basta para resolver completamente el problema; esto sucede cuando la geometría del cuerpo en cuestión se presta para el análisis. Cuando esto no sucede, entonces es preciso acudir a técnicas experimentales, las cuales se pueden dividir a "grosso modo" en: a) experiencias sobre modelos reducidos, b) experiencias directas sobre el prototipo o cuerpo en estudio. La fotoelasticidad plana pertenece al primer grupo, es decir, opera sobre modelos reducidos. Modernamente, sin embargo, se han desarrollado métodos de fotoelasticidad por reflexión (Photostress), que operan sobre el prototipo sin necesidad de fabricar modelos; pero su campo de aplicación se restringe más bien al estudio de tensiones localizadas. También existen métodos tridimensionales de fotoelasticidad, aunque todavía no se usan ampliamente.

Las principales ventajas de la fotoelasticidad son:

- a) Obtención de un panorama comprehensivo de la distribución de las tensiones en toda la pieza.

- b) Fácil medida de las tensiones en puntos locales, aun con grandes gradientes de tensión.
- c) Determinación fácil y relativamente rápida de las tensiones de un campo bidimensional.
- d) Precisión en las medidas, comparable con la de otros métodos, como por ejemplo la extensometría eléctrica, y en una forma más económica.
- e) Posibilidad de estudiar la influencia de la geometría del cuerpo en el panorama tensional del modelo, cambiando la sección o modificando las sollicitaciones, hasta conseguir el diseño más satisfactorio.

Sus desventajas son:

- a) Es un método indirecto que requiere modelos muy precisos, y datos conocidos del prototipo.
- b) El método es práctico únicamente para estados planos de tensión o planos de deformación.
- c) La separación de las tensiones principales es laboriosa. Sin embargo, esta objeción ha perdido valor con la aparición de los computadores electrónicos.
- d) El método se circunscribe prácticamente al estado elástico.

1. Nociones de Optica

La Física moderna nos enseña que la luz es una radiación electromagnética, compuesta de dos vectores normales entre sí y cuyo plano común es a la vez normal a la dirección de propagación:

$\vec{E}$ = vector eléctrico, y $\vec{H}$ = vector magnético.

Pero el ingeniero se explica mejor los fenómenos si los representa por una vibración transversal al eje de propagación, con las siguientes propiedades:

- a) La luz blanca es la suma de un número infinito de vibraciones, que pueden ser separadas por el prisma.
- b) Una luz monocromática está formada por un solo tipo de vibración.
- c) Un tipo de vibración está caracterizado por su período. Ejemplo: $1,3 \times 10^{-5}$ segs. para el violeta, $2,55 \times 10^{-5}$ segs. para el rojo. Algunos autores prefieren dar su longitud de onda.
- d) Cuando la luz pasa de un medio a otro de diferente densidad, hay un cambio en su velocidad de propagación. La razón de estas dos velocidades se llama "índice de refracción":

$$n = \text{Índice de refracción} = \frac{\text{Velocidad en 1er. medio}}{\text{Velocidad en 2º medio}} \quad (1)$$

- e) La representación matemática de un tipo de vibración se da por la ecuación (2):

$$y = a \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt + e) \quad (2)$$

donde

a = amplitud de la vibración,

λ = longitud de onda,

t = tiempo,

v = velocidad de propagación,

e = una constante.

La figura (1) representa la vibración dada por (2).

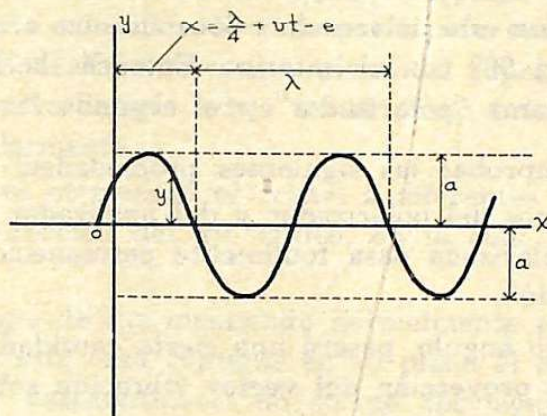


Figura (1)

Llámase período al tiempo necesario para avanzar una longitud de onda:

$$T = \frac{\lambda}{v} \quad (3)$$

y frecuencia al inverso de T :

$$f = \frac{1}{T} \quad (4)$$

$$v = \lambda f \quad (5)$$

En el caso de la luz, se acostumbra llamar a la velocidad:

$$v = C = 3 \times 10^{10} \text{ cms./seg.}$$

La ecuación (2) se acostumbra poner en una forma más simplificada, para una luz monocromática, y con $e = x = 0$:

$$y = a \cos \frac{2 \pi v}{\lambda} t = a \cos 2 \pi f. t \quad (6)$$

$$= a \cos p t \quad (6-a)$$

donde

$$p = 2 \pi f \quad (7)$$

Cuando una luz vibra en un solo plano, como la luz monocromática representada por la ecuación (6), se dice que se encuentra "polarizada" en el plano de vibración.

Físicamente se obtiene la polarización haciendo pasar un rayo de luz por un cristal que posee una dirección óptica privilegiada, llamada "eje óptico". Entonces la luz que atraviesa el cristal vibra en el plano determinado por el eje óptico y por la dirección de propagación. Se comprueba que la luz está polarizada colocando otro cristal con su respectivo eje óptico a 90° con el anterior. Entonces la luz no pasa. El primer cristal se llama "polarizador" y el segundo "analizador".

Se pueden comprobar las siguientes propiedades:

- f) Si los ejes ópticos del polarizador y del analizador se ponen paralelos, la luz polarizada pasa totalmente permaneciendo en el plano de polarización.
- g) Si forman cierto ángulo, pasará una cierta cantidad de luz, la cual se mide por la proyección del vector vibración sobre la dirección del eje óptico del analizador.

2. La Birrefrigencia

Este fenómeno es la base de la fotoelasticidad. Un cuerpo birrefringente posee las propiedades siguientes:

- a) Posee dos índices de refracción, n_1 y n_2 , llamados índice ordinario e índice extraordinario, que dan origen a dos rayos polarizados y llamados respectivamente con los mismos nombres. Las velocidades de los rayos en las dos direcciones son diferentes, saliendo un rayo en desfase con respecto al otro. En la figura (2) representamos el cristal del Espato de Islandia.

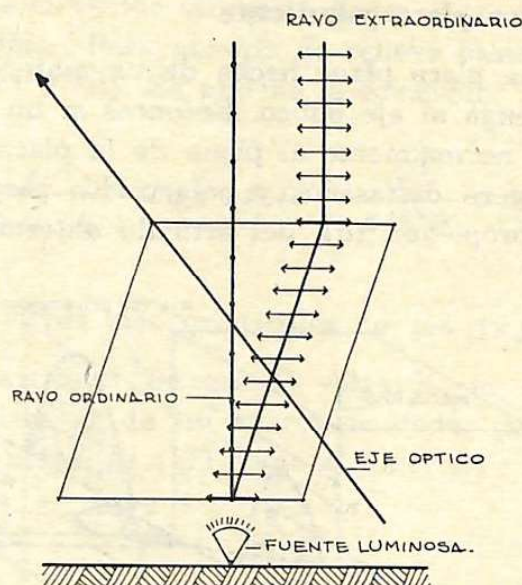


Figura (2)

- b) Los dos rayos salidos del espato se hallan polarizados perpendicularmente: el ordinario vibra en el plano normal al plano del papel; el extraordinario en este plano. El plano que contiene al eje óptico y a la normal a la cara por donde entra la luz, se llama plano principal. En este caso el plano del papel. Tenemós pues que el rayo extraordinario vibra en el plano principal. El ordinario, perpendicularmente.
- c) Los dos rayos atraviesan el cristal a diferentes velocidades, excepto en la dirección del eje óptico, en la cual las velocidades son iguales.
- d) Para un rayo de luz incidiendo normalmente a una cara del cristal, cuando esta cara contiene en su plano al eje óptico, los rayos ordinario y extraordinario no sufren desviación; emergen con el mismo alineamiento, pero el extraordinario sale adelante. El retardamiento (R) entre los dos rayos está dado por:

$$R = K \frac{h}{\lambda} \quad (8)$$

h = espesor del cristal

donde (K) es una constante, (R) es un número sin unidades, y representa valores de longitudes enteras de onda. La ecuación (8) se aplica únicamente para luz monocromática.

- e) Las propiedades ópticas y físicas en los planos normales al eje óptico son las mismas en todas las direcciones, pero diferentes en la dirección de aquél.

3. Efectos de una placa polarizante

Tomemos una placa plana hecha de un material birrefringente, y cuyo plano contenga al eje óptico. Entonces si un rayo de luz monocromática incide normalmente al plano de la placa, los dos rayos saldrán alineados, pero desfasados y polarizados perpendicularmente de acuerdo con la propiedad (d), del artículo anterior. (Fig 3).

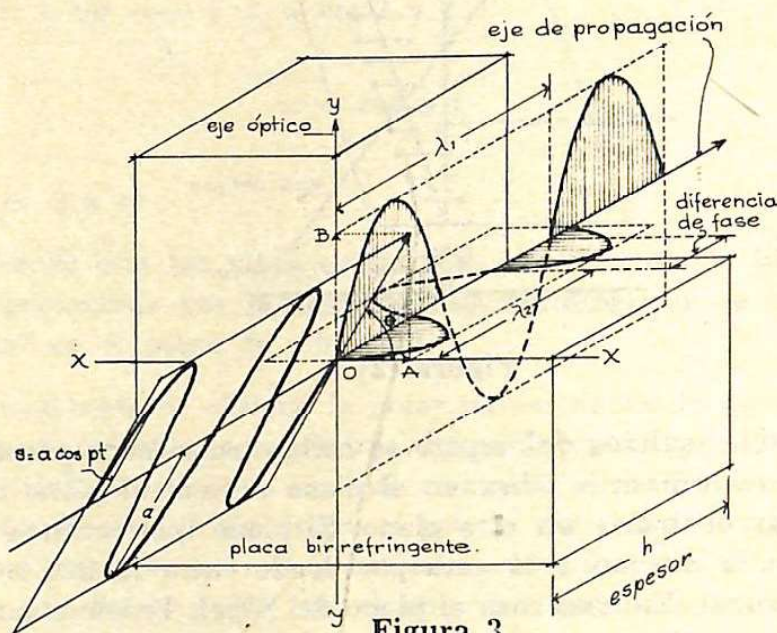


Figura 3

La luz incidente en la placa tendrá una ley de vibración dada por la (6)-a:

$$S = a \cos pt \quad (6)-a$$

y al entrar en la placa se descompone de acuerdo con la propiedad (g) del artículo (1º),

$$OB = y = a \sin \theta \cos pt \quad (a) \quad (9)$$

$$OA = x = a \cos \theta \cos pt \quad (b)$$

Al emerger, las dos vibraciones estarán desfasadas relativamente:

$R = K \frac{h}{\lambda}$; es decir, suponiendo que la (b) se retardó con respecto a

la (2), las vibraciones que salen después de atravesar (h) serán:

$$y_1 = a \sin \theta \cos pt \quad (c) \quad (10)$$

$$x_1 = a \sin \theta \cos (pt - 2 \pi R) \quad (d)$$

Observemos que el vector vibración tiene en este caso como lugar geométrico a una elipse. Para ponerla de relieve basta eliminar a (pt) de las ecuaciones (c) y (d). Se obtiene la ecuación:

$$\frac{x_i^2}{\cos^2 \theta} - \frac{2x_i y_i}{\sin \theta \cos \theta} \cdot \cos 2\pi R + \frac{y_i^2}{\sin^2 \theta} = a^2 \sin^2 2\pi R \quad (11)$$

que es una elipse cuyos ejes principales no son (x,y).

Para el caso particular en que R valga $\frac{1}{4}$, es decir, el retardo producido por la placa es de un cuarto de onda, (la placa se llama entonces de $\frac{1}{4}$ de onda), la (11) toma el valor:

$$\frac{x_i^2}{a^2 \cos^2 \theta} + \frac{y_i^2}{a^2 \sin^2 \theta} = 1 \quad (12)$$

lo que demuestra que si la lámina es de $\frac{1}{4}$ de onda, el movimiento del vector vibración todavía es elíptico, pero los ejes principales de la elipse son los (x,y). En este caso y en el general dado por la (11) se dice que la luz está polarizada elípticamente.

Supongamos ahora que la placa birrefringente sea de $\frac{1}{4}$ de onda, y que la luz polarizada incida con un ángulo $\theta = 45^\circ$. Claramente se ve que la (12) se convierte entonces en:

$$x_i^2 + y_i^2 = \frac{a^2}{2} \quad (13)$$

que es la ecuación de un círculo. La luz que sale de la placa se llama entonces polarizada circular. Para este caso las ecuaciones (10) serán:

$$\begin{aligned} x_i &= (a \sqrt{2} \cos \rho t) / 2 \\ y_i &= (a \sqrt{2} \cos(\rho t - \frac{\pi}{2})) / 2 = (a \sqrt{2} \sin \rho t) / 2 \end{aligned} \quad (14)$$

ya que $R = \frac{1}{4}$. El vector vibración girará según la ley

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \rho t &= y_i / x_i \\ \therefore \rho &= \frac{1}{t} \operatorname{arctg} \frac{y_i}{x_i} \end{aligned} \quad (15)$$

Si el retardo es $R = \frac{1}{2}$, y $\theta = 45^\circ$, entonces la (11) se reduce a:

$$(x_i + y_i)^2 = 0$$

$$\therefore x_i = -y_i$$

que es un plano perpendicular al plano de incidencia. Es decir, la luz emergente es todavía polarizada plana, pero su plano de polarización está girado $\pi/2$ con respecto al plano de incidencia.

Resumen: Cuando una luz polarizada plana monocromática incide en una placa polarizante, cuyo eje óptico se halla en el plano de la placa, la luz emergente sale en general polarizada elípticamente. Si la placa es de $\frac{1}{4}$ de onda y el plano de incidencia llega a 45° , la luz sale polarizada circularmente. Si la placa es de $\frac{1}{2}$ onda y $\theta = 45^\circ$, la luz emergente es polarizada plana, vibrando perpendicularmente a la incidente.

4. La birrefringencia temporal (Efecto fotoelástico)

Hasta aquí hemos estudiado los efectos que producen los cuerpos naturalmente birrefringentes. Existe también una gran cantidad de cuerpos tales como vidrio, celuloide, bakelita, y muchos otros plásticos y resinas sintéticas, que sin ser naturalmente birrefringentes exhiben esta propiedad cuando se los somete a tensiones. El efecto de birrefringencia, aunque temporal (dura mientras dura la tensión y desaparece con la misma), es completamente similar a los efectos exhibidos por la placa que se estudió en el artículo anterior. La única diferencia con la placa es que el retardamiento (R) depende de la naturaleza e intensidad de la tensión.

Si un rayo de luz polarizada plana monocromática incide en una placa plana sometida a un estado plano de tensiones, dentro del límite elástico, la transmisión de la luz obedece a las leyes siguientes:

- a) La luz se descompone en las direcciones de las tensiones principales y se transmite únicamente vibrando en estos planos principales.
- b) La velocidad de transmisión obedece a las siguientes leyes:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= n_1 - n_0 = A\sigma_1 + B\sigma_2 & (a) \\ \delta_2 &= n_2 - n_0 = B\sigma_1 + A\sigma_2 & (b)\end{aligned}\tag{16}$$

donde

δ_1 = cambio de índice de refracción en el plano principal de σ_1

δ_2 = cambio de índice de refracción en el plano principal de σ_2

n_0 = índice de refracción del material no tensionado.

n_1 = índice de refracción en el plano de σ_1

n_2 = " " " " " " " " σ_2

A y B son constantes fotoelásticas del material.

Substrayendo la (16)-b de la (16)-a, se obtiene:

$$\delta_1 - \delta_2 = n_1 - n_2 = (A - B)(\sigma_1 - \sigma_2)$$

o también

$$n_1 - n_2 = C(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (17)$$

si

V = velocidad de la luz en el medio circundante.

V_1 = velocidad de la luz en el plano de σ_1 .

V_2 = velocidad de la luz en el plano de σ_2 .

entonces de acuerdo con la (1)

$$n_1 = \frac{V}{V_1} \quad , \quad y \quad n_2 = \frac{V}{V_2} \quad ,$$

de donde la (17) queda

$$\frac{V(V_2 - V_1)}{V_1 V_2} = C(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (18)$$

La constante C se denomina algunas veces "constante de birrefracción del material".

La ley (17) es llamada "ley de Wertheim", pues fue descubierta por G. Wertheim en Francia en 1854 ("Mémoire sur la double réfraction temporairement produite dans les corps isotropes et sur la relation entre l'élasticité mécanique et l'élasticité optique" Annales de Ch. et de Phys. 1854).

5. El polariscopio y el efecto fotoelástico

La Figura (4) nos muestra un esquema de lo que se denomina el polariscopio plano:

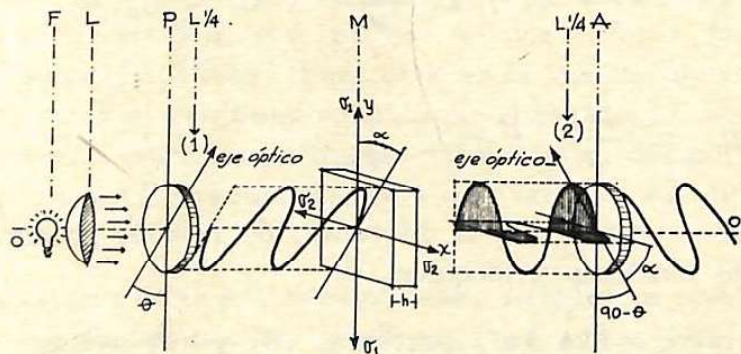


Figura (4)

F = fuente de luz monocromática no polarizada.

L = lente convergente

$L\frac{1}{4}$ = láminas de $\frac{1}{4}$ de onda.

P = Polarizador.

M = modelo cargado.

A = analizador.

En el trayecto PM, la luz se encuentra polarizada en el plano del eje 00_1 y del eje óptico del polarizador. La representamos por:

$$S_p = a \cos pt \quad (a)$$

Al llegar al modelo tensionado la vibración (a) se descompone en:

$$y = a \cos \alpha \cos pt \quad (b)$$

$$x = a \sin \alpha \cos pt \quad (c)$$

Si llamamos t_1 y t_2 los tiempos requeridos por las vibraciones (a) y (b) para atravesar la placa de espesor h , entonces éstas emergerán desfasadas:

$$y = a \cos \alpha p (t - t_1) \quad (d)$$

$$x = a \sin \alpha p (t - t_2) \quad (e)$$

En consecuencia, la diferencia de fase entre (d) y (e) es

$$\delta = p (t_1 - t_2) \quad (f)$$

y como

$$v_1 = \frac{h}{t_1} \quad y \quad v_2 = \frac{h}{t_2}$$

entonces (f) se puede escribir:

$$\delta = p \left(\frac{h}{v_1} - \frac{h}{v_2} \right) = p h \left(\frac{v_2 - v_1}{v_1 v_2} \right) \quad (g)$$

y utilizando la (18)

$$\delta = p (t_1 - t_2) = \frac{p h c}{v} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (19)$$

o sea

$$t_1 - t_2 = \frac{h c}{v} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (20)$$

La (19) nos enseña que la diferencia de fase es proporcional a la diferencia de tensiones principales.

En el trayecto MA las vibraciones (d) y (e) avanzan desfasadas δ , dada por la (19). Al llegar al analizador éste se encuentra con su eje óptico girado 90° con respecto al eje óptico del polarizador. Esta

es la posición llamada de polariscopio "normal". Entonces la luz que emerge del analizador será la suma de las proyecciones de (y) y de (x) sobre la dirección del eje óptico del analizador:

$$y \operatorname{sen} \alpha - x \cos \alpha = \left[\cos \rho (t - t_1) - \cos \rho (t - t_2) \right] a \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\therefore S_a = a \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen} \rho \frac{(t_1 - t_2)}{2} \operatorname{sen} \rho \left(t - \frac{t_1 + t_2}{2} \right) \quad (21)$$

En todo punto en donde $S_a = 0$, se verá un punto negro. La (21) se hace nula para los puntos en donde

$$\frac{\rho (t_1 - t_2)}{2} = n \pi \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

Para el valor especial de $n = 0$, se concluye de la (19) que $(\sigma_1 - \sigma_2) = 0 \therefore \sigma_1 = \sigma_2$; estos puntos se llaman isotrópicos. Para los demás valores de n (1, 2, 3, etc.)

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2 \tau_{\max} = \text{constante} \quad (23)$$

lo cual indica que en esos puntos la tensión tangencial o cortante, máxima, es constante. El lugar geométrico de $\tau_{\max}$ para cada valor de la cte. será entonces una franja negra llamada "isocromática" o simplemente franja.

Pero la (21) no sólo se anula cuando se cumple la (22); también se anula cuando $\alpha = 0^\circ$, ó, $\alpha = 90^\circ$. Esto quiere decir que en el punto en cuestión, las direcciones principales de σ_1 y σ_2 , coinciden con las direcciones de los ejes ópticos del polarizador y del analizador. Si por ejemplo, el eje óptico del polarizador forma un ángulo θ con el eje vertical, fig (4), entonces se obtendría una franja negra que será el lugar geométrico de los puntos cuyas direcciones principales forman θ , ó, $\theta + 90^\circ$, con el eje vertical. Estas nuevas líneas negras se llaman "isoclinas". Para obtener la isoclina de cualquier valor, bastará girar el conjunto polariscopio-analizador, con sus ejes ópticos rígidamente cruzados, hasta que el eje óptico del polarizador forme el ángulo de valor requerido con el eje vertical; v.g. 10° . Se obtiene así la isoclina de 10° .

Lógicamente con el polariscopio plano siempre se obtienen las isocromáticas mezcladas con las isoclinas. Para evitar ésto, se introducen en los puntos (1) y (2), marcados con flechas en la Fig. (4), en los trayectos PM y AM, láminas de $\frac{1}{4}$ de onda, con sus ejes ópticos a 45°

con los ejes ópticos del polarizador y analizador respectivamente. De acuerdo con el artículo 3 se obtiene entonces en el trayecto PM luz polarizada circular. En este caso la vibración resultante S_a , no se anula para ningún valor de α y desaparecen las isoclinas. Véase el apéndice I. Si en un polariscopio plano se usa luz blanca en lugar de luz monocromática, cualquier color de una dada longitud de onda que sea igual, o un submúltiplo, del retardamiento relativo, δ , se extinguirá en los puntos anteriormente estudiados, por interferencia. Entonces en esos puntos aparecerá el color complementario. Por ejemplo si se extingue el rojo, aparecerá el azul. En este caso las "isocromáticas" serán del mismo color en todos los puntos en donde $\tau_{\text{máx}}$ sea constante; el color corresponderá al valor de la constante. Las isoclinas, que no dependen de la longitud de onda, aparecerán distintas, como líneas negras, lo mismo que los puntos isotrópicos, los cuales aparecerán como puntos negros. Esto permite contar el orden de las franjas, (el valor de n dado por la ecuación (22) se llama orden de la franja), a partir de los puntos isotrópicos donde $n = 0$. Como es obvio en estos puntos $\tau_{\text{máx}} = 0$. También habrán puntos negros en los lugares en donde $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$. Estos puntos se llaman singulares.

6. Modo de Operación

Una vez colocado el modelo cargado en el polariscopio circular, se toman fotografías de las isocromáticas. Se determina su orden y de las ecuaciones (19) y (22) deduciremos:

$$p \frac{(t_1 - t_2)}{2} = n\pi = \frac{p h c}{v} \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \quad (24)$$

o sea

$$n F = \tau_{\text{máx.}}, \quad (25)$$

donde

$$F = \frac{\pi v}{p h c} = \frac{v}{2 f h c} \quad (26)$$

ya que de la (7): $p = 2 \pi f$.

Luego, si se conocen F y n , se conocerá, utilizando la (25), el valor de $\tau_{\text{máx.}}$ Las isocromáticas son pues las líneas de deslizamiento tangencial, o lugares geométricos de tensión cortante máxima.

Se regresa al polariscopio plano, sacando las láminas de $\frac{1}{4}$ de onda, y se dibujan las isoclinas, por ejemplo de 10 en 10 grados. A par-

tir de las isoclinas se dibujan las isostáticas o envolventes de las direcciones principales.

7. Determinación de las tensiones principales

La experiencia fotoelástica proporciona directamente el valor de τ máx en cada punto, o sea, la diferencia de tensiones principales:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2nF \quad (27)$$

como puede deducirse por la (25); pero no proporciona directamente el valor individual de cada tensión.

Entonces hay necesidad de acudir a métodos indirectos, que en su mayoría no tienen que ver con la fotoelasticidad. Podemos dividir estos métodos en: a) experimentales y b) analíticos.

Los métodos experimentales están basados en un resultado obtenido en la teoría de la elasticidad: la solución generalizada al problema plano de tensión. Esta solución exige que las cargas exteriores estén distribuidas simétricamente con respecto al plano medio de la placa del modelo. En este caso se puede escribir:

$$\Delta z = -\frac{\nu h}{E} (\sigma_1 + \sigma_2) = -\frac{\nu h}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \quad (28)$$

donde:

Δz = cambio en el espesor de la placa.

h = espesor de la placa.

ν = coeficiente de Poisson.

E = módulo de elasticidad.

σ_1 y σ_2 = tensiones principales.

σ_x y σ_y = tensiones en direcciones x e y .

Si por cualquier método se logra determinar el cambio Δz en un punto dado, es posible, luego, con el auxilio de la ecuación (28), encontrar la suma de las tensiones principales ($\sigma_1 + \sigma_2$), en el punto en consideración. Como con la fotoelasticidad se conoce la diferencia ($\sigma_1 - \sigma_2$), es inmediato determinar individualmente σ_1 y σ_2 en todo punto del modelo.

Hay muchos métodos para medir este cambio de espesor; el más conocido es el que usa el llamado interferómetro de Mesnager.

Hay un interesante método debido a H. Neuber. Este autor, encuentra por métodos de integración gráfica, los lugares geométricos de ($\sigma_1 + \sigma_2$), llamados "isopáchicas".

Los métodos analíticos se basan igualmente en la teoría de la elasticidad. Esta demuestra que para un estado plano de tensión, o plano de deformación, debe cumplirse la ecuación de compatibilidad:

$$\nabla^2 (\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{\partial^2 (\sigma_1 + \sigma_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_1 + \sigma_2)}{\partial y^2} = 0 \quad (29)$$

Esta ecuación es posible integrarla conociendo las condiciones de borde de la placa. La integración se lleva a cabo, generalmente, por el método de las diferencias finitas. Se reduce el problema a la solución de un número n de ecuaciones lineales, con n incógnitas, para n puntos de la malla escogida.

La solución de este nuevo problema se efectúa o por el método de Gauss-Seidel, o mucho mejor por el método de Liebman. Sin embargo el método más aconsejable es el de la relajación. Este último es susceptible de programarse eficientemente en un computador digital. Basados en la relajación, nosotros hemos puesto a punto un programa que nos permite resolver rápidamente 150 ecuaciones con 150 incógnitas, aproximadamente, en un computador NCR 315.

8. Las tensiones en el prototipo. (Teoría de la similitud)

Hasta aquí tenemos completamente conocido el panorama tensio-nal del modelo: líneas de tensión cortante máxima o isocromáticas; envolventes de las direcciones principales o isostáticas; tensiones principales. A partir de estos datos es preciso deducir los valores correspondientes en el prototipo. Para lograr ésto, acudimos a la 'teoría de los modelos' o "teoría de la similitud".

Indiscutiblemente el creador de la teoría de la similitud fue Galileo Galilei (Discorsi e Dimostrazione Matematiche intorno a due nuoue Scienze. 1638). Al parecer la teoría de los modelos tiene sus fundamentos lógicos basados en un teorema muy discutido: el teorema llamado π . También se suele encontrar en la literatura científica designado con los nombres de: Vashy, (Francés), Buckingham, (inglés) o Riabushinsky, (ruso). Lo que el teorema nos dice se puede resumir así, poco más o menos: "Toda ley física es suceptible de expresarse como una función de productos sin dimensiones".

Indudablemente el análisis dimensional puede basarse en el teorema π . Basados en él podemos establecer algunas leyes útiles que nos relacionan magnitudes en el modelo (designados aquí con el subíndice m), con magnitudes en el prototipo (que designaremos con el subíndice p).

DENOMINACIONES

Magnitud	Símbolo	Modelo	Prototipo
Longitud	L	L_m	L_p
Area	A	L_m^2	L_p^2
Volumen	V	L_m^3	L_p^3
Tiempo	t	T_m	T_p
Fuerza	F, P	F_m	F_p
Masa	m	$F_m L_m^{-1} T_m^2$	$F_p L_p^{-1} T_p^2$
Angulos (en radianes)	θ, ϕ , etc.	(1) 1	1
Momento	M	$F_m L_m$	$F_p L_p$
Momento de inercia	I	$F_m L_m T_m^2$	$F_p L_p T_p^2$
Módulo de Elasticidad	E	$F_m L_m^{-2}$	$F_p L_p^{-2}$
Deformación	ϵ, γ	(2) 1	1
Coeficiente de Poisson	ν	(3) 1	1
Tensión	σ, τ	$F_m L_m^{-2}$	$F_p L_p^{-2}$

En la tabla anterior no hemos puesto sino los productos más usuales en el análisis estructural, y hemos empleado el sistema longitud, fuerza, tiempo (L, F, T) como base.

De la tabla anterior se pueden deducir relaciones muy útiles:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_p} = \left(\frac{F_m}{F_p} \right) \cdot \left(\frac{L_m^{-2}}{L_p^{-2}} \right) = F_r \cdot L_r^{-2} \quad (30)$$

llamando con el subíndice (r) a la relación correspondiente de modelo a prototipo, es decir:

$$F_r = \frac{F_m}{F_p} \quad y \quad L_r = \frac{L_m}{L_p} \quad etc.$$

Entonces de la (30) deducimos:

$$\sigma_p = \sigma_m (F_r^{-1} L_r^2) \quad (31)$$

o sea, conociendo las tensiones en el modelo y las relaciones de escala de fuerzas y longitudes, podemos deducir las tensiones en el prototipo por medio de la (31).

De la tabla de denominaciones se deducen algunos otros hechos importantes: las filas marcadas con (1), (2), (3) son adimensionales por sí mismas, intrínsecamente. Esto implica obviamente que las rotaciones y las deformaciones deben de ser iguales en el modelo y en el prototipo. En otras palabras: la escala geométrica es la misma, antes y después de la deformación.

Comprobación:

$$\frac{L_m (1 + E_m)}{L_p (1 + E_p)} = \frac{L_m}{L_p} = L_r \quad (32)$$

para

$$E_m = E_p$$

Pero la condición más importante y restrictiva está dada por la (3): el coeficiente de Poisson del material del modelo y el del material del prototipo deben de ser iguales:

$$\nu_m = \nu_p \quad (33)$$

En el caso de la fotoelasticidad plana, el problema elástico, o es plano de tensiones, o es plano de deformaciones, y felizmente, en estos casos, la solución es **independiente** de las constantes elásticas. No tenemos pues que preocuparnos de que se cumpla o no se cumpla la (33).

De la tabla de Denominaciones se obtienen igualmente algunas otras relaciones útiles:

$$\frac{M_m}{M_p} = \frac{F_m}{F_p} \cdot \frac{L_m}{L_p} = F_r \cdot L_r \quad (34)$$

$$\frac{E_m}{E_p} = \frac{F_m}{F_p} \cdot \left(\frac{L_m}{L_p} \right)^{-2} = F_r \cdot L_r^{-2} \quad (35)$$

9. Conclusión

A grandes rasgos estos son los fundamentos de la fotoelasticidad; instrumento formidable de análisis que irrumpió en la técnica moderna, en todos los campos de aplicación científica, en donde se requiera

conocer el comportamiento tensional de un cuerpo. Es una técnica compleja y extensa que requiere el dominio simultáneo de muchas otras ciencias como: la elasticidad, la mecánica de los materiales, la teoría de las estructuras, la óptica, las matemáticas operativas, etc. Pero era lógico que algún día irrumpiría en nuestro medio científico y técnico, y que el lugar de su irrupción fuera la Facultad Nacional de Minas.

APENDICE I

El polariscopio circular

En el artículo (5) estudiamos el polariscopio plano. Veíamos cómo aquí aparecían mezcladas las isoclinas con las isocromáticas. Véanse la expresión (21) y su análisis. Para anular las isoclinas, decíamos que era preciso introducir en los puntos (1) y (2) Fig. (4) láminas de $\frac{1}{4}$ de onda. Entonces se producía el llamado polariscopio circular. Veamos: en el trayecto PM, Fig. (4), la introducción de la lámina de $\frac{1}{4}$ de onda, hace que la luz se polarice circularmente, véase el artículo (3), ecuaciones (14). Sigamos el camino a partir del polarizador P: Fig (4).

$$\text{Trayecto } P \rightarrow L_{\frac{1}{4}} (1) : S_p = a \cos pt \quad (a)$$

$$\text{Trayecto } L_{\frac{1}{4}} (1) \rightarrow M : \begin{cases} S_{p_1} = a \frac{\sqrt{2}}{2} \cos pt \\ S_{p_2} = a \frac{\sqrt{2}}{2} \sin pt \end{cases} \quad (b)$$

Véase el diagrama Figura (5).

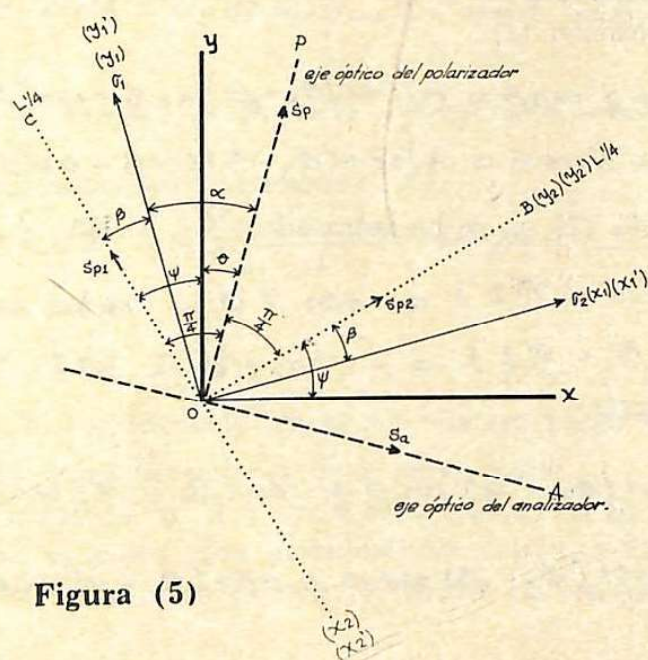


Figura (5)

Al entrar al modelo M, la luz polarizada circular, dada por las (b) se descompone en:

$$y_1 = S_{p1} \cos \beta + S_{p2} \sin \beta = A (\cos pt \cos \beta + \sin pt \sin \beta) \quad (c)$$

$$x_1 = -S_{p1} \sin \beta + S_{p2} \cos \beta = A (\sin pt \cos \beta - \cos pt \sin \beta),$$

donde $\beta = \pi/4 - \alpha$; y $A = a \frac{\sqrt{2}}{2}$; y si llamamos a $pt = \phi$,

podemos escribir las (c) así:

$$y_1 = A \cos (\phi - \beta) \quad (d)$$

$$x_1 = A \sin (\phi - \beta)$$

Cuando las (d) salen del modelo, salen desfasadas. Luego:

$$\phi_1 = p (t - t_1) \quad (e)$$

$$\phi_2 = p (t - t_2)$$

de donde

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= A \cos (\phi_1 - \beta) \\ x_1' &= A \sin (\phi_2 - \beta) \end{aligned} \right\} \text{vibrando sobre } x_1, y_1 \quad (f)$$

Al entrar a la $L^{1/4} (2)$, las (f) se descomponen a lo largo de OB y OC. Pero esta vez pueden suceder dos cosas: a) $L^{1/4} (2)$ está cruzada a 90° con $L^{1/4} (1)$, ó b) $L^{1/4} (2)$ es paralela a $L^{1/4} (1)$.

a) $L^{1/4} (2)$ está cruzada 90° con respecto a $L^{1/4} (1)$. Entonces el retardo se presentará en el eje (x_2), y no en el eje OB, como antes en la posición (1).

$$\begin{aligned} y_2 &= x_1' \cos \beta + y_1' \sin \beta = A [\sin (\phi_2 - \beta) \cos \beta + \cos (\phi_1 - \beta) \sin \beta] \\ x_2 &= x_1' \sin \beta - y_1' \cos \beta = A [\sin (\phi_2 - \beta) \sin \beta - \cos (\phi_1 - \beta) \cos \beta] \end{aligned} \quad (g)$$

Al salir de la $L^{1/4} (2)$, x_2 se ha retrasado $\frac{\pi}{2}$, o sea $\lambda/4$; de donde:

$$\cos (\phi_1 - \beta - \pi/2) = \sin (\phi_1 - \beta)$$

$$\sin (\phi_2 - \beta - \pi/2) = -\cos (\phi_2 - \beta)$$

y las (g) quedarán:

$$y_2' = A [\sin (\phi_2 - \beta) \cos \beta + \cos (\phi_1 - \beta) \sin \beta] \quad (h)$$

$$x_2' = A [-\cos (\phi_2 - \beta) \sin \beta - \sin (\phi_1 - \beta) \cos \beta]$$

las cuales son equivalentes a

$$Y'_2 = A(\sin \phi_2 \cos^2 \beta - \cos \phi_2 \sin \beta \cos \beta + \cos \phi_1 \cos \beta \sin \beta + \sin \phi_1 \sin^2 \beta) \quad (i)$$

$$X'_2 = A(-\cos \phi_2 \cos \beta \sin \beta - \sin \phi_2 \sin^2 \beta - \sin \phi_1 \cos^2 \beta + \cos \phi_1 \sin \beta \cos \beta)$$

Al entrar al analizador, no pasan sino las componentes de (i) sobre éste, anulándose las componentes normales:

$$S_2 = Y'_2 \cos 45^\circ + X'_2 \cos 45^\circ$$

de la cual, después de reemplazar los valores dados por las (i), se deduce fácilmente:

$$S_2 = A\sqrt{2} \sin p \frac{t_1 - t_2}{2} \sin(2\alpha + pt - p \frac{t_1 + t_2}{2}) \quad (k)$$

que se anula para los siguientes valores:

$$p \frac{t_1 - t_2}{2} = n\pi \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

pero no se anula para ningún valor de α

b) $L^{1/4}$ (2) es paralela $L^{1/4}$ (1). En este caso, el retardo o desfase se presenta de nuevo en OB. Las (g) quedarán:

$$Y'_2 = A[-\cos(\phi_2 - \beta) \cos \beta + \sin(\phi_1 - \beta) \sin \beta] \quad (l)$$

$$X'_2 = A[\sin(\phi_2 - \beta) \sin \beta - \cos(\phi_1 - \beta) \cos \beta]$$

o sea

$$Y'_2 = A(-\cos \phi_2 \cos^2 \beta - \sin \phi_2 \sin \beta \cos \beta + \sin \phi_1 \cos \beta \sin \beta - \cos \phi_1 \sin^2 \beta) \quad (m)$$

$$X'_2 = A(\sin \phi_2 \cos \beta \sin \beta - \cos \phi_2 \sin^2 \beta - \cos \phi_1 \cos^2 \beta - \sin \phi_1 \sin \beta \cos \beta)$$

Pasan el analizador las vibraciones:

$$S_2 = A\sqrt{2} \cos p \frac{t_1 - t_2}{2} \cos p(t - \frac{t_1 + t_2}{2}) \quad (n)$$

que se anulan para

$$p \frac{t_1 - t_2}{2} = \frac{n\pi}{2} \quad n = 1, 3, 5, 7,$$

o sea cuando el retardo relativo es un número impar de medias longitudes de onda. Para los valores de n pares, dará: $0, \pi, 2\pi, 3\pi$, etc. (valores pares de $\frac{1}{2} \lambda$) y la ecuación (n) da S_2 máximo o mínimo; el campo es claro. Las isocromáticas con este campo y posición de láminas de $\frac{1}{4}$ de onda se ven brillantes; las franjas negras corres-

ponderarán a $\frac{\lambda}{2}$, $\frac{3\lambda}{2}$, $\frac{5\lambda}{2}$, etc. En consecuencia esto nos proporciona el medio de encontrar experimentalmente, los valores de medias franjas.

De nuevo aquí la ecuación (n) es independiente de α , y (n) no se anula para ningún valor de α .

Se concluye que la introducción de las láminas de $\frac{1}{4}$ de onda, en las posiciones anotadas, (sus ejes ópticos a 45° con los del sistema polarizador-analizador), produce campos de luz circularmente polarizada que escamotean las isoclinas.

BIBLIOGRAFIA

A Treatise on Photoelasticity by Coker and Filon
Cambridge at the University Press Second Edition 1957.

Photoelasticity by M. M. Frocht Vol. I and Vol. II
Wiley & Sons New York - London Sixth Printing 1962

Photoelastic Analysis by A. W. Hendry, Pergamon Press.

Photoelasticity (Principales and Methods) by H. T. Jessop and F. C. Harris. London Cleave-Hume Press Ltd.

Handbook of Experimental Stress Analysis by M. Hetényi
Wiley & Sons Inc. New York - London.

Analysis of Stress and Strain Durelli - Philips - Tsao
McGraw-Hill 1958

Elements of Experimental Stress Analysis by A. W. Hendry.
Pergamon Press

La Investigación de las tensiones elásticas mediante la luz polarizada, por Raul Buich, Buenos Aires. Imprenta de la Universidad, 1929.

La función de Airy, los estados planos de tensión y la fotoelasticidad plana a la luz del vector de Pavkovitch - Neuber
Por Gabriel García Moreno, artículo a publicar en la revista **Ingeniería Arquitectura Construcción**.