

II. - LOS FUNDAMENTOS DE LA EXTENSOMETRIA ELECTRICA

INTRODUCCION

Ya hemos visto cómo la fotoelasticidad nos puede proporcionar un panorama tensional completo de un cuerpo sometido a un estado plano de tensiones, o plano de deformaciones. Existe, asimismo, la fotoelasticidad tridimensional, pero su uso no se ha desarrollado aún a escala industrial.

Sin embargo, el uso corriente de la fotoelasticidad se circunscribe al análisis de modelos formados con materiales especiales. Cuando algunas veces se necesita conocer directamente en el prototipo, el estado tensional de algunos puntos localizados en zonas críticas, se recurre a la fotoelasticidad de reflexión (Photostress), y más frecuentemente, por ser mucho más rápido, aunque más costoso, a los "extensómetros eléctricos".

Los extensómetros eléctricos fueron el resultado de la aplicación práctica a la industria de un fenómeno descubierto en 1856 por Lord Kelvin: el fenómeno de la variación de la resistencia eléctrica de un conductor metálico, sujeto a deformaciones causadas por sollicitaciones exteriores. La aplicación práctica la llevó a cabo el Dr. Simmons del California Institute of Technology, quien tuvo la idea de pegar por medio de un adhesivo muy resistente un hilo metálico delgado de resistencia eléctrica conocida, a una estructura metálica sometida a deformaciones.

El uso de los extensómetros eléctricos, (algunas veces se usa el término: elongómetros, en la literatura española), se ha generalizado desde entonces, conservando en términos generales la idea de Simmons. Un extensómetro eléctrico consiste, entonces, en un hilo metálico de sección muy pequeña, colocado sobre un papel, o plástico, que le sir-

ve de base y el cual se pega al punto especial de la estructura en estudio. Figura (1).

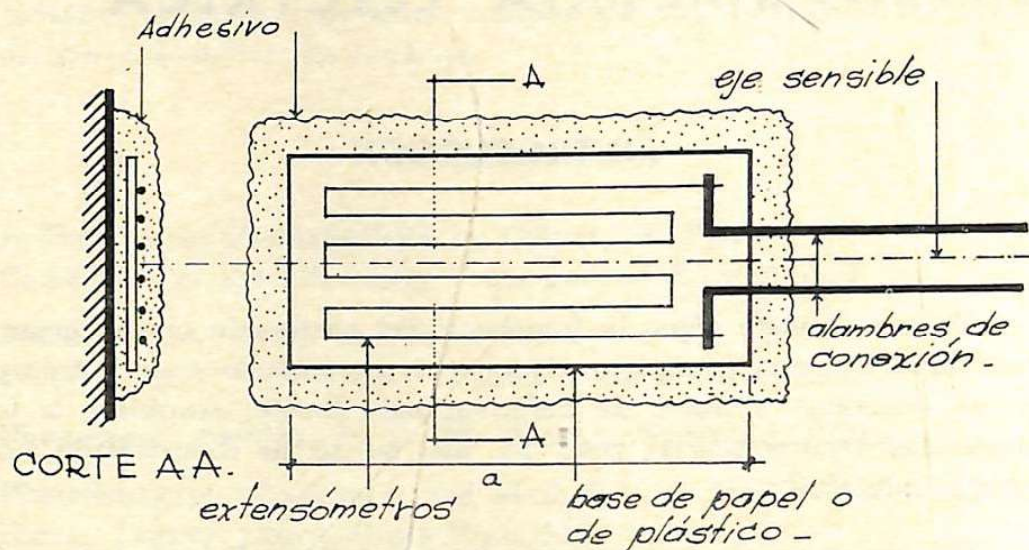


Figura (1)

Se fabrican igualmente extensómetros multidireccionales, o en forma de rosetas, con el fin de investigar las direcciones principales de deformación.

1. Nociones del Análisis General del Extensómetro

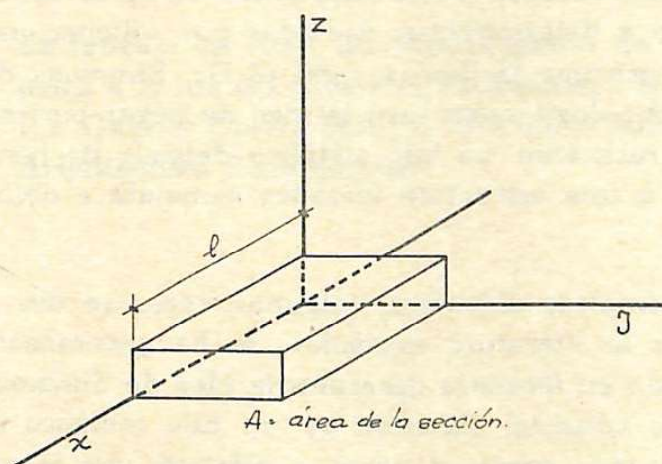


Figura (2)

La Figura (2) nos muestra un conductor metálico de sección A (no necesariamente rectangular) referido a los ejes x , y , z . La resistencia eléctrica en la dirección x está dada por la expresión:

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (1)$$

donde:

R = resistencia en la longitud ℓ , en ohmios

ρ = resistividad específica del material en ohmios — cm

ℓ = longitud en cms.

A = área de la sección en cms.²

Multiplicando la (1) por ℓ y dividiendo igualmente por ℓ podemos escribir:

$$R = \rho \frac{\ell^2}{v} \quad (2)$$

siendo

$$v = A \ell \quad (\text{cms}^3)$$

Tomando logaritmos en ambos lados de la (2):

$$\ln R = \ln \rho + 2 \ln \ell - \ln v \quad (3)$$

Diferenciando la (3), resulta:

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} - 2 \frac{d\ell}{\ell} - \frac{dv}{v} \quad (4)$$

que expresa la variación de resistencia en función de las variaciones de resistividad, longitud y volumen.

Según Bridgman hay una relación lineal entre la variación de resistividad y la relación de volumen:

$$\frac{d\rho}{\rho} = m \frac{dv}{v} \quad (5)$$

donde m es una constante que depende del material del conductor. Introduciendo la (5) en la (4) podemos escribir:

$$\frac{dR}{R} = 2 \frac{d\ell}{\ell} + (m - 1) \frac{dv}{v} \quad (6)$$

de la cual obtenemos:

$$\frac{dR/R}{d\ell/\ell} = 2 + (m - 1) \frac{dv/v}{d\ell/\ell} \quad (7)$$

Como la elasticidad nos enseña que:

$$\epsilon_x = \frac{d\ell}{\ell}$$

y

$$\frac{dV}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \text{primer invariante del tensor de deformaciones,}$$

la (7) se puede reescribir:

$$\frac{dR/R}{d\ell/\ell} = \frac{dR/R}{\epsilon_x} = 2 + (m-1) \left(1 + \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} + \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \right) \quad (8)$$

Podemos todavía transformar esta expresión, ya que la elasticidad nos da también el valor de

$$\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} = -\nu \quad (9)$$

siendo ν el coeficiente de Poisson del material del conductor. La (8) queda definitivamente:

$$K = \frac{dR/R}{d\ell/\ell} = \frac{dR/R}{\epsilon_x} = 2 + (m-1)(1-2\nu) \quad (10)$$

La ecuación (10) sintetiza el fenómeno de la variación de resistencia en función de la deformación lineal. Se puede observar que para deformaciones dentro del rango elástico, o dentro del rango plástico, el valor de k es 2 si $m = 1$. Dentro del rango plástico, sabemos que $\nu = 1/2$, y en consecuencia para cualquier valor de m , $k = 2$. En general, las deformaciones son muy pequeñas y se mantienen dentro del rango elástico, para la mayor parte de los problemas que encuentra el ingeniero en la práctica. En estos casos el material más empleado para construir el extensómetro es el "constantán" aleación, 60% Cu, 40% Ni, en la cual $m = 1.13$ y $\nu = 0.3$. Entonces se tendrá

$$\frac{dR}{R} = 2,052 \frac{d\ell}{\ell} = 2,052 \epsilon_x$$

$$\therefore K = 2,052$$

2. El circuito eléctrico

El problema de conocer a ϵ_x , en la ecuación (11), se ha reducido entonces a conocer, o medir, el cambio en la resistencia del exten-

sómetro al producirse la deformación. La variación es muy pequeña, del orden de microohmios/ohmio, y por consiguiente se requieren circuitos a veces muy complicados pero que básicamente se fundan casi

todos en el puente de Wheastone, Figura (3), alimentado por corriente continua.

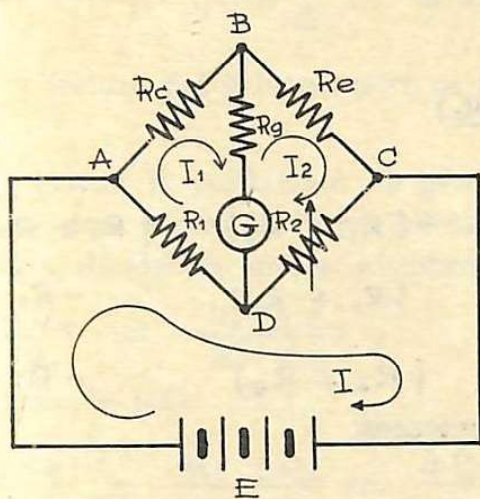


Figura (3)

En la Figura (3), R_c es la resistencia llamada de compensación por cambios de temperatura, R_e la resistencia del extensómetro, y R_1 y R_2 son resistencias de comparación, una de las cuales, v.g. la R_2 , se hace variable con el fin de equilibrar el puente. El puente se considera equilibrado cuando la corriente I_g que fluye a través de R_g se anula.

La condición básica para equilibrar el puente se obtiene a partir de la segunda ley de Kirchhoff: la suma de las caídas de potencial en un circuito cerrado debe de ser nula, y la corriente en cualquier conductor, que es común a dos circuitos cerrados, es la diferencia entre las corrientes de cada circuito. En lo que sigue, consideraremos positivos los circuitos en el sentido de las agujas del reloj.

$$E = (R_1 + R_2) I - R_1 I_1 - R_2 I_2 \quad (a)$$

$$0 = (R_1 + R_g + R_2) I_1 - R_g I_2 - R_1 I \quad (b)$$

$$0 = (R_2 + R_g + R_e) I_2 - R_g I_1 - R_2 I \quad (c)$$

Además

$$I_g = I_2 - I_1$$

$$\therefore I_2 = I_g + I_1$$

Reemplazando (d) en (a), (b) y (c) se obtiene:

$$E = (R_1 + R_2) I - (R_1 + R_2) I_1 - R_2 I_g \quad (e)$$

$$0 = -R_1 I + (R_1 + R_c) I_1 - R_g I_g \quad (f)$$

$$0 = -R_2 I + (R_2 + R_e) I_1 + (R_2 + R + R_e) I_g \quad (g)$$

de donde se puede despejar I_g :

$$I_g = \frac{E (R_1 R_e - R_2 R_c)}{\Delta} \quad (12)$$

donde

$$\Delta = \begin{vmatrix} -R_2 & -(R_1 + R_2) & (R_1 + R_2) \\ -R_g & (R_1 + R_c) & -R_1 \\ (R_2 + R + R_e) & (R_2 + R_e) & -R_2 \end{vmatrix} \quad (13)$$

Si I_g debe ser cero se tendrá entonces:

$$R_1 R_e - R_2 R_c = 0 \quad (14)$$

ó

$$\frac{R_e}{R_c} = \frac{R_2}{R_1} \quad (14)-A$$

$$\therefore R_e = \frac{R_c}{R_1} \cdot R_2 \quad (15)$$

Cuando a R_e se le da un incremento manteniendo constantes R_1 , R_c , se obtiene:

$$R_e + \Delta R_e = \frac{R_c}{R_1} (R_2 + \Delta R_2), \quad (16)$$

o sea que se puede mantener el balance si se ajusta R_2 con ΔR_2 . De (16) y (15)

$$\Delta R_e = \frac{R_c}{R_1} R_2 + \frac{R_c}{R_1} \Delta R_2 - \frac{R_c}{R_1} R_2 = \frac{R_c}{R_1} \Delta R_2 \quad (17)$$

Como la relación $\frac{R_c}{R_1}$ es conocida, ΔR_e se encuentra conociendo ΔR_2 .

La lectura en el galvanómetro G se puede obtener también de la ecuación (12), cuando el puente está desequilibrado. Si se da un incremento ΔR_2 , la (12) queda:

$$\begin{aligned} I_g + \Delta I_g &= \frac{E}{\Delta'} [R_1 R_e - (R_2 + \Delta R_2) R_c] \\ &= \frac{E}{\Delta'} [R_1 R_e - R_2 R_c - \Delta R_2 R_c] \end{aligned}$$

Para pequeños valores de ΔR_2 se puede considerar que $\Delta \approx \Delta'$

$$\therefore \Delta I_g = - \frac{E R_c}{\Delta} \cdot \Delta R_2 \quad (18)$$

Luego, la lectura del galvanómetro es proporcional a ΔR_2 .

La (17) brinda la posibilidad de graduar el puente directamente en micro-cms/cms, o sea, da la posibilidad de leer directamente a ϵ_x . Para verlo, dividamos ambos miembros de la (17) por R_c :

$$\frac{\Delta R_c}{R_c} = \frac{R_c \cdot \Delta R_2}{R_1 \cdot R_2}$$

y utilizando la (14)

$$\frac{\Delta R_c}{R_c} = \frac{R_c \cdot \Delta R_2}{R_c \cdot R_2} = \frac{\Delta R_2}{R_2} \quad (19)$$

y teniendo en cuenta la (10)

$$\frac{\Delta R_c}{R_c} = \frac{\Delta R_2}{R_2} = k \epsilon_x \quad (19)-A$$

Luego, la medida de $\frac{\Delta R_2}{R_2}$ en la resistencia variable es una medida de ϵ_x , si se conoce k , que se llama el "factor del extensómetro".

3. Las rosetas de deformación

Ya hemos visto cómo con un extensómetro eléctrico, del tipo ilustrado en la Figura (1), es posible medir la deformación local ϵ_x , en la dirección predeterminada del eje sensible. Pero frecuentemente es necesario conocer las deformaciones principales (ϵ_1 , ϵ_2) y su dirección con respecto al eje (x), por ejemplo.

Como son tres incógnitas, se necesitan tres medidas independientes tomadas a lo largo de tres ejes distintos. Es preciso formar entonces con un solo parche un extensómetro que permita leer las tres deformaciones requeridas. Este parche se llama "roseta de deformación" y consiste simplemente en tres extensómetros simples pegados a una base común, en tres direcciones diferentes.

Sean éstos tres ejes OA, OB, y OC, y sus ángulos respectivos con respecto a OX: θ_a , θ_b , θ_c , Figura (4).

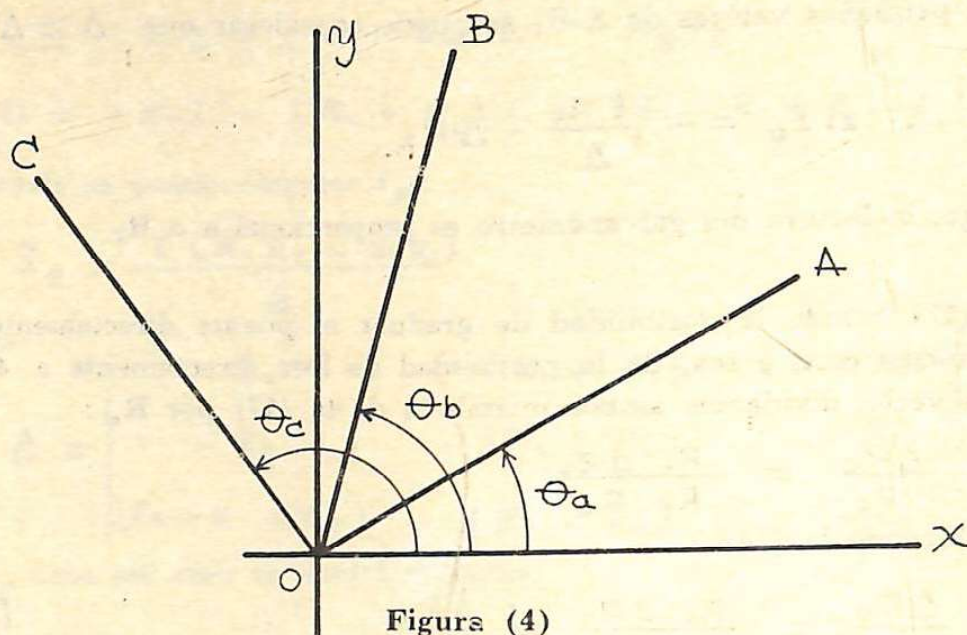


Figura (4)

Sean ϵ_a , ϵ_b , y ϵ_c las deformaciones leídas en las direcciones OA, OB y OC. Las deformaciones ϵ_x , ϵ_y , y la deformación angular, γ_{xy} , correspondientes a los ejes (Ox) y (Oy), serán dadas por las conocidas fórmulas de la teoría elástica.

$$\begin{aligned}\epsilon_a &= \epsilon_x \cos^2 \theta_a + \epsilon_y \sin^2 \theta_a + \gamma_{xy} \sin \theta_a \cos \theta_a \\ \epsilon_b &= \epsilon_x \cos^2 \theta_b + \epsilon_y \sin^2 \theta_b + \gamma_{xy} \sin \theta_b \cos \theta_b \\ \epsilon_c &= \epsilon_x \cos^2 \theta_c + \epsilon_y \sin^2 \theta_c + \gamma_{xy} \sin \theta_c \cos \theta_c\end{aligned}\quad (20)$$

de las cuales se despejan los tres valores ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} . Una vez conocidos estos tres valores, se deducen fácilmente las deformaciones principales a partir de las siguientes expresiones, dadas igualmente por la teoría de la elasticidad:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \\ \epsilon_2 &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}\end{aligned}\quad (21)$$

y ϕ , el ángulo que uno de los ejes principales hace con el eje x, será dado por:

$$\operatorname{tg} 2\phi = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}\quad (22)$$

Los ejes principales son ortogonales entre sí.

Para facilitar la solución de las ecuaciones (20) se escogen distintos tipos de rosetas. Por ejemplo, una de las más usadas es aquella con los ejes OA y OC normales y OB bisectándolos, (ésta es la roseta rectangular), o sea

$$\theta_a = 0^\circ$$

$$\theta_b = 45^\circ$$

$$\theta_c = 90^\circ$$

y luego las (20) quedarán:

$$\epsilon_a = \epsilon_x$$

$$2\epsilon_b = \epsilon_x + \epsilon_y + \gamma_{xy}$$

$$\epsilon_c = \epsilon_y$$

las cuales reemplazadas en las (21), nos dan

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_a - \epsilon_c)^2 + (2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_c)^2} \quad (23)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_a - \epsilon_c)^2 + (2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_c)^2}$$

y la (22) se convertirá a su vez en

$$\tan 2\phi = \frac{2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_c}{\epsilon_a - \epsilon_c} \quad (24)$$

Las fórmulas (23) y (24) nos informan completamente del estado local de deformaciones de una roseta rectangular. Igualmente se emplean rosetas en T, en Δ , y en Y.

4. Las tensiones

Una vez conocido en un punto dado el estado de deformación, por medio de la roseta, es posible deducir el estado tensional acudiendo a la elasticidad, la cual nos enseña que, para un cuerpo homogéneo, elástico e isotrópico, en estado plano de tensiones, se cumple:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) / (1 - \nu^2) \\ \sigma_y &= E (\nu \epsilon_x + \epsilon_y) / (1 - \nu^2) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\tau_{xy} = E \gamma_{xy} / [2(1 + \nu)]$$

y naturalmente, las tensiones principales, correspondientes a las deformaciones principales, dadas por las (21), serán:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2) \quad (26)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\nu \epsilon_1 + \epsilon_2)$$

5. Conclusión

Los cuatro artículos anteriores son la base de la **extensometría eléctrica**. Simple y sencilla en sus fundamentos, requiere sin embargo práctica y habilidad cuando se quiere aplicar con eficiencia; hay necesidad de resolver complejos problemas tales como: obtener circuitos eficientes, sensibles y baratos; buscar medios rápidos para resolver las ecuaciones de las rosetas; conseguir adhesivos resistentes, durables, que se adapten a las deformaciones de los cuerpos; de secado rápido, no muy sensibles a la humedad y a la temperatura, etc. Tal vez el principal problema de la extensometría eléctrica reside en la técnica del fijado. En general, todos estos problemas se han estudiado con profundidad suficiente, y las soluciones encontradas se hallan dispersas en la literatura dedicada a las técnicas del análisis experimental, o simplemente en la literatura dedicada directamente a la extensometría eléctrica.

BIBLIOGRAFIA

- Strain Gage Techniques** W. M. Murray (1966 Edition) Copyright by W. M. Murray 1966 M.I.T. Cambridge Mass.
- Technique et Utilisation des jauges de Contrainte** par V. Zelbststein (Dunod 1956) París.

Technique des Mesures á l'Aide de jauges de Contrainte J. J. Koch et R. G. Boite N. V. Philips ' Gloelampenfabrieken - Eindhoven Pays Bas (Dunod 1951) París.

Basic Electric Circuits for Strain - Gages by W. M. Murray M.I.T Cambridge Mass.

Los Elongómetros Ohmicos y las Rosetas de Deformación por Vicente de Castro Cubells - Laboratorio Central de Ensayos de Materiales de Construcción. Madrid 1952. Publicación Nº 78.

Esquema General de las Medidas Eléctricas por Alberto Fuentes, Instituto Eduardo Torroja, Madrid 1966, Monografía Nº 254.

Handbook of Experimental Stress Analysis by M. Hetényi - Wiley & Sons Inc. New York, London

Rosette Analysis by W. M. Murray, M. I. T. 1965 Cambridge Mass.