

# **LA SIMILITUD EN LOS ENSAYOS EN MODELOS HIDRAULICOS FLUVIALES (EXTRACTOS)**

**Por: H. A. Einstein y  
R. Müller**

Del Laboratorio de Hidráulica  
De Zurich (Suiza)

**Traducción e introducción  
por el Ing. Jairo Murillo V.  
Del Laboratorio de Hidráulica  
U. N. —Facultad de Minas—**

## **INTRODUCCION**

La práctica de los estudios en Modelo Reducido para la gran generalidad de las Obras Hidráulicas ha dejado de ser una innovación o curiosidad técnica para convertirse en una necesidad de rutina, en todos los países desarrollados.

El mundo está ahora sembrado de grandes laboratorios de hidráulica, universitarios, estatales y privados, algunos de ellos con experiencia quasi-centenaria, en los cuales, con la ayuda de poderosos, avanzados y costosos equipos de suministro de agua, cálculos matemáticos y medidas hidráulicas, permanentemente se realizan innumerables ensayos, estudios y análisis de proyectos de aprovechamientos hidráulicos de todo género.

Nada ha escapado a este moderno y concluyente enfoque de la investigación hidráulica: puertos marítimos y fluviales con todos sus problemas de oleaje, mareas, corrientes, sedimentación y erosión; centrales hidroeléctricas y grandes presas de embalse y recuperación de energía; control de inundaciones; canalización y regularización de cursos de agua navegables y no navegables; grandes obras de riego y drenaje rural y urbano; sin dejar de lado estructuras individuales (vertederos, aliviaderos, sifones, saltos, rápidas, compuertas, esclusas, canales... etc) de pequeña y gran envergadura, para todo fin; equipamiento y montaje de nuevos laboratorios; concepción de aparatos y sistemas para investigación específica; problemas de filtración y aguas freáticas; diseño y funcionamiento de todo tipo de máquinas hidráulicas; hasta incluir investigaciones sobre la circulación de la sangre en los vasos sanguíneos, el comportamiento de fluidos altamente viscosos a elevada temperatura dentro de los reactores atómicos y un sin fin de aplicaciones más, ya de alto coturno en la moderna mecánica de fluidos industrial y en la aerodinámica.

La razón para este inmenso auge que nos van dejando unos 100 años a la zaga en el mundo de la hidráulica, es la dificultad de integración de las ecuaciones y desarrollos teórico-matemáticos de la hidrodinámica para ser aplicados a la práctica cotidiana, lo cual hace que cada nuevo problema tienda a convertirse en un caso específico "sui generis" poco susceptible de generalización o extrapolación de lo ya conocido.

Es entonces el Modelo Reducido el gran puente de enlace entre las elucubraciones teóricas y las necesidades prácticas, lo cual ha permitido llamarlo simbólicamente: "la única máquina integradora de las complejas ecuaciones de la Mecánica de Flúidos Teórica, para los casos prácticos de especie".

Los autores del artículo que presentamos y el laboratorio de hidráulica del Instituto Politécnico de Zurich, pertenecen a la vanguardia mundial en las grandes adquisiciones de la hidráulica moderna; son así mismo, poco menos que creadores de la amplia aplicación de la similitud y la experimentación en modelos, a la Ingeniería de las realizaciones concretas en aprovechamientos hidráulicos.

La materia tratada es la justificación teórica a posteriori de la similitud en modelos hidráulicos fluviales a escala reducida, con fondos aluvionarios desplazables o móviles, cuando se introducen además distorsiones tanto en las escalas de reducción de dimensiones verticales y transversales respecto a las longitudinales, como en las pendientes motrices respecto al prototipo (naturaleza), esta última llamada "basculamiento" del modelo.

Vale decir que estas condiciones de experimentación son las más difíciles entre todas las técnicas de Modelo Reducido aplicado a la hidráulica. Presuponen adquiridos los principios de similitud clásica de Froude y Reynolds y la práctica de los modelos a fondo y condiciones de borde fijos. Ya han sido ampliamente corroborados sus resultados por la experiencia, no sólo de los autores, sino de otros muchos practicantes y laboratorios durante décadas en varios países, hasta el punto de haber logrado reproducciones a escala de largas evoluciones históricas en la configuración de importantes cursos de agua naturales, a título de "calibración" y confrontación de la fidelidad del modelo respecto a la naturaleza.

Parece un fuera de lugar el iniciar entre nosotros este tipo de publicaciones por lo más difícil, pero nos han movido a hacerlo así varias razones:

—El artículo tiene un invaluable enfoque práctico y los ejemplos de aplicación son sacados de la realidad inmediata del laboratorio.

—Contiene una especie de "recapitulación" sobre nociones más elementales de similitud, que podrá orientar al estudioso de estas cuestiones para que logre fácilmente completar sus conocimientos hasta el nivel requerido para esta nueva aplicación.

—Las realizaciones a que hace alusión permiten formarse una idea de la importancia de las aplicaciones del modelo reducido en hidráulica, para que sirva de motivación a estudiantes e ingenieros en relación con las posibilidades de este aspecto de la técnica.

Aprovechamos la oportunidad para insistir ante la opinión universitaria e ingenieril, sobre la necesidad que tiene el país, el departamento de Antioquia y la Universidad misma, de poseer un laboratorio capaz de estas y otras muchas realizaciones de gran importancia para el desarrollo nacional y la enseñanza de la moderna ingeniería.

## GENERALIDADES

Se puede considerar que las relaciones de similitud para ensayos de hidráulica pura en modelos reducidos en los cuales el fondo no se modifica por efecto del movimiento, ya son conocidos. A continuación se presenta un resumen de los puntos principales de esta similitud mecánica.

Para poder hablar de similitud deben ser llenadas ciertas condiciones, así:

A cada manifestación de un fenómeno debe corresponder una manifestación del otro. A cada magnitud medible del uno corresponde una magnitud medible del otro y por lo tanto, para cada magnitud debe existir el correspondiente factor de transposición.

La noción de similitud incluye la condición esencial de que este “Factor de Transposición” sea constante para todas las magnitudes de la misma naturaleza.

En el espacio, lo anterior constituye la condición de similitud geométrica de los dos fenómenos.

Aplicada a los tiempos significa que: dos fenómenos que son simultáneos en una escala, lo serán también en la otra. El intervalo de tiempo entre dos fenómenos a una escala debe ser multiplicado por el factor constante de transposición de los tiempos para que la separación entre los dos fenómenos correspondientes a la otra escala, sea bien reproducido.

En consecuencia un fenómeno en cierta forma, es un mirar el otro fenómeno a través de una lupa de tiempos. Toda magnitud física se expresa con ayuda de las unidades fundamentales longitud, tiempo y masa. Los factores de transposición de todas las magnitudes físicas pueden por lo tanto ser expresadas mediante los factores de transposición de la longitud, el tiempo y la masa, hasta tanto se trate de similitud no distorsionada de los dos fenómenos de movimiento fluido. Se puede entonces concluir que para la escogencia de los factores de transposición de un modelo, se dispone por lo menos de tres grados de libertad.

No se quiere significar que la escogencia sea totalmente libre ya que podrían existir entre estas tres relaciones, otras condiciones previas. Tales condiciones existen realmente y en gran número y aquellas que deben ser tenidas en cuenta dependen de la naturaleza específica del problema a tratar.

#### Condición impuesta por la aceleración de la gravedad:

En todos los casos en los cuales las energías cinéticas y potenciales se transforman una en otra y cuando las presiones hidráulicas tienen influencia en la forma de las secciones de flujo (diferente llenado de perfiles transversales cuando existe superficie libre), la aceleración de la gravedad debe ser calculada en igual forma que todas las otras aceleraciones. Pero como la primera no varía de una escala a la otra, todas las aceleraciones deben ser independientes de la escala, y por lo tanto:

Longitud

$$(I) \frac{\text{Longitud}}{(\text{tiempo})^2} = \text{constante, para todas las escalas.}$$

#### Condición impuesta por el peso específico (densidad):

Si se determina presiones, se utiliza la unidad de masa; ésta última viene a ser a su vez definida por el hecho de que el peso específico y, en consecuencia, la densidad del fluido (agua) son constantes e iguales en todas las escalas; se tiene pues:

Masa

$$(II) \frac{\text{Masa}}{(\text{Longitud})^3} = \text{Constante}$$

#### Condición impuesta por la viscosidad cinemática:

Si el número de Reynolds de un flujo es pequeño y nos encontramos en las cercanías de los flujos laminares, la viscosidad cinemática juega un papel y será la misma para una misma temperatura a las dos escalas. La viscosidad cinemática tiene las dimensiones de una longitud al cuadrado dividida por el tiempo; se tiene pues:

$$(III) \frac{(\text{Longitud})^2}{\text{tiempo}} = \text{Constante}$$

#### Condición impuesta por las pérdidas por fricción:

Si se trata de un flujo en el cual las pérdidas por fricción juegan un cierto papel, éstas deben corresponderse en los dos fenómenos.

Se puede escribir lo anterior expresando que la pérdida de carga que a su vez es función de la velocidad, del radio hidráulico y de la rugosidad, debe ser constante en cuanto constituye una relación (pendiente).

$$\begin{aligned} \text{(IV) Pérdida de carga} &= f(\text{velocidad, radio hidráulico, rugosidad}) \\ &= \text{Constante} \end{aligned}$$

Estas cuatro son las condiciones más importantes y serán brevemente estudiadas a continuación:

La condición (II), única que contiene la masa, sirve siempre para determinar el factor de transposición de la masa a partir de la longitud. La masa poco aparece explícitamente en problemas hidráulicos pero está contenida implícitamente en la expresión de fuerzas y presiones.

Al introducir esta relación se reduce el problema que inicialmente tenía tres grados de libertad a un problema con sólo dos grados de libertad.

Se pasa ahora a considerar la condición (I) que expresa una relación entre longitud y tiempo. Las transformaciones de energía, tal como han sido señaladas al hablar de esta condición (p. e. para curvas de remanso), se producen en todos los flujos naturales, que no son en todo rigor, flujos perfectamente normales y juegan a menudo un papel considerable.

A este respecto es necesario señalar el hecho de que la presencia de bancos de arenas o gravas en el lecho de los cursos de agua, situación que de suyo es perfectamente regular, provoca las anotadas transformaciones de energía.

De ahí que la condición (I) llegue a ser la más importante para la ejecución de ensayos en modelo reducido en el campo de las obras hidráulicas.

El problema no posee ahora sino un solo grado de libertad y, por ejemplo, la libre escogencia de la escala de longitudes, define todo el fenómeno. Mientras que la escala de masas queda definida sin ambigüedad por la condición (II) (la masa no figura en ninguna otra condición), la longitud y el tiempo permanecen unidas por las condiciones (III) y (IV) y así, la visión de conjunto se ha facilitado considerablemente si se examina la cuestión de grado de libertad con la ayuda de una representación gráfica.

Sean ( $L$ ) y ( $T$ ) la longitud y el tiempo en la naturaleza (prototipo) y sean ( $l$ ) y ( $t$ ) las magnitudes correspondientes en el modelo.

Se tiene, de acuerdo con la condición (I):

$$\frac{L}{T^2} = \frac{l}{t^2} = \text{Constante}$$

De donde:

$$\frac{L}{l} = \left( \frac{T}{t} \right)^2$$

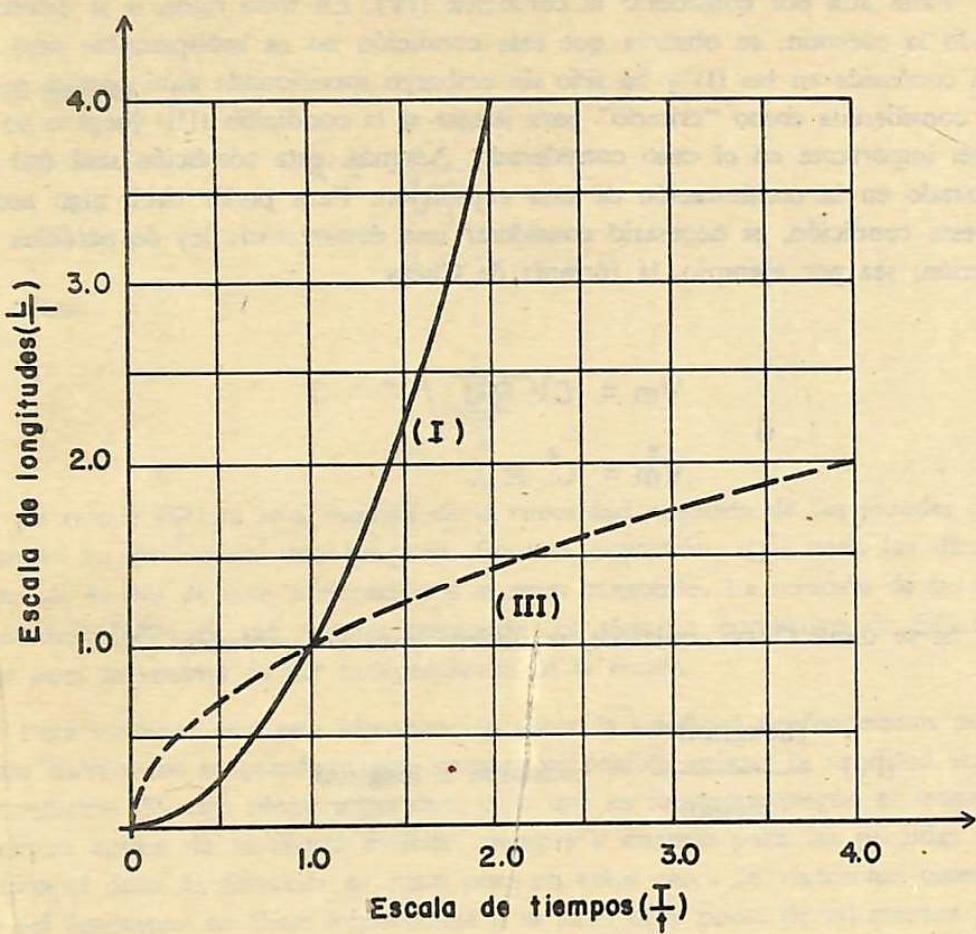
La condición (III), permite obtener:

$$\frac{L^2}{T} = \frac{l^2}{t} = \text{Constante}$$

De donde:

$$\left( \frac{L}{l} \right)^2 = \frac{T}{t}$$

Se puede representar todas las transposiciones semejantes de un fenómeno en la naturaleza (con las escalas 1 para las longitudes y los tiempos), mediante puntos en un plano (tiempo v. s. longitud), en el cual cada punto corresponde a una combinación dada de una escala de tiempos y de una escala de longitudes.



**FIGURA I**

Se ve de inmediato que cada una de las curvas de las condiciones (I), (III) y (IV) corresponde a una curva en este plano y que, en consecuencia, de las dos posibilidades sólo subsiste una. Así por ejemplo, la condición (I) es una parábola de segundo grado a eje vertical, que pasa por el origen y por el punto A. La condición (III) dibuja la misma parábola con eje horizontal.

Con esta representación se ve claramente que una reproducción "Semejante" manteniendo las condiciones (I) y (III) es imposible puesto que únicamente los dos puntos: A (prototipo) y O (sin interés porque para ese punto las escalas son nulas) responden al mismo tiempo a ambas condiciones.

Lo anterior muestra que la condición (III) y por lo tanto la viscosidad no debe jugar un papel importante ni en la naturaleza (prototipo) ni en el modelo si se debe hacer posible una reproducción semejante del fenómeno.

Falta aún por considerar la condición (IV). En todo rigor, si se estudia a fondo la cuestión, se observa que esta condición no es indispensable sino que está contenida en las (I) y ha sido sin embargo mencionada aquí porque puede ser considerada como "criterio" para juzgar si la condición (III) juega o no un papel importante en el caso considerado. Además, esta condición será útil por separado en la continuación de esta exposición. Para poder decir algo acerca de esta condición, es necesario considerar una determinada ley de pérdidas por fricción; sea por ejemplo, la fórmula de Chézy:

$$\begin{aligned} V_m &= C \sqrt{R J} \\ \text{o} \\ V_m^2 &= C^2 R J \end{aligned}$$

Si se toma  $C = \text{constante}$ , se obtiene para las unidades:

$$(IV) \quad \frac{(\text{Longitud})^2}{(\text{tiempo})^2} = \text{constante} \times \text{longitud}$$

de donde:

$$\frac{\text{Longitud}}{(\text{tiempo})^2} = \text{constante}$$

Proposición idéntica a la condición (I). Se deduce que esta ley, si ( $C$ ) fuera efectivamente constante, habría podido ser deducida de la condición (I).

Infortunadamente, ( $C$ ) no es constante sino que depende de la escala.

La mayor parte de las fórmulas de velocidad media vienen establecidas a partir de esta fórmula fundamental y dan como término correctivo una función para variación del valor de ( $C$ ). Todos los ensayos en modelo del laboratorio de hidráulica de Zurich con fondo de gravas de diámetro de granos superior a 2 m.m., al igual que numerosas medidas en ríos con cauce de gravas, han confirmado el término correctivo de Strickler:

$$C = K \sqrt[6]{R}$$

o también:

$$K = \frac{C'}{\sqrt[6]{\rho}}$$

o sea:

$$C = C' \sqrt[6]{\frac{R}{\rho}}$$

En donde ( $\rho$ ) es una medida de la rugosidad absoluta de las paredes que es, según su dimensión, una longitud. En esta expresión, ( $C'$ ) tiene las dimensiones de la raíz de una aceleración y es pues constante. La relación de las dos longitudes ( $R/\rho$ ) es, así mismo constante. El término correctivo de Strickler tiene pues la ventaja de ser independiente de la escala.

Para terminar con esta introducción sobre la similitud de fenómenos puramente hidráulicos se concluye que siempre es posible aplicar la similitud según la condición (I), con plena seguridad, o lo que es lo mismo según el lenguaje corriente, aplicar la similitud Froude, siempre y cuando para las pérdidas por fricción el dato de Strickler es justo pues en estos casos la viscosidad cinemática del fenómeno no tiene importancia o la tiene muy poco, de tal manera que sólo deben mantenerse las condiciones (I) y (II).

### ENSAYOS EN MODELOS FLUVIALES A FONDO MOVIL

**Materiales aluvionarios con el mismo peso específico en la naturaleza (prototipo) y en el Modelo.**

Las condiciones serán más complicadas puesto que a las anteriores se agregan otras.

Para empezar: la iniciación del movimiento de los materiales debe presentarse para flujos correspondientes. En esta condición (V) la cantidad de materiales arrastrados no aparece como variable. De nuevo se trata sólo de una relación entre magnitudes hidráulicas.

A continuación, el aumento de caudal sólido a partir del estado límite de iniciación del movimiento, a medida que se incrementa el caudal líquido, debe corresponder en las dos escalas. Como no se quiere establecer ninguna hipótesis sobre la manera de recalcular las cantidades de materiales de arrastre, se puede utilizar esta condición (VI) para establecer la escala de caudales sólidos.

Al examinar los fenómenos de arrastre de materiales aluvionarios mediante caudales líquidos variables, se representa siempre la totalidad del fenómeno como una sucesión de estados estables particulares. Se establece así la hipótesis de que el paso de un caudal líquido a otro se hace siempre en forma suficientemente lenta para que el flujo pueda ajustarse continuamente. En este caso, se debe vigilar que la duración de cada estado estable, es decir, la escala de los tiempos, sea correctamente escogida.

Si se utiliza para un ensayo una escala de tiempos incorrecta, el hecho se manifiesta ante todo por la circunstancia de que los bancos de aluviones recorren en tiempos correspondientes, caminos y distancias diferentes a los seguidos en la naturaleza. La escogencia de una escala de tiempos incorrecta sobresale de inmediato y es interesante anotar además que incluso la forma de las playas y bancos de aluviones muestra ciertas modificaciones que no han sido aún completamente explicadas pero que, de otra parte, resaltan la importancia de la escala de tiempos. Por esta razón se introduce una condición (VII) para el control de la escala de los tiempos, que dice:

"Los cambios de fondos correspondientes debidos al movimiento de los materiales aluvionarios, deben producirse en tiempos correspondientes".

Se aprecia así que cuando hay movimientos de materiales sólidos, además de las condiciones (I) y (II) o bien (IV) y (II) para los ensayos puramente hidráulicos, es necesario satisfacer otras tres condiciones y se tiene entonces un nuevo grado de libertad: la manera de efectuar la transposición del caudal sólido.

En consecuencia, para que puedan ser ejecutados ensayos en modelo, con transporte de materiales sólidos, es necesario que sea posible hacer que concuerden dos de las nuevas condiciones con la condición (I).

Al igual que para el estudio de las pérdidas de carga por fricción, se debió partir de una determinada fórmula de velocidad, para estas consideraciones sobre el transporte sólido se debe admitir una determinada ley de caudal sólido.

Las investigaciones sobre arrastre de materiales aluvionarios del laboratorio de hidráulica de Zurich han demostrado que para números de Reynolds suficientemente grandes para el caudal líquido y el caudal sólido, se tiene una ley de la siguiente forma:

$$\frac{J_e q^{2/3}}{d} = a + b \frac{g^{2/3}}{d}$$

En donde ( $J_e$ ) pérdida de carga

- (q) caudal líquido por segundo y por metro de ancho
- (g) caudal sólido por segundo y por metro de ancho

- (d) diámetro medio de los aluviones, en metros  
 (a) y (b) constantes características para el material.

Si se toma esta ley como base para la consideración de la similitud, la condición de iniciación del arrastre de materiales es:

$$g = 0$$

Con lo cual ( $q$ ), que está expresado en la fórmula en  $\text{Kg/s/m}$ , en razón de la constancia del peso específico del agua, puede ser tomado como volumen por metro y por segundo, mientras (d) es una longitud y (a) una constante.

Con lo anterior, se tiene:

$$(V) \left[ \frac{(\text{longitud})^3}{\text{longitud} \times \text{tiempo}} \right]^{2/3} \times \frac{1}{\text{longitud}} = \frac{(\text{longitud})^{1/3}}{(\text{tiempo})^{2/3}} = \text{constante}$$

lo cual no es otra cosa que la condición (I).

La primera de las tres nuevas condiciones queda así satisfecha y se pasa a utilizar la segunda que dice que el tercer término de la ecuación del caudal sólido se calcula en la misma forma que los otros dos, para establecer la escala de caudales sólidos, que es el nuevo grado de libertad.

Este término, que es de la forma:

$$b \frac{g^{2/3}}{d}$$

Debe pues ser independiente de la escala y como (b) lo es de suyo, ( $g$ ) debe comportarse como una longitud a la potencia ( $3/2$ ), a condición que sean empleados en el modelo materiales sólidos que tengan el mismo peso específico que los de la naturaleza. Se puede pues escribir:

$$(VI) \text{ Caudal sólido} = \text{constante} \times (\text{longitud})^{3/2}$$

Ahora deben ser introducidas las diferentes escalas en la tercera condición y proceder a satisfacerla.

Esta última igualdad debe expresar que: "volúmenes de arrastres de fondo correspondientes deben ser transportados por caudales sólidos correspondientes, en tiempos correspondientes".

Del hecho de que el caudal sólido esté referenciado a la unidad de tiempo y a la unidad de ancho, se tiene:

$$\text{Volumen} = \text{caudal sólido} \times \text{longitud} \times \text{tiempo}$$

o lo que es lo mismo:

$$\bullet \quad (\text{longitud})^3 = (\text{Longitud})^{3/2} \times \text{constante} \times \text{longitud} \times \text{tiempo}$$

o también:

$$\frac{(\text{Longitud})^{1/2}}{\text{tiempo}} = \text{constante}$$

Lo cual concuerda de nuevo con la condición (I).

Todo esto ha sido posible porque las dos constantes (a) y (b) para el caso de materiales de arrastre de peso específico igual en prototipo y modelo se han mostrado independientes de la escala.

En consecuencia, es necesario que el caudal sólido específico sea recalculado como un caudal específico líquido, lo cual es de suyo plausible y la escala de tiempos, es según la condición (I), igual a la raíz cuadrada de la escala de longitudes.

Esta similitud simple y exacta ha podido ser indicada como un método ideal de reproducción del fenómeno puesto que es respetada la similitud hasta en sus mínimos detalles. Se evidencia lo anterior al considerar que para una perfecta similitud del material sólido, tanto el diámetro de los aluviones que determina la rugosidad absoluta ( $f$ ) como el diámetro ( $d$ ) que determina las condiciones de transporte sólido según la fórmula de caudal sólido, son ambos semejantes en la naturaleza y en el modelo.

Lo anterior presenta como consecuencia que, no sólo la cantidad total ( $g$ ) de materiales transportados por segundo es reproducida con exactitud, sino que además son reproducidos los detalles del flujo como p. e. los fenómenos de repartición de los aluviones según su grosor en el caso de mezclas de materiales aluviales, el efecto local de obras hidráulicas, etc.

Pero, infelizmente, esta forma de reproducción ideal de los fenómenos sólo es posible en casos particulares de cursos de agua relativamente pequeños, con materiales aluviales de grano grueso y por lo tanto con una pendiente relativamente grande, como lo demostrará el siguiente ejemplo:

Sea el caso de estudiar un río de 50 a 100 m. de ancho, poseedor de bancos de grava de 200 m. a 400 m. de longitud y cuyo fondo aluvionario está constituido por una mezcla de elementos de 0 a 150 m.m. de grueso y está sometido a fuerte arrastre en forma tal que los bancos aluviales de grava se desplazan. El diámetro "determinante" de los elementos de la mezcla, es decir, el del material de elementos homogéneos que daría lugar al mismo caudal sólido, sería de unos 12 m.m.

Si se quiere estudiar los cambios de este río y en especial su perfil longitudinal, se debe reproducir por lo menos un tramo de 3 km. a 4 km., lo cual exige una escala del orden de 1/100. En estas condiciones, el modelo tendrá una longitud de 30 m. a 40 m. y un ancho de 0.50 m. a 0.60 m. Todo con-

viene bien pero los elementos aluvionarios tendrían entre 0 y 1.5 m.m. y el diámetro determinante sería de 0.12 m.m. lo cual, según la experiencia del laboratorio de hidráulica de Zurich es muy bajo ya que un material tan fino se mueve siguiendo leyes diferentes a las aludidas.

Por otra parte, la escala de tiempos sería 1/10 lo que significa que la reproducción de un año durante el cual se tendrían cerca de 200 días de transporte de materiales, duraría 480 horas.

Lo anterior es totalmente prohibitivo pues las variaciones en el lecho de un río sólo pueden ser previstas después de un período de varios años y este mismo período debe ser reproducido en repetidas oportunidades para poder distinguir las diversas influencias.

En consecuencia, un estudio de este tipo duraría por lo menos varios años.

La situación parece desesperada ya que desde el punto de vista del diámetro de los elementos, la escala debería ser aumentada mientras que desde el punto de vista de la duración de los ensayos, la escala debería ser disminuida y en cada caso, la variación debería ser por lo menos 10 veces para cada uno de los dos puntos de vista.

### **ENsayos en Modelos Fluviales a Fondo Movil**

#### **Materiales aluvionarios con peso específico menor en el modelo**

Para cumplir estas dos condiciones en el modelo se debería disponer de un material que con todo y ser más grueso se desplace más rápidamente. La experiencia ha demostrado que esta condición puede ser satisfecha utilizando en el modelo un material de peso específico menor y que para el caso del ejemplo precedente ha sido polvo de lignito (carbón).

Se renuncia así concientemente a la similitud geométrica en lo que respecta a la rugosidad absoluta y las consecuencias de esta distorsión van a ser ahora estudiadas.

Mediante diferentes modelos de ríos en las dimensiones indicadas antes se ha encontrado una buena concordancia con la naturaleza en lo que hace a la configuración de fondos y movimientos de los bancos de aluviones, para las condiciones siguientes:

—Modelo a escala 1:100

—Polvo de lignito (carbón) a escala de aproximadamente 1:10 del prototipo, en lugar de 1:100.

—Escala de tiempos del caudal líquido 1:10.

—Escala de tiempos del caudal sólido de aproximadamente 1:300 a 1:500 en lugar de 1:10.

Con lo anterior, las pendientes longitudinales se encontraron levemente distorsionadas. Así mismo, los perfiles transversales no fueron siempre exactamente semejantes sino un poco distorsionados en altura. A pesar de estas distorsiones, que como se verá más adelante, son indispensables para equilibrar la distorsión de la rugosidad, se puede sin embargo en todos los casos hablar prácticamente de similitud y después de que otros laboratorios de investigación han realizado esta experiencia, los autores de este artículo se han impuesto la tarea de justificar físicamente este tipo de similitud como se ha venido haciendo hasta el presente para otros problemas. Ya que conscientemente se ha dejado de lado la similitud mecánica-rigurosa, no se hablará más en lo sucesivo de fenómenos "semejantes" sino de fenómenos "correspondientes".

Como se verá más adelante, con el empleo de materiales de peso específico menor, sólo existe un caso particular en el cual es posible obtener la similitud mecánica en el modelo aún sin distorsión.

Para empezar, se introducen entonces, para efecto de las discusiones que siguen, además de los dos tiempos diferentes (para el movimiento del agua y para los movimientos de los materiales sólidos), factores de transposición diferentes para las longitudes, los anchos y las alturas.

El siguiente cuadro presenta una recapitulación de las magnitudes necesarias. Las mayúsculas corresponden a la naturaleza (prototipo) y las minúsculas al modelo:

Longitudes .....	$L = \lambda \times l$
Anchos .....	$B_r = \emptyset \times b_r$
Alturas .....	$H = \chi \times h$
Pendientes (de la línea de energía) .....	$J_e = \xi \times j_e$
Tiempos hidráulicos .....	$T = \mathcal{T} \times t$
Tiempo para variaciones de fondo .....	$T = \Theta \times t'$
Masas .....	$M = \mu \times m$
Diámetro de los elementos aluvionarios .....	$D = \delta \times d$
Valor de la constante K de Strickler .....	$C' = \mathcal{C} \times c'$
Primera constante en la ley del caudal sólido .....	$A = \alpha \times a$
Segunda constante en la ley del caudal sólido .....	$B = \beta \times b$
Peso específico de los materiales de arrastre de fondo (pesados bajo el agua) .....	$R_g'' = \eta \times r_g''$

Según este cuadro pueden deducirse las otras magnitudes compuestas que intervienen. Así, según las definiciones, se tienen las siguientes relaciones:

1. La relación de velocidades longitudinales promedias:

$$(1) \quad \frac{V}{v} = \varepsilon = \frac{\lambda}{\tau}$$

2. La relación entre los caudales totales de agua por segundo:

$$(2) \quad \frac{Q_{tot}}{q_{tot}} = \psi = \chi \phi \varepsilon = \frac{\chi \phi \lambda}{\tau}$$

3. La relación entre los caudales líquidos específicos, por segundo y por metro de ancho:

$$(3) \quad \frac{Q}{q} = \chi \varepsilon = \chi \frac{\lambda}{\tau}$$

4. La relación entre los volúmenes:

$$(4) \quad \frac{V_{ol}}{Vol} = \lambda \phi \chi$$

En los problemas fluviales con transporte de materiales sólidos a menudo se trata de flujos en los cuales el ancho es, con mucho, mayor que la profundidad. Por esta razón se formula la hipótesis de que el radio hidráulico se calcula como una profundidad de agua, o sea:

$$(5) \quad \frac{R}{r} = \chi$$

Estas cinco ecuaciones conjuntamente con el cuadro general, definen todas las magnitudes necesarias.

El problema siguiente consiste en expresar las condiciones (I) a (VII) antes discutidas, de tal manera que puedan ser empleadas, a título de ecuaciones de condición, para el establecimiento de los factores de transposición del cuadro general al igual que para los valores representados por las ecuaciones (1) a (5).

#### Condición de la aceleración debida a la gravedad:

En similitud rigurosa para que cada aceleración se calcule como la de la gravedad, la condición es:

$$(I) \frac{\text{Longitud}}{(\text{tiempo})^2} = \text{constante}$$

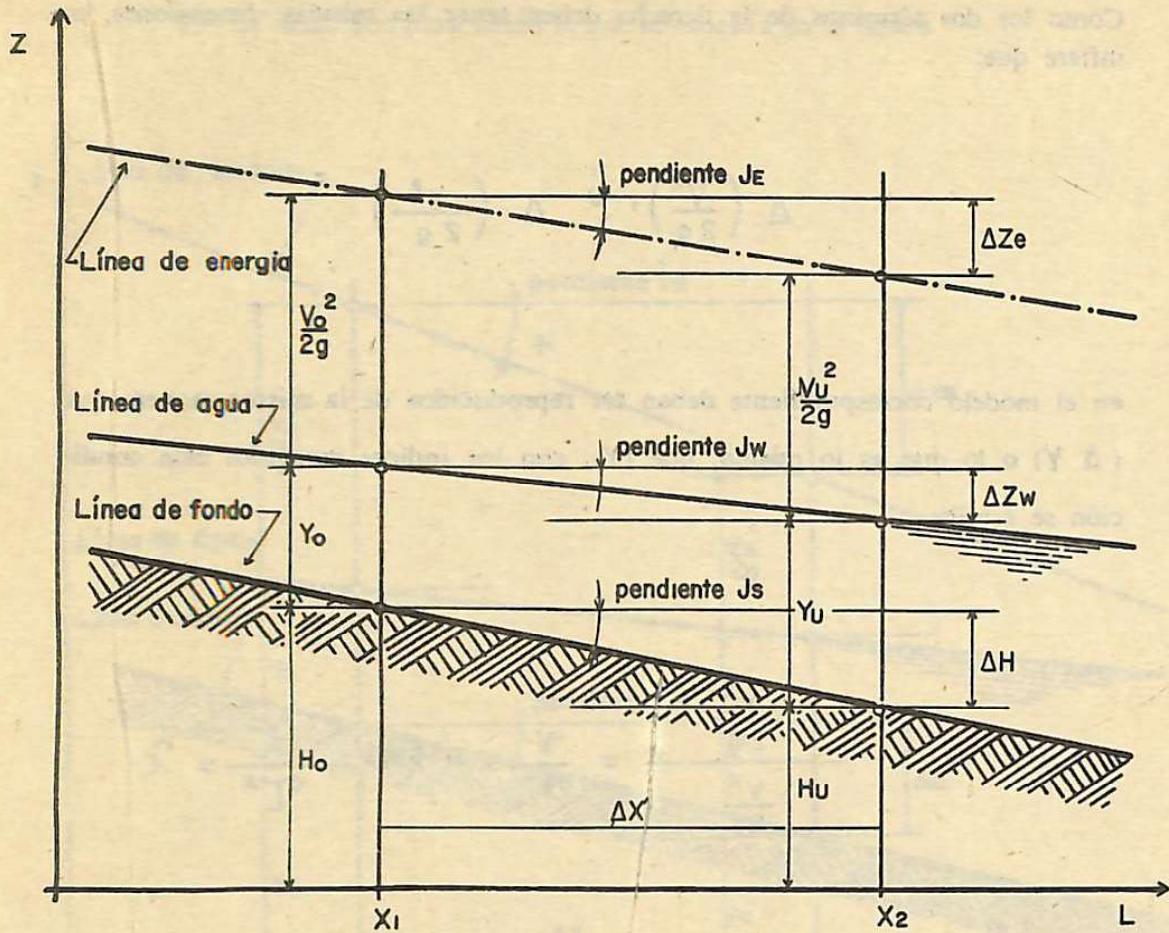
Si se quiere formular esta condición para la reproducción "correspondiente", la cuestión es de saber si se debe tomar como "longitud" una longitud, un ancho o una altura, es decir, si se debe escribir:

$$\frac{\lambda}{\tau^2} = 1 \quad , \text{ o bien } \frac{\phi}{\tau^2} = 1 \quad , \text{ o finalmente } \frac{\chi}{\tau^2} = 1$$

Una solución a esta cuestión sería posible si se supiera cuál de las aceleraciones es preponderante: en longitud, en ancho o en altura.

Una ayuda es suministrada por la hidráulica corriente, la cual, con todo y utilizar únicamente magnitudes promedias, obtiene resultados satisfactorios:

La aparición de aceleraciones y desaceleraciones en el caso de pendientes pequeñas, con variaciones de sección transversal no muy bruscas, viene expresada con suficiente exactitud por el teorema de Bernoulli. Al aplicar éste a las condiciones en la naturaleza (prototipo) como se muestra en la figura, se tiene:



**FIGURA 2**

$$H_o + Y_o + \frac{V_o^2}{2g} = H + Y_u + \frac{V_u^2}{2g} + \Delta Z e$$

$$(H_o - H_u) - \Delta Z e = (Y_u - Y_o) + \frac{V_u^2 - V_o^2}{2g}$$

$$\frac{\Delta H}{\Delta X} - \frac{\Delta Z e}{\Delta X} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} + \frac{\Delta}{\Delta X} \left( \frac{V^2}{2g} \right)$$

o sea

$$J_s - J_e = \frac{\Delta Y}{\Delta X} + \frac{\Delta}{\Delta X} \left( \frac{V^2}{2g} \right)$$

Como los dos términos de la derecha deben tener las mismas dimensiones, se infiere que:

$$\Delta \left( \frac{v^2}{2g} \right), \text{ o } \Delta \left( \frac{v^2}{2g} \right)$$

en el modelo correspondiente deben ser reproducidos de la misma manera que ( $\Delta Y$ ) o lo que es lo mismo, que ( $Y$ ); con los índices escogidos esta condición se escribe:

$$(I^*) \quad \frac{\frac{v^2}{2g}}{\frac{v^2}{2g}} = \frac{Y}{y}, \text{ o sea: } \frac{\lambda^2}{\tau^2} = \chi$$

Esta condición no es tan general como la condición (I) pero se reduce a ella para ( $\chi = \lambda$ ), de tal suerte que por lo menos para una débil distorsión ( $\chi \approx \lambda$ ) la consideración de la aceleración de la gravedad es tomada en cuenta con una suficiente precisión.

Además, la ecuación de Bernoulli da lugar a la relación:

$$\frac{j_s - j_e}{l_s - l_e} = \frac{\chi}{\lambda}$$

Según la cual existen dos posibilidades de modelos "correspondientes", a saber:

1) - La distorsión pura como la que se muestra en la figura

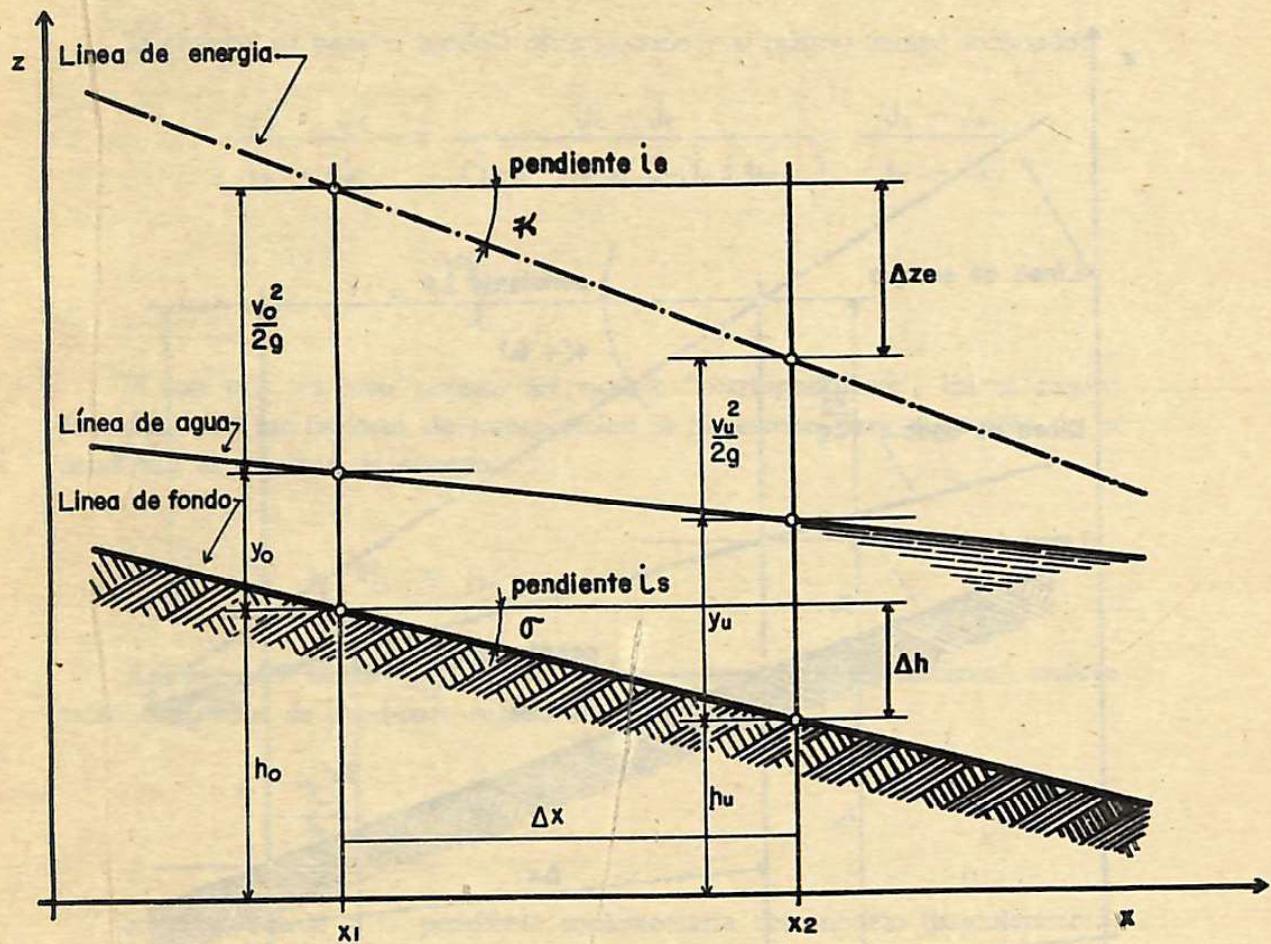


FIGURA 3

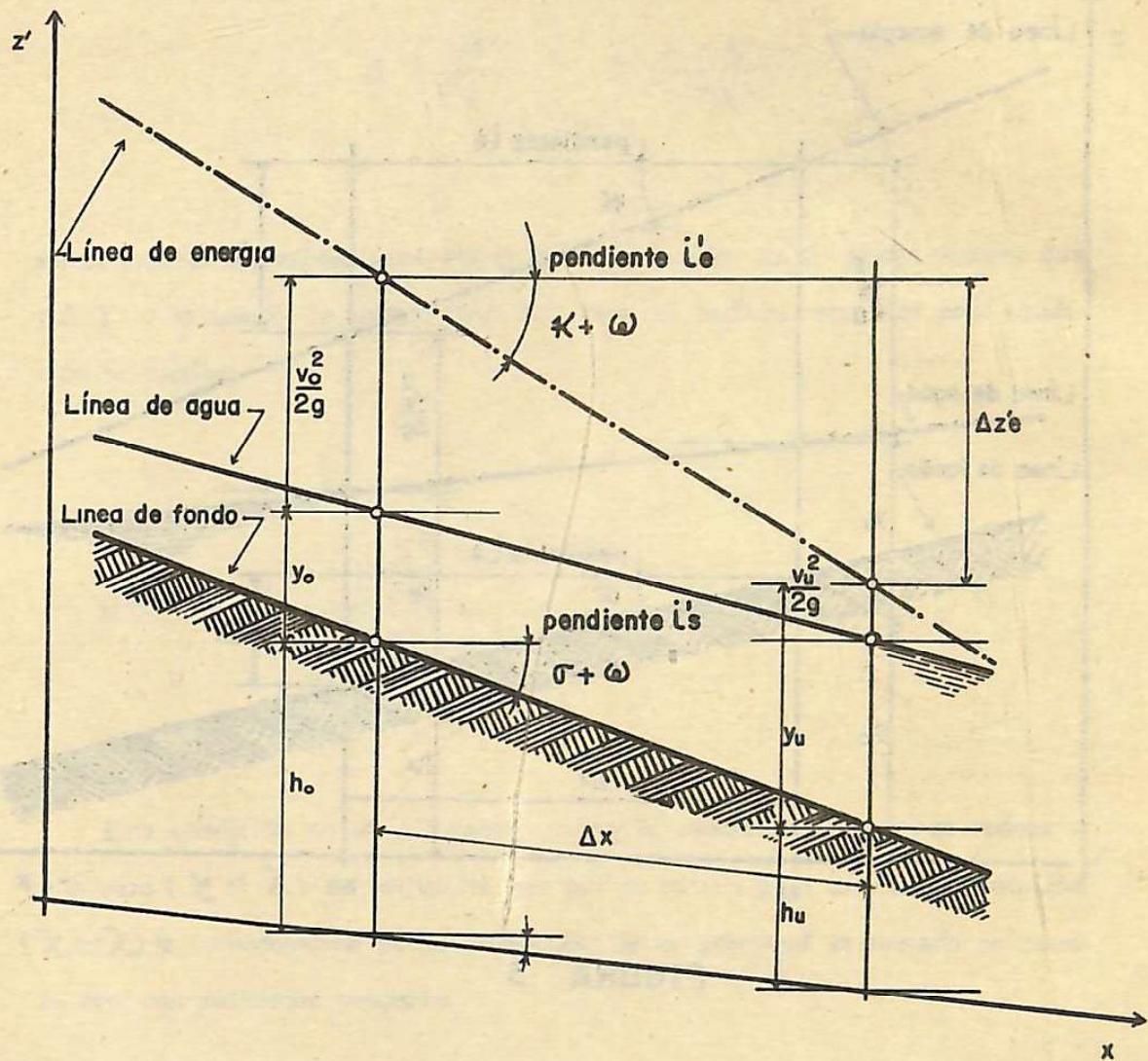
En este caso se tiene:

$$\frac{j_s}{i_s} = \frac{\Delta H}{\Delta h} \times \frac{\Delta x}{\Delta X} = \frac{\chi}{\lambda}$$

$$\frac{j_e}{i_e} = \frac{\Delta Z_e}{\Delta z_e} \times \frac{\Delta x}{\Delta X} = \frac{\chi}{\lambda}$$

$$\frac{j_s - j_e}{i_s - i_e} = \frac{\chi}{\lambda} \cdot \frac{i_s - i_e}{i_s - i_e} = \frac{\chi}{\lambda}$$

2) - La distorsión y simultáneamente, cambio de las pendientes del modelo distorsionado:



## **FIGURA 4**

Si se denomina en este caso ( $|_s$ ) como ( $\tan \Gamma$ ); ( $|_e$ ) como ( $\tan \chi$ ) y la pendiente adicional se denomina ( $\omega$ ), las pendientes correspondientes serán:

$$i_s = t_{an} (\sigma \pm \omega) \approx t_{an} \sigma \pm t_{an} \omega$$

$$i_e = \tan(\kappa + \omega) \approx \tan \kappa \pm \tan \omega$$

Puesto que en el caso práctico general las pendientes existentes son pequeñas y la pendiente suplementaria ( $\tan \omega$ ) se toma como del mismo orden de magnitud.

Se obtiene así para el modelo distorsionado y al mismo tiempo inclinado:

$$\frac{J_s - J_e}{i'_s - i'_e} = \frac{J_s - J_e}{(i_s \pm \tan \omega) - (i_e \pm \tan \omega)} = \frac{J_s - J_e}{i_s - i_e}$$

$$= \frac{\chi}{\lambda}$$

Y con esto, el caso general del modelo "correspondiente". En el cuadro precedente de los factores de transposición se ha escrito para el cambio de la pendiente de la línea de energía:

$$J_e = \xi \times i_e$$

Así pues, el factor ( $\xi$ ) en el modelo general "correspondiente" incluye tanto el cambio de pendiente debido a la distorsión:

$$\left( \frac{\chi}{\lambda} \right)$$

como el debido a la pendiente suplementaria del modelo (basculamiento) del modelo distorsionado: ( $\tan \omega$ ). El primer caso de la distorsión pura se obtiene así para

$$\xi = \frac{\chi}{\lambda}$$

Si  $\xi \neq \frac{\chi}{\lambda}$  hay distorsión con cambio de pendiente y es de anotarse que  $\xi = 1$  ya no es válido como criterio para un modelo no distorsionado, geométricamente semejante, si no se tiene al mismo tiempo:

$$\chi = \lambda$$

Pero esto muestra igualmente que se puede efectivamente introducir un factor de transposición independiente de ( $\lambda$ ), ( $\phi$ ) y ( $\chi$ ) para la pendiente de la línea de energía ( $\xi$ ).

No obstante lo anterior supone una pendiente aproximadamente uniforme de la línea de energía en la naturaleza y en el modelo. Si esta condición no se cumple o si se cumple mal, no se tiene el derecho en la escogencia de escala, de separarse mucho del caso de distorsión pura sin basculamiento.

Para juzgar la naturaleza de la distorsión de un modelo formado por ensayos prolongados, aparentemente se presenta una dificultad. En cierta medida, es posible determinar ( $\xi$ ) y ( $\chi$ ) pero aparentemente no se puede determinar ( $\lambda$ ). Se tiene entonces el recurso de la formación de bancos de aluviones que son típicos en estas investigaciones y cuya longitud comparada a la naturaleza sirve para definir la escala de ( $\lambda$ ).

Se puede determinar ( $\frac{\lambda}{\chi}$ ) y ( $\xi$ ) por comparación entre la naturaleza y el modelo y se obtiene:

$$\frac{J_e}{\frac{\lambda}{\chi} J_e + \tan \omega} = \xi \quad \text{pendiente suplementaria } (\tan \omega) \text{ del modelo distorsionado.}$$

La siguiente relación que es simultáneamente válida:

$$\frac{J_s}{I'_s} = \frac{J_s}{\frac{\lambda}{\chi} J_s + \tan \omega}$$

suministra a su vez el control para la exactitud de las medidas de

( $\xi$ ), ( $\chi$ ) y ( $\lambda$ ).

#### Condición de densidad

Si se emplea agua en el modelo al igual que en la naturaleza, la densidad del fluido es la misma para las dos escalas. La relación de masas correspondientes dividida por la relación de volúmenes es pues igual a 1:

$$(II^*) \quad \frac{\mu}{\lambda \phi \chi} = 1$$

#### Condición de viscosidad cinemática

Se supone que también en el modelo la influencia de la viscosidad cinemática puede ser despreciada. Las consideraciones siguientes sobre la posibilidad de emplear la ley de pérdidas por fricción de Strickler permiten prever que esta hipótesis es admisible para números de Reynolds en el modelo superiores o aproximadamente iguales a 2.000.

### Condición de Pérdidas de carga

Para granos de lignito (carbón) con diámetro medio muy pequeño (por encima de 1 m.m. ó 2 m.m.) se ha encontrado en el laboratorio de hidráulica de Zurich que la fórmula de Strickler para:

$$r_e = \frac{r \cdot v}{\nu} \gtrsim 2000$$

es utilizable. El valor de:

$$c' (\zeta = \frac{c'}{\sqrt{\rho}})$$

Para pequeños valores del número de Reynolds depende en cierta medida de éste, pero para un ensayo determinado se puede dar como valor medio (ver las figuras Nº 5).

El hecho de que tal sea el caso hasta  $r_e \approx 2.000$  es debido a la rugosidad relativamente muy grande que resulta del empleo de materiales con granos gruesos (elementos).

Como el valor de ( $C'$ ) en la naturaleza puede ser considerado como una constante dada, se tiene para el valor de ( $\zeta$ ) la igualdad simbólica siguiente:

$$(6) \quad \frac{C'}{c'} = \zeta = f_1 (\text{material, } d, r_e)$$

La condición de pérdida de carga por fricción puede expresarse por medio de la fórmula de Strickler. Con los factores de transposición ya introducidos y con el empleo de las igualdades (1) y (5), se encuentra:

$$\frac{\lambda}{\tau} = \zeta \times \rho^{-1/6} \times \xi^{1/2} \times \chi^{2/3}$$

y es de anotar a este respecto que el ( $\rho$ ) introducido por Strickler y que él mismo definió como la medida de la rugosidad absoluta determinante, se introduce aquí como una "relación" de esas rugosidades absolutas. Según Strickler se puede reemplazar la rugosidad por el tamaño de los granos, es decir, ( $\rho$ ) por ( $\delta$ ) de tal suerte que la condición de pérdidas de carga por fricción se escribe:

$$(IV^*) \quad \frac{\lambda}{\tau} = \zeta \times \delta^{-1/6} \times \xi^{1/2} \times \chi^{2/3}$$

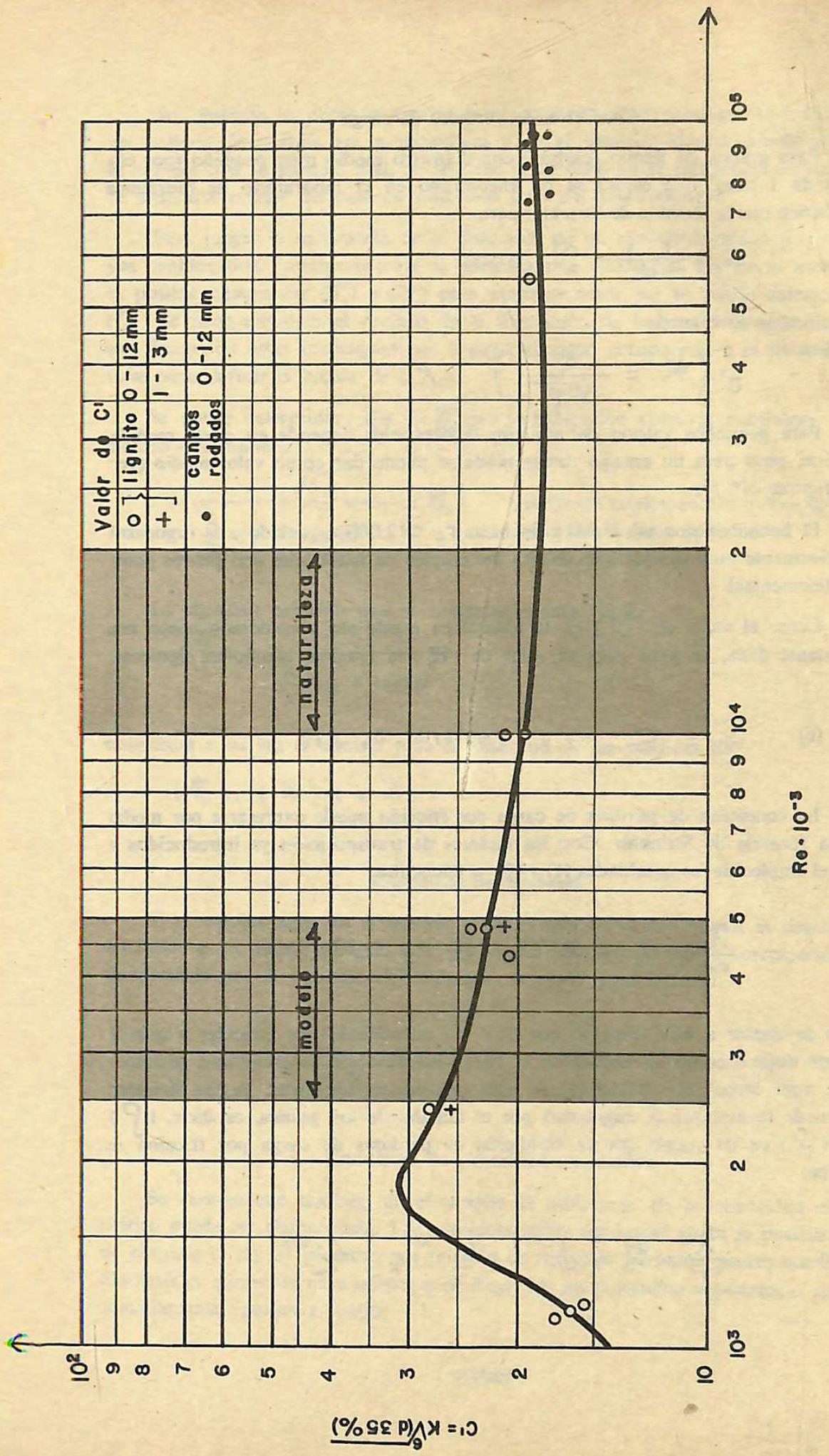


FIGURA 5

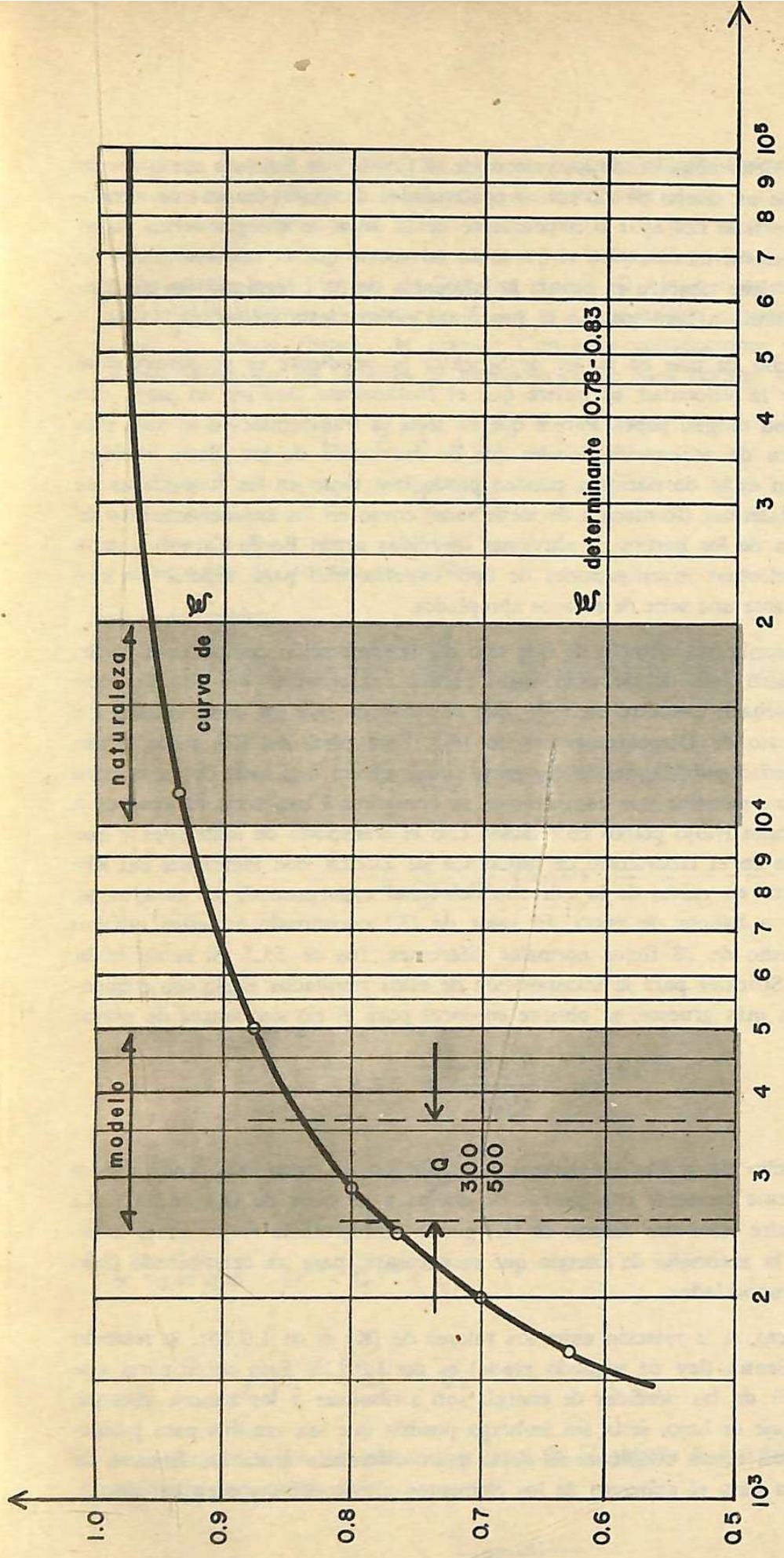


FIGURA 5

Para la determinación de los valores de (K) o (C') de Strickler comunmente se dispone de un tramo de río con irregularidades de fondo (bancos de aluviones). La superficie del agua o la pendiente de la línea de energía vienen dadas sólo como valores medios para el tramo de tal suerte que el valor calculado de la rugosidad tiene también en cuenta la influencia de las irregularidades del fondo. Por lo tanto, a continuación se procurará estimar esta influencia.

Del hecho de que en la ley de Strickler la pendiente es proporcional al cuadrado de la velocidad, se infiere que el frotamiento laminar no juega con toda seguridad ningún papel. Parece que en toda la transformación se trata más de fenómenos de aceleración locales que de desviación de los filetes líquidos. Pero también estas desviaciones pueden producirse tanto en las rugosidades de las paredes laterales (formación de torbellinos) como en los ensanchamientos de sección cerca de los bancos de aluviones (pérdidas según Borda-Carnot) y sería interesante efectuar investigaciones de tipo experimental para separar los dos efectos mediante una serie de ensayos apropiados.

Se transcribe un ejemplo de este tipo de determinación comparativa: el Sr. Bohi, Ingeniero Jefe del Servicio Suizo para la canalización del Río Rin con sede en Rorschach encontró en 1933 que el valor de (K) del canal central del Rin en el paso de Diepoldsauer era de 36,3. Esta parte del Rin posee, como es de notoriedad pública, bancos de gravas cuyo efecto está incluido en la cifra indicada. Para permitir una comparación se considerará una serie de ensayos a dos dimensiones (flujo plano) en relación con el transporte de materiales y que fue realizada en el laboratorio de hidráulica de Zurich, con materiales del Rin a escala 1:10; en razón de lo estrecho del canal experimental, los ensayos no dieron lugar a bancos de grava. El valor de (K) encontrado en estos ensayos como promedio de 28 flujos normales diferentes, fue de 55,5. Si se aplica la fórmula de Strickler para la transposición de estos resultados al río con elementos 10 veces más gruesos, se obtiene entonces para el río sin bancos de grava:

$$K = \frac{55.5}{\sqrt[6]{10}} = 37.8$$

Este lecho de gravas sin bancos sería apenas un poco más "liso" que el lecho realmente existente con bancos de gravas y el valor de (K) de 36,3. La diferencia entre estos dos valores de (K) puede representarse mejor como la diferencia en la absorción de energía que es necesaria para un determinado flujo con las dos rugosidades.

En efecto, si la relación entre los valores de (K) es de 1:0.961, la relación de las pendientes (ley de segundo grado) es de 1:0.923. Esto confirmaría que sólo el 7,7% de las pérdidas de energía son atribuibles a los bancos. Aunque este porcentaje es bajo, sería sin embargo posible que sea sensible para problemas prácticos, como consecuencia de la gran diferencia entre los factores de transposición para el diámetro de los elementos aluvionarios y para las alturas.

Para apreciar este efecto se hará un pequeño cálculo aproximado. Se trata entonces de descomponer la absorción de energía en el río ( $J$ ) y en el modelo ( $i$ ), en una primera parte, debida a la rugosidad ( $j_1$ ) e ( $i_1$ ), y otra parte debida a la forma ( $j_2$ ) e ( $i_2$ ) y se va a suponer que estas dos partes pueden ser expresadas mediante la fórmula de Strickler y sean ( $D_1$ ) y ( $d_1$ ) las medidas para el grueso de los granos aluvionarios, ( $D_2$ ) y ( $d_2$ ) una medida similar para las variaciones de forma (bancos de gravas). Con estas convenciones aparece que es necesario escoger los factores de transposición de tales valores, así:

$$D_1 = \delta \times d_1$$

$$D_2 = \alpha \times d_2$$

y la ecuación de Strickler se escribe:

en la naturaleza:

$$J = j_1 + j_2 = \frac{V^2}{C^{1/2}} R^{-4/3} D_1^{1/3} + \frac{V^2}{C^{1/2}} R^{-4/3} D_2^{1/3}$$

$$= \frac{V^2}{C^{1/2}} R^{-4/3} (D_1^{1/3} + D_2^{1/3})$$

$$= \frac{V^2}{C^{1/2}} R^{-4/3} D^{1/3} \quad - - - - - \quad (a)$$

en el modelo:

$$i = i_1 + i_2 = \frac{V^2}{C^{1/2}} r^{-4/3} (d_1^{1/3} + d_2^{1/3})$$

$$= \frac{V^2}{C^{1/2}} r^{-4/3} d^{1/3} \quad - - - - - \quad (b)$$

Se sigue que:  $D^{1/3} = D_1^{1/3} + D_2^{1/3}$

$$\text{y } d^{1/3} = d_1^{1/3} + d_2^{1/3}$$

Dividiendo las dos ecuaciones (a) y (b) se obtiene la ecuación de los factores de transposición:



$$\xi = \frac{\varepsilon^2}{\xi^2} \chi^{-4/3} \frac{D_1^{1/3} + D_2^{1/3}}{d_1^{1/3} + d_2^{1/3}}$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{\xi^2} \chi^{-4/3} \left[ \frac{1}{\left( \frac{D_1}{D} \right)^{1/3} \frac{1}{\delta^{1/3}} + \left( \frac{D_2}{D} \right)^{1/3} \frac{1}{\chi^{1/3}}} \right]$$

y como por hipótesis, la ecuación de Strickler puede escribirse separadamente para cada parte, se tiene:

$$\frac{V^2}{C'^2} R^{-4/3} = \frac{J}{D^{1/3}} = \frac{J_1}{D_1^{1/3}} = \frac{J_2}{D_2^{1/3}}$$

y en consecuencia:

$$\xi = \frac{\varepsilon^2}{\xi^2} \chi^{-4/3} \left[ \frac{1}{\left( \frac{J_1}{J} \right) \frac{1}{\delta^{1/3}} + \left( \frac{J_2}{J} \right) \frac{1}{\chi^{1/3}}} \right]$$

La expresión entre corchetes tiene por resultado el valor de ( $\rho^{1/3}$ ) para los casos de resistencia por fricción y resistencia de forma combinadas, con las hipótesis formuladas anteriormente. Si se tiene por ejemplo el caso del Rin, para el cual la repartición de energía ya ha sido estimada antes, y se quiere construir un modelo con escala de alturas 1:100 ( $\chi = 100$ ), con el empleo de materiales menos pesados, a escala de 1:10 ( $\delta = 10$ ), se encuentra que con un 10% de efecto de forma  $\rho = 11.7$ ; con un 20% de efecto de forma  $\rho = 14.1$ , contra 10 para 0% de efecto de forma.

### Condición de transporte de materiales

En el laboratorio de hidráulica de Zurich se han hecho ensayos sistemáticos con gránulos de lignito (carbón). Estos ensayos han mostrado que la ley de arrastre de materiales establecida mediante ensayos con gravas es también aplicable a los aluviones en carbón y que sólo las constantes (a) y (b) cambian. Es de anotar que estas constantes, para un cierto material escogido de diámetro (d) y con el rango del número de Reynolds ( $r_e$ ) considerado en el ensayo, deben ser determinadas antes de emprender toda una larga serie de ensayos. Para permanecer en el caso general, se escriben las 3 ecuaciones simbólicas siguientes, debiendo también tenerse en cuenta la determinación del peso específico.

$$(7) \quad \frac{A}{a} = \alpha \quad = f_2 (\text{material}, d, r_e)$$

$$(8) \quad \frac{B}{b} = \beta \quad = f_3 (\text{material}, d, r_e)$$

$$(9) \quad \frac{R_g''}{r_g''} = \eta \quad = f_4 (\text{material}, d)$$

Las tres condiciones del transporte de materiales pueden ahora ser fácilmente expresadas si se parte de la ley de transporte determinada en el laboratorio:

$$\frac{Q^{2/3} J_e}{D} = A + B \frac{G^{2/3}}{D}$$

### Condición de la iniciación del arrastre de los materiales correspondiente:

Esta condición expresa que la relación de los

$$\left( \frac{J_e Q^{2/3}}{D} \right)$$

debe ser igual a la relación de los (A). Teniendo en cuenta la ecuación (3) se puede escribir:

$$(V^*) \quad \frac{\xi \times \chi^{2/3} \times \lambda^{2/3}}{\delta \times \tau^{2/3}} = \alpha$$

### **Condición del transporte de materiales, correspondiente:**

Si en un canal el transporte de materiales se establece según la ecuación (V\*), su incremento al subir el nivel de agua debe presentarse de manera correspondiente. En consecuencia, es necesario que en la ley de transporte de materiales, el término que se refiere a dicho transporte esté formado de la misma manera que los otros dos términos. La condición se escribe entonces:

$$(VI^*) \quad \alpha = \beta \frac{\gamma^{2/3}}{\delta}$$

### **Condición para la escala de los tiempos de transporte de los materiales**

Esta condición debe expresar que las modificaciones correspondientes del fondo (movimiento de los bancos de aluviones) por efecto del transporte de materiales sólidos correspondientes, deben producirse en tiempos correspondientes. Escrita en términos de relaciones, se introduce como modificación correspondiente del fondo, la relación de los pesos de volúmenes correspondientes y se obtiene:

$$\eta \times \lambda \times \phi \times \chi = \gamma \times \phi \times \theta$$

y por lo tanto:

$$(VII^*) \quad \eta \times \lambda \times \chi = \gamma \times \theta$$

Lo cual expresa las condiciones introducidas en los capítulos I y II. No se puede aún, en el momento actual, decir con certeza si existen otras condiciones que tenga influencia en la formación de los bancos de aluviones. Según las experiencias adelantadas hasta ahora, parece que en los modelos con débil distorsión las condiciones expresadas son las más importantes y son suficientes para obtener en el modelo configuraciones realmente correspondientes a las de la naturaleza.

**(Continuará)**