ESTUDIO SOBRE EL IMPACTO

Por el Ingeniero Jorge Mejía Ramírez
Del Departamento de Matemáticas - UN.

DEDUCCION ANALITICA DE LA RELACION $V_1' - V_2' = -e\,(V_1 - V_2)$ DENOMINADA COEFICIENTE DE RESTITUCION.

El problema del impacto central entre dos partículas que se mueven sobre una misma recta, ambas en el mismo sentido, como se sabe, se resuelven mediante la ley de la conservación del momentum lineal en combinación con la relación definida en el enunciado, descubierta experimentalmente por Newton y denominada por él, coeficiente de restitución.

En este trabajo presento una deducción analítica del citado número, demostrando que su valor se encuentra dentro del intervalo $(0 \leq e \leq 1)$.

Suponiendo que el sentido del movimiento se elija como sentido positivo y que sea (m_1) la que alcanza a (m_2), al tener en cuenta que los impulsos recibidos por las partículas son iguales y de signos contrarios, siendo positivo el correspondiente a la partícula (m_2), resultan evidentes las siguientes relaciones:

$$V_1 - V_2 < V_1 \qquad (1)$$

$$0 < m_1 (V_1 - V_1') = m_2 (V_2' - V_2) < m_1 V_1 \qquad (2)$$

Además, si el sistema formado por (m_1) y (m_2) no recibe energía del mundo exterior, la cantidad (Q) definida con la ecuación,

$$\left(\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2}\right) - \left(\frac{m_1 V_1'^2}{2} + \frac{m_2 V_2'^2}{2}\right) = Q \qquad (3)$$

será nula o mayor que cero, según que el sistema sea o no conservativo, queriéndose significar, con la segunda posibilidad, que durante el impacto el sistema le cede al mundo exterior parte de su energía.

Modificando la escritura de la ecuación (3) y tomando en cuenta las ecuaciones (1) y (2), resultan obvias las siguientes transformaciones:

$$\frac{m_1}{2}(v_1^2 - v_1'^2) - \frac{m_2}{2}(v_2'^2 - v_2^2) = Q \qquad (4)$$

$$\frac{m_1}{2}(v_1 - v_1')\left[v_1 - v_2 + v_1' - v_2'\right] = Q$$

$$\frac{m_1}{2}(v_1 - v_1')(v_1 - v_2)\left[1 + \frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}\right] = Q$$

y como según (1) y (2)

$$v_1 - v_2 < v_1$$

$$m(v_1 - v_1') < m\, v_1$$

entonces,

$$\frac{m_1 v_1^2}{2}\left[1 + \frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}\right] \geq Q$$

Para un sistema conservativo, ($Q = O$), con lo cual, para este sistema, que ha recibido la denominación de perfectamente elástico, se tiene:

$$\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} = -1$$

Para un sistema no conservativo, ($Q > O$), se tiene en cambio,

$$\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} > \frac{Q}{\frac{m_1 v_1^2}{2}} - 1 \qquad (5)$$

Transformando una vez más la escritura de la ecuación (4)

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1 v_1'^2}{2} - \frac{m_2}{2}(v_2'^2 - v_2^2) = Q$$

se deduce que la relación

$$\frac{Q}{\frac{m_1 v_1^2}{2}} - 1 = e_1$$

deberá ser un número negativo de valor absoluto menor que la unidad. Considerando que antes del impacto (m_1) se acerca a (m_2) mientras que después de él (m_1) se aleja de (m_2), concluímos que

$$\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} = e$$

deberá ser también un número negativo. Es entonces evidente que la relación (5) solamente podrá verificarse si $|e| < |e_1|$ y por lo tanto,

$$\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} = -e$$

debiendo encontrarse (e) dentro del intervalo $0 \leq e \leq 1$

Velocidades finales de las partículas después de un impacto central.

Demostrado lo anterior, el sistema de ecuaciones para resolver el problema lo constituyen las ecuaciones

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' = (m_1 + m_2)\, V$$

$$\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} = -e$$

que resuelto para las incógnitas (v_1') y (v_2') nos da las ya conocidas fórmulas,

$$v_1' = (1+e)\,V - e\, v_1 \qquad (6)$$

$$v_2' = (1+e)\,V - e\, v_2 \qquad (7)$$

en las cualse (V) es la velocidad del centro de masa del sistema a saber,

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \qquad (8)$$

Cuantía de la energía mecánica que se pierde en la colisión

Descomponiendo la energía cinética del sistema en sus partes externa e interna, denominada también esta última como energía cinética relativa al centro de masa, y recordando que la primera cuya medida está dada por la ecuación,

$$E\,K_{EXT} = \frac{m_1 + m_2}{2} V^2$$

se conserva invariable, se tiene:

$$E\,K = E\,K_{EXT} + E\,K_{INT}$$

$$E\,K' = E\,K_{EXT} + E\,K'_{INT}$$

$$Q = E\,K - E\,K' = \Delta E\,K = E\,K_{INT} - E\,K' = \Delta E\,K_{INT}$$

$$E\,K_{INT} = \frac{m_1 v_{1c}^2 + m_2 v_{2c}^2}{2} = \frac{m_1}{2}(v_1 - V)^2 + \frac{m_2}{2}(v_2 - V)^2 \qquad (9)$$

$$E\,K'_{INT} = \frac{m_1 v_{1c}'^2 + m_2 v_{2c}'^2}{2} = \frac{m_1}{2}(v_{1c}' - V)^2 + \frac{m_2}{2}(v_{2c}' - V)^2 \qquad (10)$$

y como según (6) y (7)

$$v'_{1c} = v'_1 - V = e\,(V - v_1)$$

$$v'_{2c} = v'_2 - V = e\,(V - v_2)$$

al llevar los dos valores anteriores a la ecuación (10) sacamos como consecuencia,

$$E\,K'_{INT} = e^2\,E\,K_{INT}$$

con lo cual,

$$\Delta E K = Q = (1 - e^2)\,E\,K_{INT}$$

Según la ecuación anterior para un sistema perfectamente elástico, ($e = 1$), se tiene ($Q = O$), resultado conforme con la definición dada para (Q) al establecer la ecuación (3).

En cambio, para un sistema perfectamente inelástico o plástico, como también se le denomina, ($e = o$), se obtiene:

$$\Delta E K = \dot{Q} = E\,K_{INT}$$

Para este último caso, (8) llevado a (9) nos da la cuantía de (Q) en términos de la llamada masa reducida del sistema.

$$\Delta E K = Q = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2 \quad (m_1 + m_2)} = \frac{\mu\, v_{12}^2}{2} \qquad (11)$$

Conviene advertir que un choque central entre dos partículas, o dos objetos cuyos centros de masa se muevan sobre una misma recta, en sentidos opuestos, en las ecuaciones (7), (8) y (9) habrá que efectuar el cambio de (V_2) por ($-V_2$). La substitución anterior en la fórmula (11), correspondiente a un impacto perfectamente inelástico, en sentidos opuestos, nos muestra que la pérdida de energía es considerablemente mayor, lo que en la práctica significaría mayores destrozos en los objetos que intervienen en la colisión.